ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μπάρλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

1 Θέμα 2 - 14534

α. Θεωρούμε ευθεία ε από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Είναι $\varepsilon // \Delta E // B\Gamma$ και AB, AM, $A\Gamma$ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών.

Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

- $\dfrac{A\Delta}{AB}=\dfrac{AZ}{AM}\Leftrightarrow\dfrac{A\Delta}{AB}=\dfrac{2}{3}$, (1)
- $\dfrac{AE}{A\Gamma}=\dfrac{AZ}{AM}=\dfrac{2}{3}$, (2)

Από τις ιδιότητες αναλογιών $\dfrac{AE}{A\Gamma-AE}=\dfrac{2}{3-2}\Leftrightarrow\dfrac{AE}{E\Gamma}=2$.

β. Από τη σχέση (1) του ερωτήματος **α.** έχουμε

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow A\Delta=\frac{2}{3}\cdot AB\Leftrightarrow A\Delta=\frac{2}{3}\cdot 6\Leftrightarrow A\Delta=4$$

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε

$$\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow AE=\frac{2}{3}\cdot A\Gamma\Leftrightarrow AE=\frac{2}{3}\cdot 9\Leftrightarrow AE=6$$

Οπότε, $E\Gamma=A\Gamma-AE=9-6=3$

2 Θέμα 2 - 14579

α. Είναι:
- $AB=3A\Delta\Leftrightarrow B\Delta+A\Delta=3A\Delta\Leftrightarrow B\Delta=2A\Delta\Leftrightarrow\dfrac{B\Delta}{A\Delta}=2$.
- $\Delta E // A\Gamma$, οπότε $\dfrac{B\Delta}{A\Delta}=\dfrac{BE}{E\Gamma}\Leftrightarrow\dfrac{BE}{E\Gamma}=2$

β. Είναι:
- $\dfrac{BE}{E\Gamma}=2$
- $A\Gamma=3{,}9\Leftrightarrow AZ+\Gamma Z=3{,}9\Leftrightarrow AZ+1{,}3=3{,}9\Leftrightarrow AZ=2{,}6$

Οπότε $\dfrac{AZ}{\Gamma Z}=\dfrac{2{,}6}{1{,}3}=2$, άρα η ΖΕ είναι παράλληλη στην ΑΒ.

3 Θέμα 2 - 15830

α. Είναι: $ZE // B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή $\dfrac{ZA}{ZB}=\dfrac{EA}{E\Gamma}$, (1).

β. Είναι $ME\perp B\Gamma$, $A\Delta\perp B\Gamma$, οπότε $ME // A\Delta$, άρα από το Θ. Θαλή $\dfrac{M\Delta}{M\Gamma}=\dfrac{EA}{E\Gamma}$, (2).

Από τις (1), (2) έχουμε $\dfrac{ZA}{ZB}=\dfrac{M\Delta}{M\Gamma}$.

4 Θέμα 2 - 15831

α. Είναι $M\Delta=\dfrac{1}{2}MB=\dfrac{1}{2}M\Gamma$, (1).

Έχουμε $ME // A\Delta$, οπότε από το Θ. Θαλή $\dfrac{EA}{E\Gamma}=\dfrac{M\Delta}{M\Gamma}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\dfrac{EA}{E\Gamma}=\dfrac{\frac{1}{2}M\Gamma}{M\Gamma}=\dfrac{1}{2}$.

β. Έχουμε $ZE // B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή $\dfrac{ZA}{ZB}=\dfrac{EA}{E\Gamma}\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}\dfrac{ZA}{ZB}=\dfrac{1}{2}$.

5 Θέμα 2 - 21987

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 τέμνουν τις ευθείες ΓΘ και ΖΗ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{\Theta A}{H\Delta} = \frac{AB}{\Delta E}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη έχουμε:

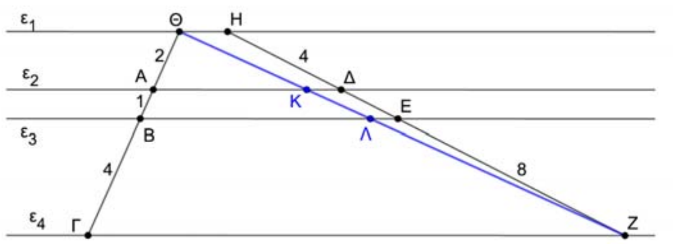
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{\Delta E} \;\; \text{ή} \;\; \frac{\Delta E}{1} = \frac{4}{2} \;\; \text{ή} \;\; \Delta E = 2$$

β) Οι ευθείες ΘΓ και ΗΖ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_2 και ε_3 στα σημεία Α, Β και Δ, Ε αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Ζ είναι σημεία των ευθειών ΘΓ και ΗΖ αντίστοιχα, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{4}$ και $\frac{\Delta E}{EZ} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Άρα $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$. Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓΖ ή ε_4 είναι παράλληλη προς τις ευθείες ε_2 και ε_3, άρα και προς την ε_1.

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα Κ και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες ε_2 , ε_3 και ε_4 τέμνουν τις ευθείες ΘΓ και ΘΖ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda Z}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{1}{K\Lambda} = \frac{4}{\Lambda Z}$ ή $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda} = 4$.



6 Θέμα 2 - 22132

α) Οι βάσεις ΑΔ και ΒΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η ΑΔ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές ΕΒ και ΕΓ του τριγώνου ΕΒΓ τις οποίες τέμνει. Επομένως:

$$\frac{EA}{EZ} = \frac{AB}{Z\Gamma}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη ΕΑ = 1 και ΕΖ = 1,5 έχουμε:

$$\frac{1}{1{,}5} = \frac{AB}{Z\Gamma} \;\; \text{ή} \;\; Z\Gamma = 1{,}5 \cdot AB$$

β) Έχουμε ΑΒ = 4. Επομένως, από το α) $Z\Gamma = 1{,}5 \cdot 4 = 6$.

γ) Η ΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ, γιατί το Ζ είναι σημείο της βάσης ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΕΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΕΑ και ΕΖ του τριγώνου ΕΑΖ και την παράλληλη ΒΓ στην ΑΖ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΕΑΖ, άρα:

$$\frac{EA}{EB}=\frac{EZ}{E\Gamma}=\frac{AZ}{B\Gamma}$$

Όμως ΕΒ = ΕΑ + ΑΒ = 1 + 4 = 5 και ΒΓ = 10. Αντικαθιστώντας στη σχέση $\frac{EA}{EB}=\frac{AZ}{B\Gamma}$ έχουμε:

$$\frac{1}{5}=\frac{AZ}{10} \text{ ή } 5\cdot AZ=10 \text{ ή } AZ=2$$

7 Θέμα 4 - 14499

α. i. Είναι $\Delta E // AM$, οπότε οι πλευρές του τριγώνου $BE\Delta$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ. Άρα, $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}=\frac{B\Delta}{BA}$ (1).

ii. Είναι $AM // ZE$, οπότε τα τρίγωνα $EZ\Gamma$ και $AM\Gamma$ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Άρα, $\frac{EZ}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$ (2).

β. Από τις σχέσεις (1) και (2) του **α.** ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}$.

Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ είναι $BM=\Gamma M$, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM}=\frac{\Gamma E}{BM}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{AM}+\frac{EZ}{AM}=\frac{BE}{BM}+\frac{\Gamma E}{BM}\Leftrightarrow\frac{\Delta E+EZ}{AM}=\frac{BE+\Gamma E}{BM}\Leftrightarrow\frac{\Delta E+EZ}{AM}=\frac{B\Gamma}{BM}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta E+EZ}{AM}=\frac{2\cdot BM}{BM}\Leftrightarrow\frac{\Delta E+EZ}{AM}=2\Leftrightarrow \Delta E+EZ=2AM$$, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

8 Θέμα 2 - 16100

α. $\frac{B\Delta}{A\Gamma}=\frac{12}{4}=3$, $\frac{\Delta E}{E\Gamma}=\frac{6}{2}=3$, $\frac{BE}{AE}=\frac{15}{5}=3$

β. Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $BE\Delta$ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία από το ερώτημα **α.** .

γ. Αφού τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $BE\Delta$ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$\hat{A}=\hat{B}$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$, $A\hat{E}\Gamma=B\hat{E}\Delta$.

9 Θέμα 2 - 14535

α. Είναι:
- $\hat{A}=\hat{Z}$
- $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, οπότε $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}$.

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ είναι όμοια.

β. i. Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{AB}{Z\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{ZE}$ και $\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους.

Από το ερώτημα **α.** είναι $\frac{3}{4}$.

10 Θέμα 2 - 14536

α. • Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ καθεμιά από τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ της βάσης του θα είναι $\frac{180^o-48^o}{2}=\frac{132^o}{2}=66^o$.

• Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΔ έχουμε $\hat{Z}=66^\circ$, οπότε και $\hat{\Delta}=66^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ .έχουν τις δύο γωνίες στη βάση τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

β. i. $\dfrac{AB}{EZ}=\dfrac{A\Gamma}{E\Delta}=\dfrac{B\Gamma}{Z\Delta}$.

ii. $\dfrac{B\Gamma}{Z\Delta}=\dfrac{AB}{EZ}=\dfrac{3\cdot E\Delta}{EZ}=\dfrac{3\cdot EZ}{EZ}=3$.

11 Θέμα 2 - 14537

α. Είναι: • $\hat{\Gamma}=180^\circ-(48^\circ+53^\circ)=180^\circ-101^\circ=79^\circ$

• $\hat{\Delta}=180^\circ-(79^\circ+48^\circ)=180^\circ-127^\circ=53^\circ$

Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β. i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ, οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ.

ii. $\dfrac{B\Gamma}{\Delta E}=\dfrac{A\Gamma}{EZ}=\dfrac{AB}{\Delta Z}$.

12 Θέμα 2 - 14538

α. Είναι $AB//\Delta E$, $\hat{A}=\hat{E}$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{B}=\hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ.

Οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες ως κατακορυφήν, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια.

β. i. Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι: $\dfrac{AB}{E\Delta}$, $\dfrac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}$, $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma E}$

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma E}=\dfrac{2\cdot\Gamma E}{\Gamma E}=2$.

13 Θέμα 2 - 14546

α. Είναι $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma E}=\dfrac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ και $A\hat{\Gamma}B=\Delta\hat{\Gamma}E$, ως κατακορυφήν.

Οπότε τα τρίγωνα ΓΑΒ, ΓΔΕ είναι όμοια.

β. i. $\dfrac{AB}{\Delta E}=\dfrac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{\Gamma E}$

ii. $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma E}=\dfrac{AB}{\Delta E}=\dfrac{2\cdot\Delta E}{\Delta E}=2$. Οπότε $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma E}=2\Leftrightarrow A\Gamma=2\cdot\Gamma E$.

Άρα η πλευρά ΑΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ.

14 Θέμα 2 - 16086

α. Φέρνουμε $\varepsilon_4//\varepsilon_2$ που διέρχεται από το Ο.

• Είναι $\varepsilon_2//\varepsilon_4//\varepsilon_3$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{OA}{O\Delta}=\frac{OB}{O\Gamma}\Leftrightarrow\frac{12}{3}=\frac{6}{O\Gamma}\Leftrightarrow 12\cdot O\Gamma=6\cdot 3\Leftrightarrow O\Gamma=1{,}5$$

• Είναι $\varepsilon_4//\varepsilon_2//\varepsilon_1$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{O\Gamma}{\Gamma E}=\frac{O\Delta}{\Delta Z}\Leftrightarrow\frac{1{,}5}{4}=\frac{3}{\Delta Z}\Leftrightarrow 1{,}5\cdot\Delta Z=4\cdot 3\Leftrightarrow\Delta Z=8$$

β. Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$\hat{Z}=\hat{A}$, ως εντός εναλλάξ και $\hat{E}=\hat{B}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

γ. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΖΕΟ και ΑΒΟ έχουμε:

$$\frac{ZE}{AB}=\frac{OZ}{OA}=\frac{O\Delta+\Delta Z}{OA}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

15 Θέμα 2 - 16099

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}$ και $A\hat{B}\Gamma=\Delta\hat{B}E=90^o$, οπότε είναι όμοια.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε,

$$\frac{AB}{\Delta B}=\frac{\Gamma A}{E\Delta}\Leftrightarrow\frac{36}{24}=\frac{AB}{16}\Leftrightarrow\frac{3}{2}=\frac{AB}{16}\Leftrightarrow 2AB=48\Leftrightarrow AB=24$$

16 Θέμα 2 - 16113

α. Είναι $AB//\Gamma\Delta$ οπότε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν:

$\hat{A}=\hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ και $\hat{\Delta}=\hat{B}$, ως εντός εναλλάξ

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια.

β. $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{BE}{E\Delta}$ (1)

γ. Από την (1) έχουμε $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{BE}{E\Delta}\Leftrightarrow\frac{8}{\Gamma\Delta}=\frac{6}{15}=\frac{BE}{10}$. Οπότε:

- $6\Gamma\Delta=8\cdot15\Leftrightarrow 6\Gamma\Delta=120\Leftrightarrow\Gamma\Delta=20$
- $15BE=6\cdot10\Leftrightarrow 15BE=60\Leftrightarrow BE=4$

17 Θέμα 2 - 16126

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ έχουν:

- $\hat{B}$ κοινή γωνία
- $\frac{BA}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{3}{2}$

Οπότε είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{3}{2}$.

β. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{36}{\Gamma\Delta}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\Gamma\Delta=24$.

18 Θέμα 2 - 16755

α. $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=\frac{2A\Gamma}{A\Gamma}=2$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{2\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=2$

β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν: $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=2$, $\frac{A\Gamma}{A\Delta}=2$, $\hat{\Gamma}$ (κοινή)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

γ. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε $B\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{\Delta}A$, $\hat{B}=\Delta\hat{A}\Gamma$.

19 Θέμα 2 - 21986

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{AE}{\Gamma E}$ ή $\frac{1}{B\Delta}=\frac{AE}{\Gamma E}$ ή $AE\cdot B\Delta=\Gamma E$.

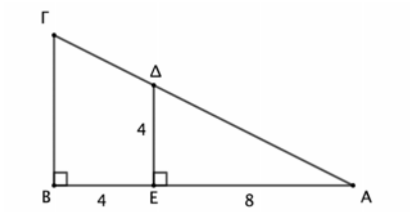
β) i. Από το α) ερώτημα $AE\cdot B\Delta=9$ ή $B\Delta\cdot B\Delta=9$ ή $B\Delta^2=9$ ή $B\Delta=3$.

Επομένως $AB=A\Delta+B\Delta=1+3=4$.

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{4}$.

20 Θέμα 2 - 21350



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $Α\hat{Ε}Δ=\hat{Β}$ (ως ορθές) και κοινή τη γωνία $\hat{Α}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Α}=\hat{Α}$	$Α\hat{Ε}Δ=\hat{Β}$	$Α\hat{Δ}Ε=\hat{Γ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$$

γ) Από την ισότητα

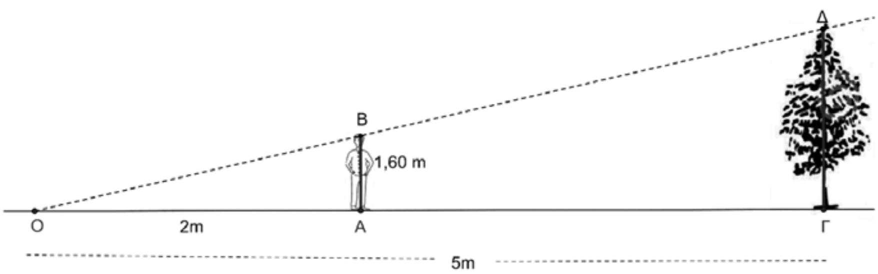
$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ} \quad ή \quad \frac{4}{ΒΓ}=\frac{8}{12} \quad ή \quad 8ΒΓ=48 \quad ή \quad ΒΓ=6$$

21 Θέμα 4 - 22102

α)



i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta = 90^0$ και έχουν την οξεία γωνία $\hat{O}$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση.

Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{2}{5}$.

ii. Από τη σχέση (1) και με αντικατάσταση των δεδομένων θα έχουμε ότι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{1{,}60}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \Gamma\Delta = \frac{1{,}6 \cdot 5}{2} = 4 \,.$$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

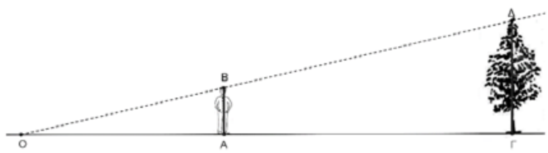
β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά.

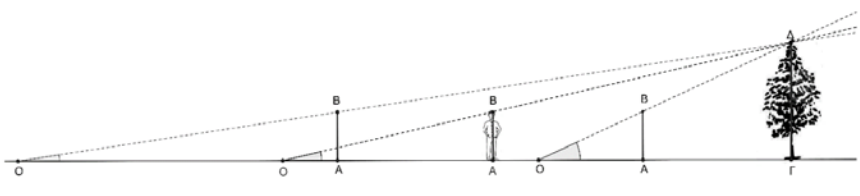
Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν.
Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές.

Το μέτρο της γωνίας $\hat{O}$ με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογωνίων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν.

Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου.

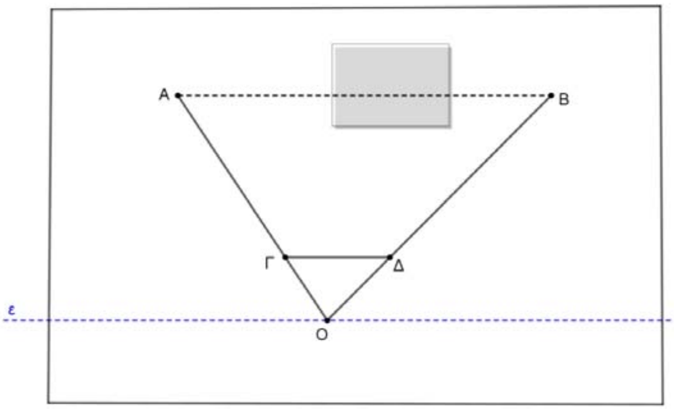
Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.





22 Θέμα 4 - 22565

Έστω ότι το τμήμα ΑΒ εκφράζει την απόσταση των σημείων Α, Β και ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι παράλληλη με την ΓΔ.



α) Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ και $\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ (1).

i. Οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ από σχέση (1). Επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.

ii. Από σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία $\hat{Ο}$), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ με $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ από τη σχέση (1), άρα $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{10}$ ή ΑΒ = 10·ΓΔ. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

23 Θέμα 2 - 16805

α. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε

$$2ΑΒ+2ΒΓ=72 \Leftrightarrow 2(x+y)+2z=72 \Leftrightarrow x+y+z=36$$

Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2 , 3 , 4 αντίστοιχα.

Άρα $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{x+y+z}{2+4+3}=\frac{36}{9}=4$.

Άρα $x=4\cdot 2=8$, $y=4\cdot 4=16$ και $z=3\cdot 4=12$.

β. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΓΒΕ , ΔΑΕ έχουμε:

- $ΓΕ^2=y^2+z^2=16^2+12^2=400$, οπότε $ΓΕ=20$.
- $ΔΕ^2=ΑΕ^2+ΔΑ^2=8^2+12^2=208$, οπότε $ΔΕ=\sqrt{208}=\sqrt{16\cdot 13}=4\sqrt{13}$.

Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ είναι:

$ΔΕ+ΕΓ+ΔΓ=4\sqrt{13}+20+(8+16)=44+4\sqrt{13}$.

24 Θέμα 2 - 16757

α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$ΔΓ^2=ΑΓ^2+ΑΔ^2=3^2+4^2=25$$

Άρα, $ΓΔ=\sqrt{25}=5$.

β. Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΕΔΒ$ έχουν $Α\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Δ}Β$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{Α} = \hat{Ε} = 90^o$.
Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια.
γ. Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΕΔΒ$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
Έτσι έχουμε: $\frac{ΑΓ}{ΒΕ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{3}{ΒΕ} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{3 \cdot 2}{5} \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{6}{5}$.

25 Θέμα 2 - 17342

α. i. Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνιο με
$Α\hat{Δ}Γ + \hat{Γ} + Γ\hat{Α}Δ = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 45^o + Γ\hat{Α}Δ = 180^o \Leftrightarrow Γ\hat{Α}Δ = 45^o$.
Αφού $Γ\hat{Α}Δ = \hat{Γ}$, θα είναι $ΓΔ = ΑΔ = 4$.
ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$ έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \text{ , οπότε } ΑΓ = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

β. Είναι $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ = 7 - 4 = 3$.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ έχουμε
$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $ΑΒ = \sqrt{25} = 5$.

26 Θέμα 2 - 22514

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, άρα $ΑΓ = 3$.

β) Έχουμε $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$, οπότε $ΒΔ = \frac{ΑΒ^2}{ΒΓ} = \frac{16}{5}$.

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$, οπότε

$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 4^2 - \frac{16^2}{5^2} = 16 - \frac{16 \cdot 16}{25} = \frac{16 \cdot 25 - 16 \cdot 16}{25} =$
$\frac{16 \cdot (25-16)}{25} = \frac{16 \cdot 9}{25}$, άρα $ΒΔ = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$.

27 Θέμα 2 - 21067

α. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Έχουμε:
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
Άρα $ΒΓ = \sqrt{169} = 13$.
β. i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΔΒΓ$. Έχουμε:
$ΔΓ^2 = ΒΓ^2 + ΒΔ^2$ ή $ΒΔ^2 = ΔΓ^2 - ΒΓ^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$.
Άρα $ΒΔ = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.
ii. Η προβολή της $ΒΔ$ στην $ΔΓ$ είναι η $ΔΕ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΒΔ$ είναι:
$ΒΔ^2 = ΔΕ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow (3\sqrt{3})^2 = ΔΕ \cdot 14 \Leftrightarrow 27 = 14ΔΕ \Leftrightarrow ΔΕ = \frac{27}{14}$.

28 Θέμα 2 - 22248

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΒ =15. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς ΓΒ.

$$ΓΒ^2 = 15^2 = 225$$

$$ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Άρα $ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = ΓΒ^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $\widehat{Α}=90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ = 15.

β)

i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ θα ισχύει η αναλογία $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΑ} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}$ ή $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$, αφού ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ΕΑ = 4 από τα δεδομένα. Οπότε από την ισότητα $\frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$ έχουμε ότι $12 \cdot ΔΒ = 4 \cdot 15$ ή ΔΒ = 5.

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε θα έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή θα ισχύει $\frac{ΓΔ}{ΓΒ} = \frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΕΔ}{ΑΒ}$ (1) όπου ΑΒ = 9, ΓΑ = 12, ΓΔ = 10 και ΓΕ = 8.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{ΕΔ}{9}$ και από την ισότητα $\frac{10}{15} = \frac{ΕΔ}{9}$ προκύπτει ότι ΕΔ = 6.

29 Θέμα 4 - 22400

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 9$, $ΑΓ = 12$ και $ΒΓ = 15$, άρα έχουμε

$ΒΓ^2 = 15^2 = 225$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$,

άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{Α} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{Α} = 90^\circ$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΔΕ^2 = ΑΔ^2 + ΑΕ^2$ ή $ΔΕ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΔΕ^2 = 25$ ή $ΔΕ^2 = 5^2$ ή $ΔΕ = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 9$, $ΑΓ = 12$ και $ΒΓ = 10$, άρα έχουμε

$ΑΓ^2 = 12^2 = 144$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$

άρα $ΑΓ^2 < ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, οπότε $\widehat{Β} < 90^\circ$. Η οξεία γωνία $\widehat{Β}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ έχουν

$$\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$ και τη γωνία $\widehat{Α}$ κοινή,

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως $\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}$ ή $\frac{ΔΕ}{10}=\frac{1}{3}$ ή $ΔΕ=\frac{10}{3}$.

30 Θέμα 4 - 16133

α. • Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ(\hat{Β}=90^o)$, έχουμε

$ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2=12^2+16^2=400$, οπότε $ΑΓ=\sqrt{400}=20$.

• Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ(\hat{Γ}=90^o)$, έχουμε

$ΓΕ^2=ΔΕ^2-ΓΔ^2=10^2-8^2=36$, οπότε $\sqrt{36}=6$.

Άρα $ΑΕ=ΑΓ+ΓΕ=20+6=26$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν $\frac{ΑΒ}{ΓΕ}=\frac{12}{6}=2$, $\frac{ΒΓ}{ΓΔ}=\frac{16}{8}=2$, $\frac{ΑΓ}{ΔΕ}=\frac{20}{10}=2$.

Οπότε είναι όμοια.

γ. i. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{Α}=\hat{Ε}$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ. Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η είναι το μέσο της ΑΕ .Επομένως θα είναι

$$ΗΕ=\frac{ΑΕ}{2}=\frac{26}{2}=13.$$

ii. Είναι $ΔΓ // ΖΗ$, ως κάθετες στην ΑΕ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ}=\frac{ΓΕ}{ΗΕ}\Leftrightarrow\frac{8}{ΖΗ}=\frac{6}{13}\Leftrightarrow 6ΖΗ=104\Leftrightarrow ΖΗ=\frac{52}{3}$$

31 Θέμα 4 - 17348

α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε

$ΑΕ^2=ΑΒ^2+ΒΕ^2=6^2+2^2=40$, οπότε $ΑΕ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

β. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\hat{Α}_1=\hat{Ε}_1$ ως εντός εναλλάξ
- $\hat{Β}=\hat{Ζ}=90^o$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια.

Επομένως θα ισχύει $\frac{ΑΒ}{ΔΖ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΒΕ}{ΑΖ}$, (1) .

γ. Είναι $ΑΒ=6$, $ΒΕ=2$ και $ΑΕ=2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται $\frac{6}{ΔΖ}=\frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ}=\frac{2}{ΑΖ}$, (2) .

Είναι $ΔΖ=ΖΕ$, οπότε $\frac{6}{ΔΖ}=\frac{2}{ΑΖ}\Leftrightarrow\frac{6}{ΖΕ}=\frac{2}{ΑΖ}\Leftrightarrow\frac{6}{ΖΕ}=\frac{2}{ΑΖ}=\frac{6+2}{ΖΕ+ΑΖ}=\frac{8}{ΑΕ}=\frac{8}{2\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$, (3) .

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ}=\frac{4}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 4ΑΔ=2(\sqrt{10})^2\Leftrightarrow 4ΑΔ=20\Leftrightarrow ΑΔ=5$$

32 Θέμα 4 - 14500

α. $1\to ii$, $2\to iii$, $3\to iv$

β. i. Είναι $ΚΜ=R+ρ=ΛΜ$, οπότε το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ . Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ , αφού $ΟΚ=ΟΛ=R$, επομένως το ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή $ΟΜ\perp ΚΛ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΜΛ$ είναι $\hat{O}=90^o$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΟΜ^2+ΟΛ^2=ΛΜ^2 \Leftrightarrow (2R-\rho)^2+R^2=(R+\rho)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R^2-4R\rho+\rho^2+R^2=R^2+2R\rho+\rho^2 \Leftrightarrow 4R^2=6R\rho \Leftrightarrow 2R=3\rho \Leftrightarrow \rho=\dfrac{2R}{3}$.

33 Θέμα 4 - 14533

α. i. • Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή $ΑΒΓΔΕ$ διάνυσε συνολικά $(3+10+4+14)Km=31Km$.

• Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή $ΑΖΕ$ έχουμε: $ΑΖ//ΓΔ$ και $ΖΕ//ΒΓ$.

Στο τετράπλευρο $ΒΓΔΖ$ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα $ΒΖ=ΓΔ=4$ και $ΖΔ=ΒΓ=10$.

Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι $(7+10+14)Km=31Km$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι $\hat{Z}=90^o$, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΕΑ^2=ΑΖ^2+ΖΕ^2=7^2+24^2=49+576=625$, οπότε $ΕΑ=\sqrt{625}=25Km$.

β. Αν τα κινητά, κατά την επιστροφή τους από το σημείο $Ε$ στο $Α$ περάσουν από το σημείο $Γ$, τότε τα σημεία $Α, Γ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

Τότε τα τρίγωνα $ΓΔΕ$ και $ΑΖΕ$ έχουν την $\hat{Δ}=\hat{Z}=90^o$ και $\hat{E}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια.

Επομένως τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΖΕ θα έχουν πλευρές ανάλογες, άρα

$\dfrac{ΓΔ}{ΑΖ}=\dfrac{ΔΕ}{ΖΕ}$ ή $\dfrac{4}{7}=\dfrac{14}{24}$ ή $\dfrac{4}{7}=\dfrac{7}{12}$ ή $48=49$ που είναι άτοπο.

Επομένως, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το $Ε$ δεν περνούν από το $Γ$.

34 Θέμα 4 - 21149

α. i. Η γωνία $Β\hat{Γ}Α$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $Β\hat{Α}Γ=30^o$, άρα $ΒΓ=\dfrac{ΑΒ}{2}\Leftrightarrow 2=\dfrac{2R}{2}\Leftrightarrow R=2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΓ^2=ΑΒ^2-ΒΓ^2=4^2-2^2=16-4=12$$

Άρα $ΑΓ=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

β. • Είναι $Α\hat{Γ}Δ=90^o$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ΑΓΔ. Έχουμε

$$ΑΔ^2=ΑΓ^2+ΔΓ^2=\left(\sqrt{12}\right)^2+6^2=12+36=48=\sqrt{48}$$

Άρα $ΑΔ=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

• Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ με $ΑΒ=4$, $ΔΒ=8$, $ΑΔ=\sqrt{48}$, έχουμε

$ΔΒ^2=8^2=64$ και $ΑΒ^2+ΑΔ^2=4^2+(4\sqrt{3})^2=16+48=64$.

Αφού $ΔΒ^2=ΑΒ^2+ΑΔ^2$, συμπεραίνουμε ότι $Β\hat{Α}Δ=90^o$, δηλαδή $ΔΑ\perp ΟΑ$.

Επομένως, το τμήμα $ΔΑ$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $Α$.

35 Θέμα 2 - 16804

α. i. $ΘΓ$ **ii.** $ΒΗ$ **iii.** $ΑΓ$, $ΒΓ$ **iv.** $ΑΒ$, $ΑΓ$

v. $ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2-2\cdot ΒΓ\cdot ΒΗ$

vi. $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΓ\cdot ΑΘ$

β. Το τμήμα $ΑΘ$ είναι η προβολή της πλευράς $ΑΒ$ στην $ΑΓ$, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά $ΒΓ$ έχουμε:

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΓ\cdot ΑΘ \Leftrightarrow 25=16+36-2\cdot 6\cdot ΑΘ \Leftrightarrow 12ΑΘ=27 \Leftrightarrow ΑΘ=\frac{27}{12}\Leftrightarrow ΑΘ=\frac{9}{4}$$

36 Θέμα 2 - 17354

α. i. ΚΕ **ii.** ΚΖ **iii.** ΔΖ , ΔΕ **iv.** ΕΖ , ΔΕ

v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ΕΖ^2 + 2 \cdot ΕΖ \cdot ΚΕ$

vi. $ΕΖ^2 = ΔΕ^2 + ΔΖ^2 - 2 \cdot ΔΕ \cdot ΔΙ$

β. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε:

$$ΕΖ^2 = ΔΕ^2 + ΔΖ^2 - 2 \cdot ΔΕ \cdot ΔΙ \Leftrightarrow 16 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot ΔΙ \Leftrightarrow 4ΔΙ = 13 \Leftrightarrow ΔΙ = \frac{13}{4}$$

37 Θέμα 2 - 21302

α. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, οπότε $ΑΔ = 4$.

β. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$, οπότε $ΑΓ = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$.

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$ΑΒ = 5$, $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3 + 8 = 11$ και $ΑΓ = \sqrt{80}$.

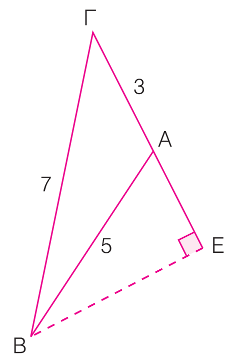
Είναι $ΒΓ^2 = 121$ και $ΑΓ^2 = 80$, οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ , αφού $ΒΓ^2 > ΑΓ^2$.

Άρα η $\hat{Α}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, αφού βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του ΒΓ.

Είναι $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 25 + 80 = 105$ και $ΒΓ^2 = 121$, οπότε $ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, άρα $\hat{Α} > 90^\circ$ και επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

38 Θέμα 2 - 14549

α. Παρατηρούμε ότι $α^2 = 7^2 = 49$ και $β^2 + γ^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.



Δηλαδή ισχύει ότι $α^2 > β^2 + γ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

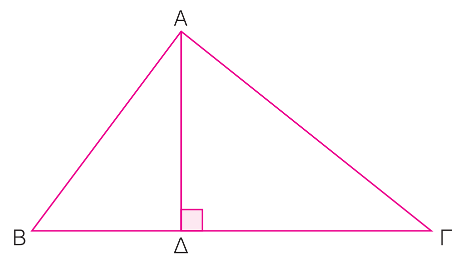
β. Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία $\hat{Α}$ έχουμε:

$α^2 = β^2 + γ^2 + 2 \cdot β \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 49 = 34 + 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49 - 34 = 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 15 = 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{15}{6} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{5}{2}$

39 Θέμα 2 - 16080

α. Φέρουμε το ύψος ΒΔ. Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι η ΑΔ.



Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ \Leftrightarrow \sqrt{41}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΔ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16ΑΔ = 25 + 64 - 41 = 48 \Leftrightarrow ΑΔ = 3$

β. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

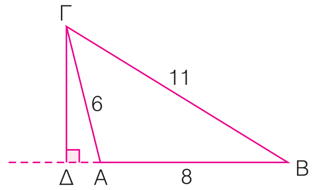
$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow 5^2 = ΒΔ^2 + 3^2 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 16$, οπότε $ΒΔ = 4$.

40 Θέμα 2 - 16101

α.
- $ΒΓ^2 = 11^2 = 121$
- $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

Αφού είναι $ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Α} > 1\llcorner$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β. Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Τότε, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι το τμήμα ΑΔ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Αφού η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα θα είναι:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16A\Delta \Leftrightarrow 21 = 16A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{21}{16}.$$

41 Θέμα 2 - 17343

α. Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 - 2A\Delta \cdot \Gamma\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Delta} \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \sigma\upsilon\nu 120^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Gamma^2 = 25 + 9 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 49 \Leftrightarrow A\Gamma = 7$$

β. Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB\cdot A\Gamma\cdot \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 = 74 - 70\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow 70\sigma\upsilon\nu\omega = 10 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}.$$

42 Θέμα 4 - 21183

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \text{ επομένως } A\Gamma = 2.$$

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $AH = A\Delta + \Delta H = \sqrt{2} + 1$, επομένως έχουμε:

$$AZ^2 = AH^2 + HZ^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = \sqrt{2} - 1$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$Z\Gamma^2 = ZE^2 + E\Gamma^2 = 1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Από το β ερώτημα προκύπτει ότι

$$AZ = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \text{ και } Z\Gamma = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$A\Gamma^2 = AZ^2 + Z\Gamma^2 - 2AZ\cdot Z\Gamma\cdot \sigma\upsilon\nu\omega \text{ ή}$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega \text{ ή}$$

$$2\cdot\sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega = 4 \text{ ή}$$

$$2\cdot\sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega = 4 \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \hat{\omega} = 45^o.$$

43 Θέμα 4 - 21185

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \text{ ή } \left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha}{5}=\kappa\\ \frac{\beta}{4}=\kappa\\ \frac{\gamma}{3}=\kappa\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l}\alpha=5\kappa\\ \beta=4\kappa\\ \gamma=3\kappa\end{array}\right\}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\ \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \text{ και } \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta\right)^2+\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma\right)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha\right)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\ \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$\begin{aligned}10\alpha<8\beta+6\gamma &\Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa\\ &\Leftrightarrow 50\kappa<32\kappa+18\kappa\\ &\Leftrightarrow 50\kappa<50\kappa,\quad \text{άτοπο}\end{aligned}$$

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

44 Θέμα 2 - 18558

α. Φέροντας το τμήμα $ΓΖ$, το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο με $ΔΓ=5$ και $ΓΕ=12$.
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΔΕ^2=ΔΓ^2+ΓΕ^2=5^2+12^2=25+144=169$, άρα $ΔΕ=13$.

β. Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΓΕ$, το ορθογώνιο $ΒΖΚΑ$ και το τετράγωνο $ΚΗΘΙ$.

Είναι:
- $(ΔΓΕ)=\frac{1}{2}\cdot ΓΕ\cdot ΔΓ=\frac{1}{2}\cdot12\cdot5=30$
- $(ΒΖΚΑ)=ΒΖ\cdot ΑΒ=7\cdot4=28$
- $(ΚΗΘΙ)=3^2=9$

Άρα $(ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ)=(ΔΓΕ)+(ΒΖΚΑ)+(ΚΗΘΙ)=30+28+9=67$.

45 Θέμα 2 - 16102

α. Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:

- $ΔΟ = ΒΟ$ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)
- $Δ\hat{Ο}Ζ = Β\hat{Ο}Ε$ (ως κατακορυφήν)
- $Ζ\hat{Δ}Ο = Ε\hat{Β}Ο$ ως εντός εναλλάξ

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(ΔΟΖ) = (ΒΟΕ)$.

β. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε $(ΑΔΒ) = (ΓΒΔ)$.

Από το σχήμα έχουμε ότι $(ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ)$ και $(ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)$.

Οπότε, είναι $(ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ) \Leftrightarrow (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ)$.

46 Θέμα 2 - 18550

α. Είναι $2ΑΒ + 2ΒΓ = 36 \Leftrightarrow 2(x + y) + 2z = 36 \Leftrightarrow x + y + z = 18$

Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2 , 4 , 3 αντίστοιχα, οπότε

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + y + z}{2 + 4 + 3} = \frac{18}{9} = 2$$

Άρα $x = 2 \cdot 2 = 4$, $y = 4 \cdot 2 = 8$ και $z = 3 \cdot 2 = 6$.

β. i. Το τρίγωνο ΓΕΔ έχει βάση $ΔΓ = ΑΒ = 4 + 8 = 12$ και το ύψος όσο το $ΓΒ = 6$,

άρα $(ΓΕΔ) = \frac{12 \cdot 6}{2} = 6 \cdot 6 = 36$

ii. • $(ΑΒΓΔ) = 12 \cdot 6 = 72$

• $(ΓΕΔ) = 36$

Οπότε $\frac{(ΓΕΔ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.

47 Θέμα 2 - 16817

α. • $(ΒΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΔΕ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot α = α$

• $(ΑΒΓΔ) = α^2$

• $(ΒΕΔ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{8} \Leftrightarrow α = \frac{α^2}{8} \Leftrightarrow 8α = α^2 \Leftrightarrow α(α - 8) = 0 \Leftrightarrow α = 8$ ή $α = 0$, που απορρίπτεται.

β. Είναι $ΓΕ = ΓΔ - ΔΕ = 8 - 2 = 6$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 + ΓΕ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, οπότε $ΒΕ = 10$.

48 Θέμα 2 - 18559

α. Είναι $ΓΕ = ΒΕ = 5$, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος.

Είναι $ΓΕ^2 = 5^2 = 25$, $ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$.

Άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $Ε\hat{Α}Γ = 90^\circ$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

β. i. Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα $(ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)$.

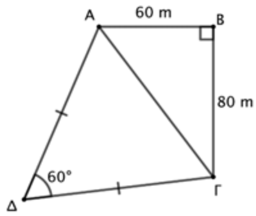
ii. Το ΑΓΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα

$$(ΑΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΕ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Από το **β.i.** ερώτημα έχουμε ότι $(ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)$, άρα

$$(ΑΒΓ) = 2(ΑΓΕ) = 2 \cdot 6 = 12$$

49 Θέμα 2 - 22035



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 60^2 + 80^2$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 3600 + 6400$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 10000$$

Επομένως, $\mathrm{A\Gamma} = 100$ m.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{\Delta} = 60^o$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο με $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma} = \Gamma\Delta = 100$ m.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400 \ \mathrm{m}^2$$

Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΓ είναι:

$$(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = \frac{\mathrm{A\Gamma}^2\sqrt{3}}{4} = 2500 \cdot \sqrt{3} \ \mathrm{m}^2$$

Το συνολικό εμβαδόν του κτήματος θα είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (2400 + 2500 \cdot \sqrt{3}\,) \ \mathrm{m}^2$$

50 Θέμα 2 - 22513

α) Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$.

Έχουμε $B\Gamma^2 = 13^2 = 169$ και $A\Gamma^2 + AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Άρα $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $\hat{A} = 90^o$.

β) Επειδή $\hat{A} = 90^o$ έχουμε $(AB\Gamma) \ = \frac{1}{2}AB \cdot A\Gamma = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

γ) Ισχύει $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{(AB\Gamma)}{2\alpha} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13}$.

51 Θέμα 2 - 16821

Από υπόθεση έχουμε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α, επίσης το τμήμα ΑΕ ισούται με: $\mathrm{AE} = \frac{3}{5}\mathrm{AB}$, δηλαδή $\mathrm{AE} = \frac{3}{5}\alpha$ και το τμήμα ΑΖ ισούται με: $\mathrm{AZ} = \frac{4}{5}\mathrm{A\Delta}$ δηλαδή $\mathrm{AZ} = \frac{4}{5}\alpha$.

52 Θέμα 2 - 22339

α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$), όπου είναι $AB = 15$ και $\Delta B = 9$, έχουμε

$AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$ ή $15^2 = 9 \cdot B\Gamma$ ή $B\Gamma = \frac{225}{9}$ ή $B\Gamma = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$), όπου είναι $AB = 15$ και $B\Gamma = 25$, έχουμε

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$ ή $A\Gamma^2 = 25^2 - 15^2$ ή $A\Gamma^2 = 625 - 225$ ή $A\Gamma^2 = 400$ ή $A\Gamma = 20$.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι

$(AB\Gamma) = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$.

53 Θέμα 2 - 22331

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ $\left(\widehat{H} = 90°\right)$, είναι $AB = 20$ και $BH = 12$, άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2$ ή $AH = 16$.

β) Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι το $BH = 12$, και επειδή το εμβαδόν του είναι $(AB\Delta) = 24$, θα έχουμε

$(AB\Delta) = \frac{A\Delta \cdot BH}{2}$ ή $24 = \frac{A\Delta \cdot 12}{2}$ ή $6A\Delta = 24$ ή $A\Delta = 4$.

γ) Το τρίγωνο ΓΔΗ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\Delta H = AH - A\Delta = 16 - 4 = 12$ και $\Gamma H = 5$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΗ είναι $(\Gamma\Delta H) = \frac{H\Gamma \cdot H\Delta}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

54 Θέμα 2 - 21823

α. Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές), οπότε $\Delta E = AB = 5$. Άρα $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 8 - 5 = 3$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $B\Gamma = \sqrt{25} = 5$.

γ. • $(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$

• $(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} \cdot A\Delta = \frac{5+8}{2} \cdot 4 = 26$

Άρα $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

55 Θέμα 2 - 22338

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΚ είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΔ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$. Άρα

$AK^2 = K\Delta \cdot K\Gamma$ ή $AK^2 = 9 \cdot 16$ ή $AK^2 = 144$ ή $AK^2 = 12^2$ ή $AK = 12$.

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ύψος $ΑΚ = 12$ και βάσεις

$ΔΓ = ΚΔ + ΚΓ = 9 + 16 = 25$ και

$ΑΒ = ΚΓ = 16$, αφού το ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο $(\widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Κ} = 90°)$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΔΓ+ΑΒ)\cdot ΑΚ}{2} = \frac{(25+16)\cdot 12}{2} = 246$.

56 Θέμα 2 - 22512

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2\cdot ΑΓ\cdot ΒΓ\cdot συν\,Γ = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2} = 12$,

άρα $ΑΒ = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

β) Έχουμε $ΒΓ^2 = 16$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 12 + 4 = 16$.

Επομένως $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

γ) Επειδή $\widehat{Α} = 90^o$ έχουμε $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

57 Θέμα 2 - 21101

α. Έχουμε $ΒΓ^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$.

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ είναι ορθή, δηλαδή $\hat{Α} = 90^o$.

β. $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

γ. Είναι $ΒΓ\cdot ΑΔ = ΑΒ\cdot ΑΓ \Leftrightarrow \sqrt{3}ΑΔ = \sqrt{2}\cdot 1 \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

58 Θέμα 2 - 18560

α. Είναι $ΑΒ = ΓΔ = 14$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Έχουμε $ΒΕ = ΑΒ - ΑΕ = 14 - 9 = 5$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$ΓΕ^2 = ΓΒ^2 - ΒΕ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, άρα $ΓΕ = 12$.

β. i. $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ\cdot ΓΕ = 14\cdot 12 = 168$.

ii. $(ΑΕΓΔ) = \frac{ΑΕ + ΓΔ}{2}\cdot ΓΕ = \frac{9+14}{2}\cdot 12 = 23\cdot 6 = 138$.

59 Θέμα 4 - 16807

α. i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12.

Οπότε είναι ίσα και ισχύει $ΓΕ = ΔΕ$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει

$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2\cdot 12^2$.

Οπότε $ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}$.

- Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι $ΓΔ + ΔΕ + ΕΓ = 24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.
- Το τρίγωνο ΓΕΔ έχει βάση τη $ΔΓ = ΑΒ = 24$ και το ύψος όσο το $ΒΓ = 12$.

Άρα $(ΓΕΔ) = \frac{24\cdot 12}{2} = 12\cdot 12 = 144$.

ii. Αν το σημείο $Ε$ ταυτιστεί με την κορυφή $Α$ του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο $ΓΕΔ$ ταυτίζεται με το τρίγωνο $ΓΑΔ$.

Για την πλευρά $ΓΑ$ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουμε

$ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2$, οπότε $ΓΑ = 12\sqrt{5}$.

Η περίμετρος του τριγώνου είναι $ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ = 12\sqrt{5} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{5}$.

- Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\dfrac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

β. i. Αν το σημείο $Ε$ κινηθεί πάνω στη ευθεία $ΑΒ$ που είναι παράλληλη στην πλευρά $ΔΓ$ τότε η πλευρά $ΔΓ$ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου $ΓΕΔ$ μεταβάλλονται. Αν το σημείο $Ε$ κινείται στην προέκταση της $ΑΒ$ προς το $Β$, απομακρυνόμενο από το σημείο $Β$, τα πλάγια τμήματα $ΓΕ$ και $ΔΕ$ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους $Ε$ απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη $Β$ και $Α$ των κάθετων τμημάτων $ΓΒ$ και $ΔΑ$ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου $ΓΕΔ$ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΕΔ$, βάση είναι η σταθερή πλευρά του $ΔΓ$, και ύψος όσο το $ΒΓ$. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΕΔ$ είναι $\dfrac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι: $(ΑΒΓΔ) = 24 \cdot 12 = 288$.

Άρα $(ΓΕΔ) = 144 = \dfrac{288}{2} = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

60 Θέμα 4 - 16135

α. i. Είναι $ΔΒ = 2$ οπότε $ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ = 10 - 2 = 8$.

Έχουμε $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 16 \Leftrightarrow ΑΔ = 4$.

ii. $(ΑΒΓ) = \dfrac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = 20$.

β. i. Καθώς το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, η βάση του τριγώνου $ΒΓ$ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος $ΑΔ$ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$, το οποίο θα είναι $(ΑΒΓ) = \dfrac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{10 \cdot ΑΔ}{2} = 5ΑΔ$.

ii. Έστω $Ο$ το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη $ΒΓ$.

- Το $Α$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $\dfrac{ΒΓ}{2} = 5$. Επομένως $ΟΑ = 5$ (1).
- Το $Δ$ είναι η προβολή του $Α$ στη $ΒΓ$ και το $Ο$ σημείο της $ΒΓ$. Επομένως $ΑΔ \le ΟΑ$ (2)
- $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$ (από το **β.i.**)
  $\le 5ΑΟ$ (από την (2))
  $= 25$ (από την (1))

Επομένως $(ΑΒΓ) \le 25$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής.

61 Θέμα 4 - 17349

α. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2 = 3^2 + (4-\sqrt{3})^2 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7 - 2\sqrt{3})$, οπότε $ΒΕ = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

β. Είναι $ΔΕ = ΑΔ - ΑΕ = 3 - (4 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΗ$ έχουμε ότι

$$ΕΗ^2 = ΔΕ^2 + ΔΗ^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 7 - 2\sqrt{3} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$$

Οπότε $ΒΕ = 2ΕΗ \Leftrightarrow ΕΖ = 2ΕΗ$.

γ. Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι $(ΒΖΗ) - (ΒΓΗ)$.

Είναι:

- $(\text{ΒΕΖ})=\dfrac{\text{ΒΕ}^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3}-6$

- Η ΒΗ είναι διάμεσος του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ, οπότε $(\text{ΒΖΗ})=\dfrac{(\text{ΒΕΖ})}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}-6}{2}$.

- $(\text{ΒΓΗ})=\dfrac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΓΗ}}{2}=\dfrac{\text{ΒΓ}\cdot(\text{ΓΔ}-\text{ΔΗ})}{2}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$

Άρα $(\text{ΒΖΗ})-(\text{ΒΓΗ})=\dfrac{7\sqrt{3}-6}{2}-\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}-15}{2}$.

62 Θέμα 4 - 18173

α. Φέρουμε την ΒΚ. Επειδή $\text{ΓΔ}=2\text{ΑΒ}$ και Κ μέσο της ΓΔ, θα έχουμε $\text{ΑΒ}=//\,\text{ΔΚ}$, οπότε το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο και $\text{ΒΚ}=//\,\text{ΑΔ}$.

i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην ΓΔ. Το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ.

Είναι $(\text{ΑΒΚΔ})=\text{ΔΚ}\cdot\text{ΒΕ}=\text{ΚΓ}\cdot\text{ΒΕ}$ και $(\text{ΒΚΓ})=\dfrac{\text{ΚΓ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}$.

Άρα $(\text{ΒΚΓ})=\dfrac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$.

ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ που είναι και ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ.

Είναι $(\text{ΑΒΚΔ})=\text{ΒΚ}\cdot\text{ΜΘ}$ και $(\text{ΒΜΚ})=\dfrac{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΜΘ}}{2}$, οπότε $(\text{ΒΜΚ})=\dfrac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$.

Από το **α.i.** ερώτημα έχουμε ότι

$(\text{ΒΚΓ})=\dfrac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$. Επομένως $(\text{ΒΚΓ})=(\text{ΒΜΚ})$.

β. Από το **α.ii.** προκύπτει $2(\text{ΒΜΚ})=(\text{ΑΒΚΔ})$, (1) και $(\text{ΒΜΚ})=(\text{ΒΚΓ})$, (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε

$$3(\text{ΒΜΚ})=(\text{ΑΒΚΔ})+(\text{ΒΚΓ})\Leftrightarrow 3(\text{ΒΜΚ})=(\text{ΑΒΓΔ})\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΒΜΚ})}=3 .$$

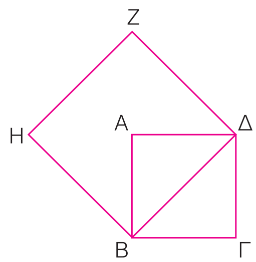
Άρα, η πρόταση είναι σωστή. Δηλαδή ο λόγος των εμβαδών παραμένει σταθερός και ίσος με 3.

63 Θέμα 4 - 18562

α. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$\text{ΒΔ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΔ}^2\Leftrightarrow\text{ΒΔ}^2=\alpha^2+\alpha^2\Leftrightarrow\text{ΒΔ}^2=2\alpha^2$, οπότε $\text{ΒΔ}=\alpha\sqrt{2}$.

Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε $(\text{ΑΒΓΔ})=\alpha^2$.



β. i. Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Είναι $\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Α}=45^\circ$ αφού η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\text{Δ}}$ του τετραγώνου.

Επειδή $\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}=90^\circ$ είναι $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}=45^\circ$.

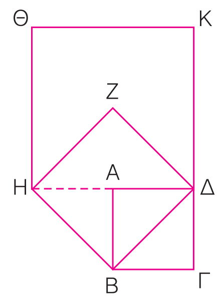
Οπότε το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\text{Δ}}$ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\text{Β}}$ του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιό του.

Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Η πλευρά του τετραγώνου ΒΔΖΗ είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}$, οπότε $(\text{ΒΔΖΗ})=(\alpha\sqrt{2})^2\Leftrightarrow(\text{ΒΔΖΗ})=2\alpha^2$.

Στο **α.** ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι α^2, οπότε παρατηρούμε ότι $(\text{ΒΔΖΗ})=2(\text{ΑΒΓΔ})$.



γ. Στο τετράγωνο $ΒΔΖΗ$ η πλευρά του ισούται με $α\sqrt{2}$.
Επομένως η διαγώνιός του $ΔΗ$, σύμφωνα με το **α.** ερώτημα, θα είναι ίση με $α\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2α$.

Επομένως η πλευρά του τετραγώνου $ΔΗΘΚ$ είναι $2α$, οπότε $(ΔΗΘΚ)=4α^2$.

Είναι $(ΔΗΘΚ)=2(ΒΔΖΗ)$, όπως και $(ΒΔΖΗ)=2(ΑΒΓΔ)$.

Επομένως $(ΔΗΘΚ)=2(ΒΔΖΗ)=4(ΑΒΓΔ)$.

Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το προηγούμενό του.

Το αρχικό τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $α$, έχει εμβαδόν $α^2$, το $ΒΔΖΗ$ έχει εμβαδόν $2α^2$, το $ΔΗΘΚ$ έχει εμβαδόν $4α^2$.

Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του $ΔΗΘΚ$ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδόν $8α^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν του θα είναι 16 φορές το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου $ΑΒΓΔ$, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις (4) φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο $ΔΗΘΚ$ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

64 Θέμα 4 - 21124

α. i. Είναι $α^2=40^2=1600$ και $β^2+γ^2=25^2+25^2=1250$, άρα $α^2>β^2+γ^2$ οπότε $\hat{Α}>90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα είναι αμβλυγώνιο.

ii. • Το ύψος $υ_α=ΑΔ$ από την κορυφή $Α$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΒΔ=\frac{α}{2}=\frac{40}{2}=20$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΔΒ$, έχουμε
$υ_α^2=γ^2-ΒΔ^2=25^2-20^2=225$, οπότε $υ_α=15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε=\frac{1}{2}\cdot α\cdot υ_α=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 15=300$.

• $Ε=\frac{1}{2}β\cdot υ_β$, οπότε $υ_β=\frac{2Ε}{β}=\frac{600}{25}=24$ και $Ε=\frac{1}{2}γ\cdot υ_γ$, οπότε $υ_γ=\frac{2Ε}{γ}=\frac{600}{25}=24$.

iii. Επειδή $υ_β=υ_γ=24>υ_α=15$ οι μεγαλύτερες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου με ίσες πλευρές $υ_β$, $υ_γ$ είναι οι προσκείμενες γωνίες στην βάση $υ_α$. Αυτές υποχρεωτικά είναι οξείες, αφού ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες. Επίσης και η γωνία της κορυφής θα είναι οξεία. Άρα το τρίγωνο με πλευρές $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ είναι οξυγώνιο.

β. Έστω $α$, $β$, $γ$ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ με $β=γ$ και $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η γωνία της κορυφής $\hat{Α}$.

Είναι $α^2>β^2+γ^2 \Leftrightarrow α^2>2β^2 \Leftrightarrow \frac{α}{β}>\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{α}{β}>1$, (1).

Είναι $Ε=\frac{1}{2}α\cdot υ_α=\frac{1}{2}β\cdot υ_β=\frac{1}{2}γ\cdot υ_γ$, άρα $\frac{1}{2}β\cdot υ_β=\frac{1}{2}γ\cdot υ_γ$ και επειδή $β=γ$ προκύπτει $υ_β=υ_γ$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές.

Είναι $\frac{1}{2}α\cdot υ_α=\frac{1}{2}β\cdot υ_β \Leftrightarrow \frac{α}{β}=\frac{υ_β}{υ_α}$ και από την (1) έχουμε $\frac{υ_β}{υ_α}>1 \Leftrightarrow υ_β>υ_α$ άρα $υ_β=υ_γ>υ_α$.

Άρα οι μεγαλύτερες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου με ίσες πλευρές $υ_β$, $υ_γ$ είναι οι προσκείμενες γωνίες στην βάση $υ_α$. Αυτές υποχρεωτικά είναι οξείες, αφού ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες. Επίσης και η γωνία της κορυφής θα είναι οξεία. Άρα το τρίγωνο με πλευρές $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ είναι οξυγώνιο.

65 Θέμα 4 - 18565

α. i. Οι ακτίνες OA και KB είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα AB στα σημεία A και B.
Είναι $KE // AB$ και $AB \perp OA$, οπότε $KE \perp OA$.
Άρα το τετράπλευρο $ABKE$ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο.
Επομένως $AE = KB = 2$ και $OE = OA - EA = 7 - 2 = 5$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEK είναι $OK = O\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta K = 7 + 4 + 2 = 13$.
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:
$KE^2 = OK^2 - OE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, άρα $KE = 12$. Άρα $AB = KE = 12$.

ii. Στο τετράπλευρο $ABKO$ είναι $OA \perp AB$ και $KB \perp AB$, άρα $OA // KB$. Επίσης $OA = 7 \neq 2 = KB$, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το $ABKO$ είναι τραπέζιο.

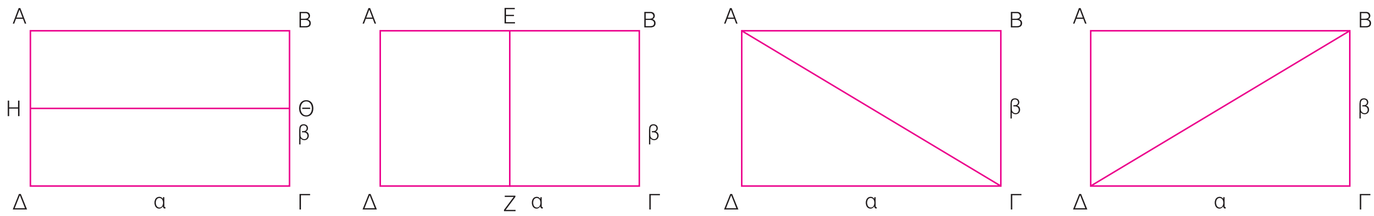
Άρα $(ABKO) = \dfrac{KB + OA}{2} \cdot AB = \dfrac{2+7}{2} \cdot 12 = 54$

β. $(ABKE) = AB \cdot KB \Leftrightarrow 4\sqrt{14} = AB \cdot 2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{14}$.

Από το **α.** ερώτημα $AB = KE$, οπότε $KE = 2\sqrt{14}$ και από το Π. Θ. στο τρίγωνο OKE είναι:
$OK^2 = OE^2 + KE^2 = 5^2 + (2\sqrt{14})^2 = 25 + 56 = 81$, άρα $OK = 9$.
Είναι $OK = O\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta K \Leftrightarrow 9 = 7 + \Gamma\Delta + 2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 0$.
Δηλαδή η διάκεντρος OK των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι θα εφάπτονται εξωτερικά.

66 Θέμα 4 - 18564

α.



1η περίπτωση 2η περίπτωση 3η περίπτωση 4η περίπτωση

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιους του. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η 3^{η} και 4^{η} θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

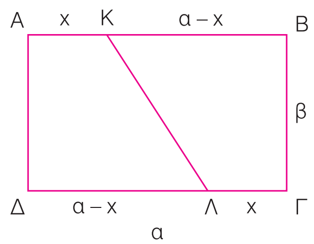
Αν $AB = \Gamma\Delta = \alpha$ και $A\Delta = B\Gamma = \beta$ τότε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$.

Στην 1^{η} περίπτωση έχουμε $(AB\Theta H) = (H\Theta\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$.

Στην 2^{η} περίπτωση έχουμε $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z) = \dfrac{\alpha}{2} \cdot \beta = \dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$.

Στην 3^{η} και 4^{η} περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με $(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) = (AB\Delta) = (B\Gamma\Delta) = \dfrac{1}{2}\alpha \cdot \beta = \dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$

Ένας άλλος τρόπος που μπορεί επίσης να χωριστεί το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι ο εξής:



Θεωρούμε ένα σημείο K στην πλευρά AB και ένα σημείο Λ στην απέναντι πλευρά $\Gamma\Delta$ τέτοια ώστε $AK = \Gamma\Lambda$.
Αν $AK = \Gamma\Lambda = x$, τότε $KB = \Lambda\Delta = \alpha - x$. Τα δύο τραπέζια $AK\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda KB$ έχουν ίσες τις βάσεις τους και το ύψος τους είναι η διάσταση $A\Delta$ του ορθογωνίου.

Οπότε $(AK\Lambda\Delta) = (\Gamma\Lambda KB) = \dfrac{x + \alpha - x}{2} \cdot \beta = \dfrac{\alpha}{2} \cdot \beta = \dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$.

β. i. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο I, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο $\mathrm{I}\Delta\Gamma$ που η πλευρά του $\Delta\Gamma$ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του I από τη $\Delta\Gamma$, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β.

Άρα $(\mathrm{I}\Delta\Gamma) = \dfrac{1}{2}\alpha\cdot\beta = \dfrac{(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)}{2}$.

ii. Έστω ότι η θέση του σημείου I μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου I, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο **β.i.** ερώτημα. Και οι θέσεις του I είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.

67 Θέμα 4 - 18566

α. Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΖ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΗΖ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με $4\cdot\mathrm{B}\Gamma$.

Το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με $4\cdot\mathrm{B}\Gamma$.

Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

β. Είναι $(\mathrm{B}\Gamma\Delta\mathrm{E}) = \mathrm{B}\Gamma^2$ και $(\mathrm{B}\Gamma\mathrm{HZ}) = \mathrm{BZ}\cdot\Gamma\mathrm{A}$.

Είναι $\mathrm{A}\Gamma < \mathrm{B}\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{A}\Gamma\cdot\mathrm{B}\Gamma < \mathrm{B}\Gamma^2 \Leftrightarrow (\mathrm{B}\Gamma\mathrm{HZ}) < (\mathrm{B}\Gamma\Delta\mathrm{E})$, οπότε δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

68 Θέμα 4 - 18557

α. Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα. Είναι

$(\mathrm{A}\Delta\Gamma\mathrm{E}) = \Delta\Gamma\cdot\upsilon$ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

$(\mathrm{B}\Gamma\Delta\mathrm{Z}) = \Delta\Gamma\cdot\upsilon$ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $(\mathrm{A}\Delta\Gamma\mathrm{E}) = (\mathrm{B}\Gamma\Delta\mathrm{Z})$.

β. • Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο $\Pi_1 = 2\cdot\mathrm{A}\Delta + 2\cdot\Delta\Gamma$.

• Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ έχει περίμετρο $\Pi_2 = 2\cdot\mathrm{B}\Gamma + 2\cdot\Delta\Gamma$.

γ. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $(\mathrm{A}\Delta\Gamma\mathrm{E}) = (\mathrm{B}\Gamma\Delta\mathrm{Z})$.

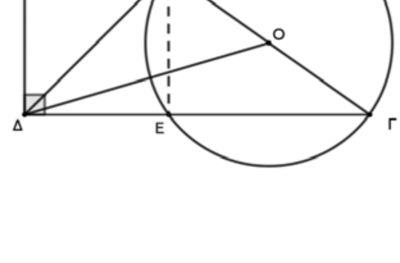
Για να έχουν και ίσες περιμέτρους πρέπει $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{B}\Gamma$, δηλαδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές.

69 Θέμα 4 - 21840

α) Εφόσον το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 54 είναι:

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \frac{(\mathrm{AB}+\Gamma\Delta)\cdot\mathrm{A}\Delta}{2} \Rightarrow 54 = \frac{(5+13)\cdot\mathrm{A}\Delta}{2} \Rightarrow 54 = 9\cdot\mathrm{A}\Delta \Rightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{54}{9} = 6$$

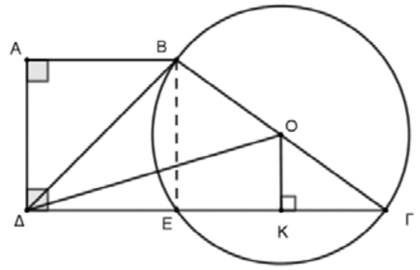
β)



Η γωνία $B\hat{E}\Gamma=90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα και $B\hat{E}\Delta=90^o$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχοντας σύμφωνα με την υπόθεση $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και $B\hat{E}\Delta=90^o$, δηλαδή τρεις γωνίες ορθές, είναι ορθογώνιο και επομένως ΒΕ=ΑΔ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου), άρα ΒΕ=6.

Ακόμη ΔΕ=ΑΒ=5, οπότε ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=13-5=8. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $B\Gamma^2=BE^2+E\Gamma^2= 36+64=100$. Άρα ΒΓ=10.

γ)



Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ. Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα $OK = \frac{BE}{2} = 3$.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα θα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

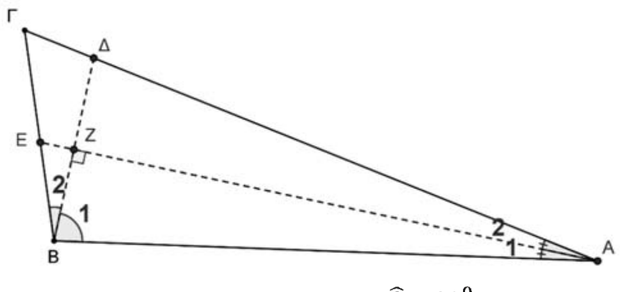
$\Delta O^2=\Delta K^2+OK^2 = 81+9 =90$. Άρα $\Delta O=3\sqrt{10}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι $(B\Delta\Gamma) = \frac{\Delta\Gamma . BE}{2} = \frac{13.6}{2} = 39$. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, άρα :

$$(B\Delta O) = \frac{(B\Delta\Gamma)}{2} = \frac{39}{2} .$$

70 Θέμα 4 - 22100

α)



i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{20^0}{2} = 10^0$.

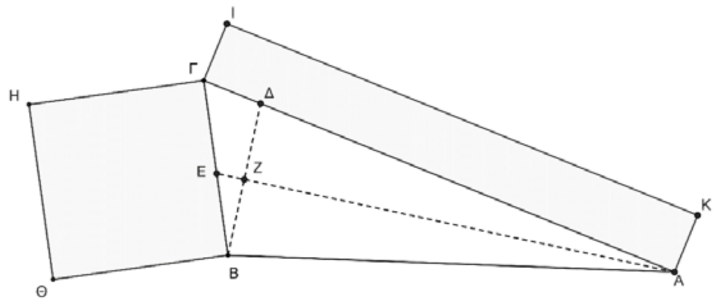
   Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι συμπληρωματικές και θα ισχύει $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^0$ με $\hat{A}_1 = 10^0$.

   Επομένως $\hat{B}_1 = 90^0 - 10^0$ ή $\hat{B}_1 = 80^0$.

   Είναι $\Gamma\hat{B}A = \hat{B} = 100^0$, οπότε θα είναι $\hat{B}_2 = \Gamma\hat{B}A - \hat{B}_1$ με $\hat{B}_1 = 80^0$. Επομένως $\hat{B}_2 = 100^0 - 80^0 = 20^0$ ή $\Gamma\hat{B}\Delta = 20^0$. Συνεπώς $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^0$.

ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A}$, από το i. ερώτημα και τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Gamma$. Συνεπώς, τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{B}\Delta$ και $\widehat{A}$, οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}B$ και $A\widehat{B}\Gamma$.

β)



Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι (ΒΓΗΘ) = $B\Gamma^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι (ΑΓΙΚ) = ΑΓ· ΓΔ.

Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση;

$$B\Gamma^2 = A\Gamma\cdot\Gamma\Delta \text{ ή αν ισχύει } \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \quad (1)$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι, δηλαδή θα ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$. Επομένως, θα ισχύει ότι $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$, άρα και $B\Gamma^2$ = ΑΓ· ΓΔ.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.

71 Θέμα 2 - 21299

α. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot A\Gamma\cdot ημφ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{2}{5} = 5$.

β. Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot A\Gamma\cdot BH = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot BH = \frac{5}{2}\cdot BH$ και από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι $(AB\Gamma) = 5$.

Οπότε $\frac{5}{2}\cdot BH = 5 \Leftrightarrow BH = \frac{2}{5}\cdot 5 \Leftrightarrow BH = 2$.

72 Θέμα 2 - 15979

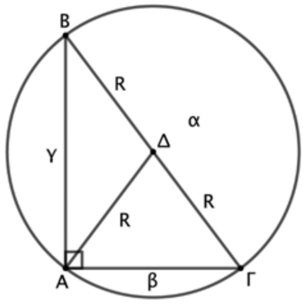
α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ , από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\cdot AB\cdot A\Gamma\cdot συν120^{o} = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot συν120^{o} = 25 + 25 - 50\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 75$$

οπότε $B\Gamma = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

β. Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot A\Gamma\cdot ημA = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot ημ120^{o} = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

73 Θέμα 2 - 22130



α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $B\Gamma = \alpha = 2R$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Οπότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2 \cdot (2R)^2 = 2 \cdot 4R^2 = 8R^2$$

74 Θέμα 2 - 17346

α. Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \text{συν}\hat{B} = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\text{συν}60^\circ = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 28 \text{ , οπότε } A\Gamma = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

β. $AB^2 = 6^2 = 36$ και $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $AB^2 < A\Gamma^2 + B\Gamma^2$.

Επομένως $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ και αφού είναι η μεγαλύτερη γωνία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma \cdot \text{ημ}\hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \text{ημ}60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

75 Θέμα 2 - 17347

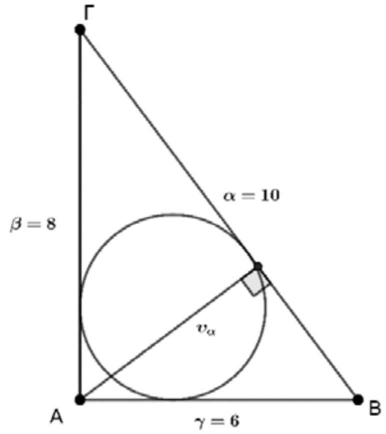
α. $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Delta \cdot A\Gamma \cdot \text{ημ}\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{ημ}60^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.

β.
- $(A\Delta E) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$
- $(A\Gamma\Delta E) = (A\Gamma\Delta) + (A\Delta E) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

76 Θέμα 2 - 21196

α) Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ υπολογίζεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$ όπου β και γ οι κάθετες πλευρές του, επομένως αντικαθιστώντας τα μήκη των πλευρών β και γ του τριγώνου έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 24.$$



β)

i. Το μήκος της υποτείνουσας α του ορθογωνίου τριγώνου προσδιορίζεται με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, επομένως:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \text{ άρα } \alpha = \sqrt{100} = 10.$$

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\upsilon_\alpha$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του εμβαδού Ε = 24 από το πρώτο ερώτημα και το μήκος της πλευράς α = 10 στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$24 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\upsilon_\alpha \text{ ή } \upsilon_\alpha = \frac{24}{5}.$$

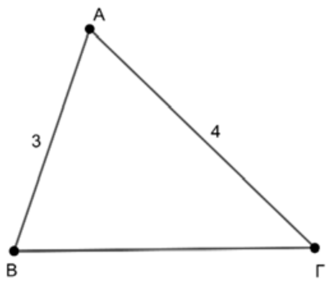
iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του Ε είναι $E = \tau\cdot\rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{10+8+6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του εμβαδού $E = 24$ και της ημιπεριμέτρου $\tau = 12$ στον τύπο $E = \tau\cdot\rho$ έχουμε:

$$24 = 12\cdot\rho \text{ ή } \rho = 2.$$

77 Θέμα 4 - 22101



α)

i. Για την εύρεση του εμβαδού του τριγώνου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma\cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}3\cdot 4\cdot \eta\mu 60^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνΑ = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot συν60^{\circ} = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$

Άρα, ΒΓ = $\sqrt{13}$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$Ε = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot ημΑ = 6 \cdot ημΑ.$$

Για την γωνία Α του τριγώνου ισχύει ότι $0^{\circ} < Α < 180^{\circ}$, άρα $0 < ημΑ \leq 1$. Η μέγιστη τιμή του ημΑ είναι 1, όταν η γωνία Α είναι 90°. Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία Α είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι Ε = 6·1 = 6 τ.μ.

78 Θέμα 4 – 22510

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΟ είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΔ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ).

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ).

β) Από το α) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) (1)

και (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ) (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΔ) + (ΓΟΔ), οπότε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΓΔ).

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το (ΒΟΓ) έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ).

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ) (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι (ΒΟΓ) + (ΑΟΒ) – (ΑΟΓ) = (ΓΕΑ) (4)

και (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΑ) = (ΑΖΒ) (5).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) = (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ), άρα (ΑΒΓ) = (ΒΔΓ) + (ΓΕΑ) + (ΑΖΒ).

Επομένως 2(ΑΒΓ) =(ΑΒΓ) + (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ) = (ΑΖΒΔΓΕ).

79 Θέμα 4 - 22509

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = ΔΓ = 2α, ΑΔ = ΒΓ = α, ΜΒ = x και ΑΜ = $2\alpha - x$

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε: $ΜΓ^2 = ΜΒ^2 + ΒΓ^2 = α^2 + x^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΝΓ έχουμε:

$ΝΓ^2 = ΝΔ^2 + ΔΓ^2 = (2x)^2 + (2α)^2 = 4x^2 + 4α^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΝ έχουμε:

$ΜΝ^2 = ΑΝ^2 + ΑΜ^2 = (α + 2x)^2 + (2α - x)^2 = α^2 + 4x^2 + 4αx + 4α^2 + x^2 - 4αx =$
$5α^2 + 5x^2$.

β) Από το α) έπεται $ΜΓ^2 + ΓΝ^2 = \alpha^2 + x^2 + 4x^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 + 5x^2 = ΜΝ^2$,

κατά συνέπεια το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΜΝ.

γ) Από τα δεδομένα και το ερώτημα α) τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ είναι ορθογώνια οπότε:

$(\text{AMN}) = \frac{1}{2}\text{AM}\cdot\text{AN} = \frac{1}{2}\ (2a-x)(a+2x) = \frac{1}{2}(\ 2a^2+4ax-ax-2x^2) =$

$\frac{1}{2}(\ 2a^2+3ax-2x^2)$.

$(\text{M}\Gamma\text{N}) = \frac{1}{2}\ \text{M}\Gamma\cdot\Gamma\text{N} = \frac{1}{2}\ \sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{4a^2+\ 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(\alpha^2+x^2)^2}\ = \frac{1}{2}\cdot 2\ (a^2+x^2) =$

a^2+x^2.

δ) Λόγω του ερωτήματος β) έχουμε:

$(\text{AMN}) = (\text{MN}\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ (\ 2a^2+3ax-2x^2) = a^2+x^2 \Leftrightarrow 2a^2+3ax-2x^2 = \ 2a^2+2x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3ax \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{3}{4}\ a$, οπότε ΑΜ $= \frac{3}{4}\ a$, άρα γνωστή η θέση του Μ.

80 Θέμα 4 - 22396

α) i) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Delta} = 90°$,

$\text{AB} = \text{A}\Gamma = \text{A}\Delta + \Delta\Gamma = 3+2 = 5$

και $\text{A}\Delta = 3$.

Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$\text{B}\Delta^2 = \text{AB}^2 - \text{A}\Delta^2$

$\text{B}\Delta^2 = 5^2 - 3^2$

$\text{B}\Delta^2 = 16$

$\text{B}\Delta = 4$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(\text{AB}\Gamma) = \frac{\text{A}\Gamma\cdot\text{B}\Delta}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$.

β) i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο με $\text{A}\widehat{\text{B}}\text{E} = 90°$, άρα για το ύψος του ΒΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΕ , θα έχουμε

$\text{B}\Delta^2 = \Delta\text{A}\cdot\Delta\text{E}$

$4^2 = 3\cdot\Delta\text{E}$

$\Delta\text{E} = \frac{16}{3}$.

ii) Είναι $\Gamma\text{E} = \Delta\text{E} - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι

$(\text{B}\Gamma\text{E}) = \frac{\Gamma\text{E}\cdot\text{B}\Delta}{2} = \frac{\frac{10}{3}\cdot 4}{2} = \frac{20}{3}$.

81 Θέμα 2 - 21304

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{\text{B}} = \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\text{E}}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\text{AB}}{\text{A}\Delta} = \frac{\text{AB}}{\text{AB}+\text{B}\Delta} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

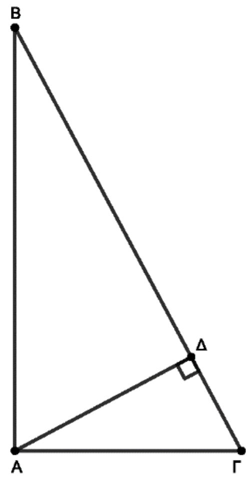
β. Αν $\Pi = 8{,}5$ η περίμετρος του ΑΒΓ και Π' η περίμετρος του ΑΔΕ , έχουμε

$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \Pi' = 3\Pi \Leftrightarrow \Pi' = 3\cdot 8{,}5 \Leftrightarrow \Pi' = 25{,}5$.

γ. Έχουμε $(\text{ΑΔΕ}) = 15$ και επειδή τα ΑΒΓ , ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\text{ΑΒΓ})}{15} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\text{ΑΒΓ}) = \frac{5}{3}.$$

82 Θέμα 2 - 22070



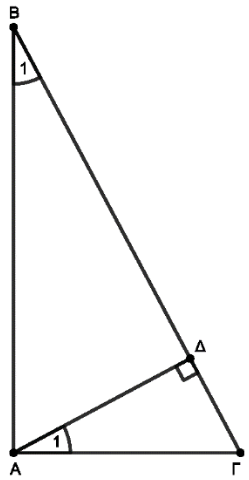
α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2+\gamma^2=8^2+15^2 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=64+225 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=289$$

$$\alpha^2=17^2 \text{ ή } \alpha^2=289$$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α=17 και $\widehat{\text{Α}}=90^\circ$.

β)



i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{\text{B}} = \widehat{\text{A}}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή λ = $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{15}{8}$.

Άρα $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

83 Θέμα 2 - 21636

α. Είναι $\mathrm{B\Gamma}^2 = 10^2 = 100$ και $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Άρα $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ , είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την $\hat{\mathrm{A}}$.

β. i. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$.

Οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Gamma}$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ , ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Είναι $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

84 Θέμα 2 - 21120

α. i. Επειδή $\Delta\mathrm{E} // \mathrm{B\Gamma}$ είναι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B\Gamma}}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ , ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε

$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \lambda^2 = \frac{1}{2}$, οπότε $(\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$.

β. Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = 2$, οπότε από το ερώτημα **α.i.** προκύπτει $(\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Άρα $(\mathrm{B\Gamma E\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) - (\mathrm{A\Delta E}) = 2 - 1 = 1$.

85 Θέμα 2 - 16127

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$$

β. i. Ο λόγος ομοιότητας των ομοίων τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι

$$\lambda = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B'\Gamma'}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

ii. Έστω Ε΄ το εμβαδόν του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.

Έχουμε $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E'}} = \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{36}{\mathrm{E'}} = (\frac{3}{2})^2 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 9}{\mathrm{E'}} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{\mathrm{E'}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{E'} = 16$.

86 Θέμα 2 - 22259

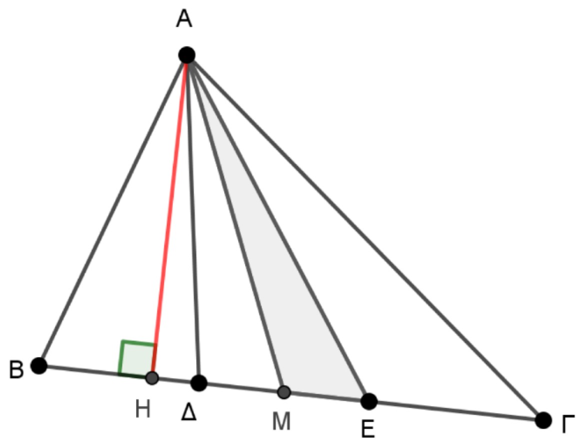
Από τα δεδομένα έχουμε: ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ = $\frac{1}{3}$ ΒΓ (1).

α) Το ΑΗ είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή:

$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$, η οποία λόγω της (1) γράφεται: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{3}ΒΓ}{ΒΓ} = \frac{1}{3}$,

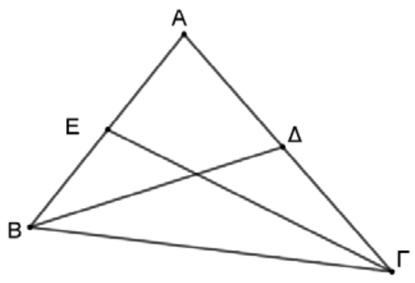
οπότε: (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).

β)



Στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα ΑΜΕ και ΑΜΔ. Οπότε (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΔΕ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) δίνει: (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

87 Θέμα 2 - 21838



α) Είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα . Αφού η ΓΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ).

ii. Αφού (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ) και (ΒΕΓ)+(ΑΕΓ)=(ΑΒΓ), άρα (ΒΕΓ) $=\frac{1}{2}\cdot$(ΑΒΓ)$=\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{3}=12\sqrt{3}$. Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΔΒΓ)$=\frac{1}{2}\cdot$(ΑΒΓ) $=12\sqrt{3}$, οπότε (ΔΒΓ)=(ΕΒΓ)$=12\sqrt{3}$.

88 Θέμα 2 - 15978

- $\mathrm{A\Delta}=\frac{1}{4}\mathrm{AB}$, οπότε $\mathrm{B\Delta}=\frac{3}{4}\mathrm{AB}$
- $\mathrm{BE}=\frac{2}{3}\mathrm{B\Gamma}$, άρα $\mathrm{\Gamma E}=\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$
- $\mathrm{\Gamma Z}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$, επομένως $\mathrm{AZ}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$

α. • Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε

- $\frac{(\mathrm{A\Delta Z})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\frac{1}{4}\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{8}$, οπότε $(\mathrm{A\Delta Z})=\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma})$
- $\frac{(\mathrm{BE\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\frac{3}{4}\mathrm{AB}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{2}$, οπότε $(\mathrm{BE\Delta})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$
- $\frac{(\mathrm{\Gamma EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{\Gamma Z}\cdot\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{\Gamma A}\cdot\mathrm{\Gamma B}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{\Gamma A}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}\cdot\mathrm{\Gamma B}}=\frac{1}{6}$, οπότε $(\mathrm{\Gamma EZ})=\frac{1}{6}(\mathrm{AB\Gamma})$

β. $(\mathrm{\Delta EZ})=(\mathrm{AB\Gamma})-(\mathrm{A\Delta Z})-(\mathrm{BE\Delta})-(\mathrm{\Gamma EZ})=(\mathrm{AB\Gamma})-\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma})-\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})-\frac{1}{6}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{5}{24}(\mathrm{AB\Gamma})$

89 Θέμα 2 - 22260

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\widehat{A}=150^0$ και ημ$150^0=\frac{1}{2}$.

α) Είναι (ΑΒΓ) $=\frac{1}{2}$ ΑΒ·ΑΓ·ημΑ $=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot$ημ$150^0=12\cdot\frac{1}{2}=6$.

β) Από τα δεδομένα η ΓΔ $=\frac{1}{2}$ ΓΑ. Επίσης το ΓΕ $=\frac{2}{3}$ΓΒ.

Έτσι, τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ.

Δηλαδή: $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Gamma\Delta\cdot\Gamma E}{\Gamma A\cdot\Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma A\cdot\frac{2}{3}\Gamma B}{\Gamma A\cdot\Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{3}$.

γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{3}$ ή (ΓΔΕ) $=\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ)

και λόγω του ερωτήματος (α) θα είναι: (ΓΔΕ) $=\frac{1}{3}$ .6 = 2.

90 Θέμα 2 – 16756

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$.

Είναι: $\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})}=\dfrac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}}{\text{ΔΒ}\cdot\text{ΒΓ}}\Leftrightarrow\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})}=\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΒ}}$.

β. Είναι $\text{ΔΒ}=\text{ΑΒ}-\text{ΑΔ}=5\text{ΑΔ}-\text{ΑΔ}=4\text{ΑΔ}$.

Οπότε $\dfrac{25}{(\text{ΔΒΓ})}=\dfrac{5\text{ΑΔ}}{4\text{ΑΔ}}\Leftrightarrow\dfrac{25}{(\text{ΔΒΓ})}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow(\text{ΔΒΓ})=\dfrac{25\cdot4}{5}\Leftrightarrow(\text{ΔΒΓ})=20$.

91 Θέμα 2 - 20667

α. $(\text{ΑΒΓ})=\dfrac{1}{2}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}=4\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}$.

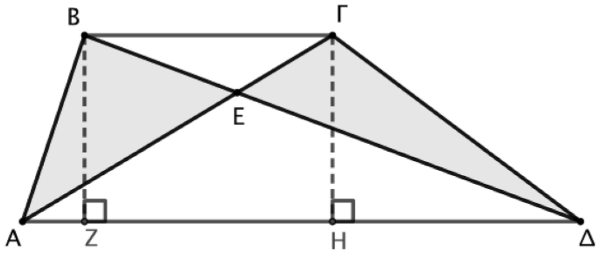
β. Έχουμε $\text{ΒΓ}=8$ και $\text{ΔΒ}=4$, οπότε $\text{ΓΔ}=\text{ΒΓ}+\text{ΔΒ}=8+4=12$ και $\text{ΓΕ}=\dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$, αφού το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $(\text{ΓΔΕ})=\dfrac{1}{2}\text{ΓΔ}\cdot\text{ΓΕ}\cdot\text{ημΓ}=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot\dfrac{\text{ΑΓ}}{2}\cdot\text{ημΓ}=3\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}$.

γ. Από τα ερωτήματα **α.** και **β.** προκύπτει $\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΓΔΕ})}=\dfrac{4\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}}{3\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΓ}}=\dfrac{4}{3}$.

Επειδή $(\text{ΓΔΕ})=12$ έχουμε $\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{12}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow(\text{ΑΒΓ})=16$.

92 Θέμα 2 - 22032



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν κοινή βάση ΑΔ. Επίσης, τα ύψη τους ΒΖ και ΓΗ είναι ίσα με το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Οπότε, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή:

$$(\text{ΑΒΔ})=(\text{ΑΓΔ})\quad(1)$$

β) Έχουμε ότι:

$$(\text{ΑΒΔ})=(\text{ΑΒΕ})+(\text{ΑΕΔ})\ \text{ και }\ (\text{ΑΓΔ})=(\text{ΑΕΔ})+(\text{ΔΓΕ})$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα (1) έχουμε:

$$(\text{ΑΒΕ})+(\text{ΑΕΔ})=(\text{ΑΕΔ})+(\text{ΔΓΕ})$$

Οπότε:

$$(\text{ΑΒΕ})=(\text{ΔΓΕ})$$

δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ισοδύναμα.

93 Θέμα 2 - 21189

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν:

ΑΓ είναι κοινή πλευρά, $\text{ΑΒ}=\text{ΓΔ}$ και $\text{ΒΓ}=\text{ΑΔ}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΓΔ})$.

Είναι $(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΒΓ)=2(ΑΒΓ)$.

Επομένως $(ΑΒΓ)=(ΑΓΔ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$.

β. Αφού τα $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, έχουμε $ΜΑ=ΜΒ=\frac{ΑΒ}{2}$ και $ΒΝ=ΝΓ=\frac{ΒΓ}{2}$.

Τα τρίγωνα $ΒΜΝ$ και $ΑΒΓ$ έχουν τη γωνία $\hat{Β}$ κοινή, οπότε

$$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΜΒ\cdot ΒΝ}{ΑΒ\cdot ΒΓ}=\frac{\frac{ΑΒ}{2}\cdot\frac{ΒΓ}{2}}{ΑΒ\cdot ΒΓ}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΓ}{4\cdot ΑΒ\cdot ΒΓ}=\frac{1}{4}\text{, δηλαδή }\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{4}.$$

γ. • Από το **β.** ερώτημα έχουμε

$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{4}$ ή $(ΒΜΝ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ)$

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$.

Άρα $(ΒΜΝ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{8}\cdot(ΑΒΓΔ)$.

94 Θέμα 2 - 22511

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συνΑ=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=7,$$

επομένως $ΒΓ=\sqrt{7}$.

β) Έχουμε $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημΑ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

γ) Έχουμε $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot α\cdot υ_α$, άρα $υ_α=\frac{2(ΑΒΓ)}{α}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

95 Θέμα 2 - 16770

α. Τα τρίγωνα $ΟΕΒ$ και $ΟΔΑ$ έχουν $Ε\hat{Ο}Β=Δ\hat{Ο}Α$, επειδή η $ΟΑ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Ο}Δ$ και $\hat{Ε}=\hat{Δ}=70^o$. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια.

β. Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Επομένως, θα είναι: $\frac{ΟΒ}{ΟΑ}=\frac{ΕΒ}{ΑΔ}=\frac{ΟΕ}{ΟΔ}=\frac{3}{2}$.

γ. Τα τρίγωνα $ΟΕΒ$ και $ΟΔΑ$ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{(ΟΕΒ)}{(ΟΔΑ)}=\left(\frac{ΟΒ}{ΟΑ}\right)^2\Leftrightarrow\frac{(ΟΕΒ)}{28}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{(ΟΕΒ)}{28}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4(ΟΕΒ)=28\cdot 9\Leftrightarrow(ΟΕΒ)=7\cdot 9\Leftrightarrow(ΟΕΒ)=63$$

96 Θέμα 2 - 16806

α. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΔΕΒ$ έχουν τις γωνίες τους $\hat{Δ}_1$ και $\hat{Δ}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΔΕΓ$ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\hat{Ε}_1$ και $\hat{Ε}_2$.

Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΔΕ}{ΔΒ\cdot ΔΕ}=\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ και $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΓ)}=\frac{ΑΕ\cdot ΔΕ}{ΕΓ\cdot ΔΕ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

β. Το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $\text{B}\Gamma$ του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\text{A}\Delta}{\Delta\text{B}} = \frac{\text{AE}}{\text{E}\Gamma}$.

Επομένως από το **α.** ερώτημα θα ισχύει ότι $\frac{(\text{A}\Delta\text{E})}{(\Delta\text{EB})} = \frac{(\text{A}\Delta\text{E})}{(\Delta\text{E}\Gamma)} \Leftrightarrow (\Delta\text{EB}) = (\Delta\text{E}\Gamma)$.

97 Θέμα 2 - 18101

α. Το τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\text{A}\Gamma = \text{B}\Gamma$, οπότε $\hat{\text{B}} = \text{B}\hat{\text{A}}\Gamma$.

β. Τα τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και $\text{B}\Delta\text{A}$ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $\text{B}\hat{\text{A}}\Gamma = \hat{\text{B}}$ (η γωνία $\text{B}\hat{\text{A}}\Gamma$ είναι προσκείμενη στη βάση AB του ισοσκελούς $\text{AB}\Gamma$ και η γωνία $\hat{\text{B}}$ είναι προσκείμενη στη βάση $\text{B}\Delta$ του ισοσκελούς $\text{AB}\Delta$). Επομένως, τα τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και $\text{AB}\Delta$ είναι όμοια.

γ. Αφού τα τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και $\text{AB}\Delta$ είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\frac{\text{B}\Gamma}{\text{A}\Delta} = \frac{3}{2}$.

Επομένως, $\frac{(\text{AB}\Gamma)}{(\text{B}\Delta\text{A})} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

98 Θέμα 2 - 18561

Είναι $\alpha = \text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta = \alpha$, $\gamma = \text{AB}$, $\text{BE} = \gamma$.

α. Τα τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ και $\text{B}\Delta\text{E}$ έχουν $\hat{\text{B}} + \hat{\text{B}}_{\varepsilon\xi.} = 180^\circ$, άρα $\frac{(\text{AB}\Gamma)}{(\text{B}\Delta\text{E})} = \frac{\text{BA}\cdot\text{B}\Gamma}{\text{BE}\cdot\text{B}\Delta} = \frac{\gamma\cdot\alpha}{\gamma\cdot 2\alpha} = \frac{1}{2}$,

οπότε $(\text{B}\Delta\text{E}) = 2\cdot(\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow (\text{B}\Delta\text{E}) = 50\,\text{m}^2$.

β. Στο τρίγωνο $\text{AB}\Delta$ το τμήμα $\text{A}\Gamma$ είναι διάμεσος, οπότε $(\text{A}\Gamma\Delta) = (\text{AB}\Gamma)$.

Η διαγώνιος $\text{A}\Delta$ χωρίζει το παραλληλόγραμμο $\text{AZ}\Delta\text{E}$ σε δύο ίσα τρίγωνα τα $\text{AZ}\Delta$ και $\text{AE}\Delta$, οπότε $(\text{A}\Delta\text{Z}) = (\text{AE}\Delta)$.

Επομένως $(\text{AZ}\Delta) = (\text{AE}\Delta) = (\text{AB}\Gamma) + (\text{A}\Gamma\Delta) + (\text{B}\Delta\text{E}) = 4(\text{AB}\Gamma)$.

99 Θέμα 4 - 21194

α. Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$, επομένως $(\text{AMB}) = (\text{AM}\Gamma)$.

β. • Στο τρίγωνο AMB το E είναι το μέσο της AM και $\text{E}\Delta // \text{AB}$, οπότε το Δ είναι το μέσο της BM, άρα $\text{M}\Delta = \frac{1}{2}\cdot\text{BM}$ και $\text{ME} = \frac{1}{2}\cdot\text{AM}$.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $(\text{AMB}) = (\text{AM}\Gamma)$, οπότε $(\text{AMB}) = \frac{1}{2}\cdot(\text{AB}\Gamma)$.

Τα τρίγωνα $\text{ME}\Delta$ και AMB έχουν την γωνία $\text{A}\hat{\text{M}}\text{B}$ κοινή, οπότε

$$\frac{(\text{ME}\Delta)}{(\text{AMB})} = \frac{\text{ME}\cdot\text{M}\Delta}{\text{AM}\cdot\text{BM}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\text{AM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{BM}}{\text{AM}\cdot\text{BM}} = \frac{1}{4}.$$

Άρα $(\text{ME}\Delta) = \frac{1}{4}\cdot(\text{AMB}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{8}\cdot(\text{AB}\Gamma)$.

γ. • Είναι $\text{BM} = \text{M}\Gamma$, αφού AM διάμεσος στο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$.

• Στο τρίγωνο $\text{AM}\Gamma$ το E είναι το μέσο της AM και $\text{EZ} // \text{A}\Gamma$, οπότε το Z είναι το μέσο του $\text{M}\Gamma$.

Είναι $\Delta\text{M} = \frac{1}{2}\cdot\text{BM} = \frac{1}{2}\cdot\text{M}\Gamma = \text{MZ}$, οπότε η EM είναι διάμεσος του τριγώνου $\text{E}\Delta\text{Z}$, άρα $(\text{ME}\Delta) = (\text{MEZ})$.

Από το **α.** ερώτημα είναι $(\text{AMB}) = (\text{AM}\Gamma) \Leftrightarrow (\text{AB}\Delta\text{E}) + (\text{ME}\Delta) = (\text{A}\Gamma\text{ZE}) + (\text{MEZ}) \Leftrightarrow (\text{AB}\Gamma\Delta) = (\text{A}\Gamma\text{ZE})$.

100 Θέμα 4 - 16732

α. Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ έχουν $\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^{\circ}$ και κοινή τη γωνία $\hat{K}$, άρα είναι όμοια.

β. Είναι $MB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\Delta\Gamma$.

Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{MB}{\Delta\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$.

Οπότε $\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)}=\lambda^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Άρα $(MKB)=\frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

γ. • Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν

$AM=MB$, $\Delta\hat{A}M=M\hat{B}K=90^{\circ}$ και $A\hat{M}\Delta=B\hat{M}K$, ως κατακορυφήν

Άρα $(AM\Delta)=(MKB)$, (1).

• $(\Delta K\Gamma)=(MB\Gamma\Delta)+(MKB)=(MB\Gamma\Delta)+(AM\Delta)\overset{(1)}{=}(AB\Gamma\Delta)$, (2)

Άρα $(MB\Gamma\Delta)=(\Delta K\Gamma)-(MKB)\overset{\beta.}{=}(\Delta K\Gamma)-\frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)=\frac{3}{4}(\Delta K\Gamma)\overset{(2)}{=}\frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

δ. Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Είναι $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$ και $(MB\Gamma\Delta)=75$.

Από το ερώτημα **γ.** έχουμε $75=\frac{3}{4}\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=\frac{4}{3}\cdot 75 \Leftrightarrow \alpha^2=100$.

Άρα $\alpha=\sqrt{100}=10\,m$.

101 Θέμα 4 - 22369

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB=8$, $B\Gamma=7$ και $\hat{A}=60^{\circ}$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2-2AB\cdot A\Gamma\cdot \text{συν}\,A$

$7^2=8^2+A\Gamma^2-2\cdot 8\cdot A\Gamma\cdot \text{συν}\,60^{\circ}$

$49=64+A\Gamma^2-16\cdot A\Gamma\cdot\frac{1}{2}$

$A\Gamma^2-8\cdot A\Gamma+15=0$

$A\Gamma=3$ ή $A\Gamma=5$.

β) i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB=8$, $B\Gamma=7$ και $A\Gamma=3$ ή $A\Gamma=5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $AB=8$, οπότε $AB^2=8^2=64$.

Αν $A\Gamma=3$ θα είναι $A\Gamma^2+B\Gamma^2=3^2+7^2=9+49=58$, οπότε

$AB^2>A\Gamma^2+B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma}>90^{\circ}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $A\Gamma=5$ θα είναι $A\Gamma^2+B\Gamma^2=5^2+7^2=25+49=74$, οπότε

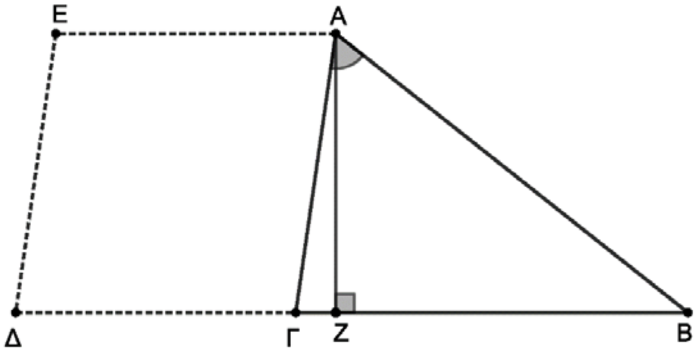
$AB^2<A\Gamma^2+B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma}<90^{\circ}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $A\Gamma=5$.

ii) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB=8$, $A\Gamma=5$ και $\hat{A}=60^{\circ}$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot A\Gamma\cdot AB\cdot \text{ημ}\,A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \text{ημ}\,60^{\circ}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ από την κορυφή A. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου $\mathrm{A\Gamma\Delta E}$ με αντίστοιχη βάση την $\Gamma\Delta$. Είναι $\Gamma\Delta = \mathrm{A}\Gamma = 5$ επειδή το $\mathrm{A\Gamma\Delta E}$ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AZ}$ και $\mathrm{B\Gamma} = 7$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AZ} = 10\sqrt{3}$$

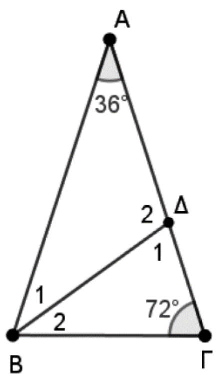
$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\mathrm{AZ} = 10\sqrt{3}$$

$$\mathrm{AZ} = \frac{20\sqrt{3}}{7} .$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E}) = \Gamma\Delta\cdot\mathrm{AZ} = 5\cdot\frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7} .$$

102 Θέμα 4 - 18369



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$. Όμως $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$,

άρα $36^\circ + 2\widehat{\mathrm{B}} = 180^\circ$ και τελικά $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, οπότε $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_2 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ (1).

$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}_1 = 36^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ (2).

$\widehat{\Delta}_1 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$, σαν εξωτερική γωνία του ΑΒΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ (3).

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν:

$\widehat{\Gamma}$ κοινή γωνία,

$\widehat{A}=\widehat{B}_2=\dfrac{\widehat{B}}{2}=36^{\circ}$, από (1).

Επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}$	$\widehat{B}_2=\widehat{A}$	$\widehat{\Delta}_1=\widehat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

Επομένως οι λόγοι θα είναι $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{AB}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες $\widehat{\Delta}_1,\widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή $\dfrac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)}=\dfrac{A\Delta\cdot B\Delta}{\Delta\Gamma\cdot B\Delta}=\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Όμως $\dfrac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)}=3$, οπότε $\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=3$ ή ΑΔ = 3ΔΓ. Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

103 Θέμα 4 - 22243

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$BZ^2=AB^2+AZ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AZ=\frac{3}{4}AB$, οπότε

$$BZ^2=AB^2+\left(\frac{3}{4}AB\right)^2 \text{ ή } BZ^2=\frac{25}{16}AB^2 \text{ ή } BZ=\frac{5}{4}AB.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $A\Delta=B\Gamma=AB$.

Επιπλέον,

$$\Delta Z=A\Delta-AZ=AB-\frac{3}{4}AB=\frac{1}{4}AB.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$BE^2=B\Gamma^2+\Gamma E^2 \text{ ή } BE^2=AB^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \text{ ή } BE^2=\frac{5}{4}AB^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$ZE^2=\Delta Z^2+\Delta E^2 \text{ ή } ZE^2=\left(\frac{1}{4}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \text{ ή } ZE^2=\frac{5}{16}AB^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2 + \mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2 + \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2 = \frac{25}{16}\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BZ}^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B\hat{E}Z} = 90^o$.

γ) Είναι $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5}{4}}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5}{16}}\mathrm{AB}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν:

- $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}$ και
- $\mathrm{B\hat{E}Z} = \mathrm{B\hat{\Gamma}E} = 90^o$.

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(\mathrm{BEZ})}{(\mathrm{B\Gamma E})} = \left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

104 Θέμα 4 - 22407

α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ ($\hat{K} = 90°$), είναι $\mathrm{A\Gamma} = 15$ και $\mathrm{AK} = 9$,
οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε
$\Gamma K^2 = A\Gamma^2 - AK^2$ ή $\Gamma K^2 = 15^2 - 9^2$ ή $\Gamma K^2 = 144$ ή $\Gamma K^2 = 12^2$ ή $\Gamma K = 12$.
Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι
$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot \Gamma K$ ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12$ ή $(AB\Gamma) = 60$.

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα
$\dfrac{(A\Delta B)}{(A\Delta\Gamma)} = \dfrac{A\Delta \cdot AB}{A\Delta \cdot A\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$, άρα $(A\Delta B) = \frac{2}{3}(A\Delta\Gamma)$.
Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(AB\Gamma) = 60$ και επειδή $(A\Delta B) + (A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma)$,
έχουμε $\frac{2}{3}(A\Delta\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = 60$ ή $5(A\Delta\Gamma) = 180$ ή $(A\Delta\Gamma) = 36$.
Επίσης θα είναι $(A\Delta B) = \frac{2}{3}(A\Delta\Gamma)$ $(A\Delta B) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ , άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.
Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(AB\Gamma) = 60$ και $(A\Delta B) = 24$, επομένως έχουμε

$\frac{(\mathrm{A\Delta B})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\mathrm{K}}$ ή $\frac{24}{60} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\mathrm{K}}$ ή $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\mathrm{K}} = \frac{2}{5}$.

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$\frac{\Lambda\mathrm{B}}{\mathrm{KB}} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\mathrm{K}}$ ή $\frac{\Lambda\mathrm{B}}{\mathrm{KB}} = \frac{2}{5}$ ή $\frac{\Lambda\mathrm{B}}{\mathrm{KB}-\Lambda\mathrm{B}} = \frac{2}{5-2}$ ή $\frac{\Lambda\mathrm{B}}{\Lambda\mathrm{K}} = \frac{2}{3}$.

105 Θέμα 4 - 22406

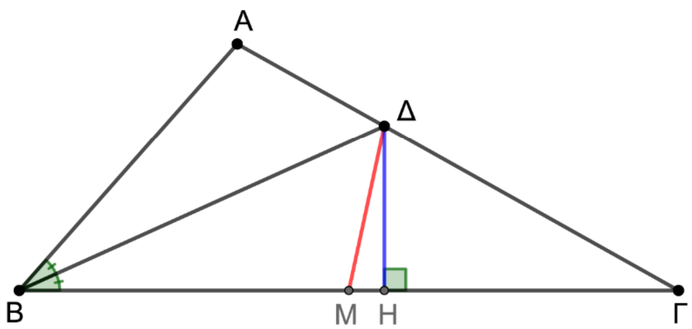
α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ, οι γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)}{(\mathrm{AB}\Delta)} = \frac{\mathrm{B}\Delta\cdot\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Delta\cdot\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BA}} = \frac{2\mathrm{BA}}{\mathrm{BA}} = 2$, άρα $(\Delta\mathrm{B}\Gamma) = 2(\mathrm{AB}\Delta)$.

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $\mathrm{MB} = \mathrm{M}\Gamma$ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως θα έχουμε

$(\Delta\mathrm{MB}) = (\Delta\mathrm{M}\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta\mathrm{B}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 2(\mathrm{AB}\Delta) = (\mathrm{AB}\Delta)$, άρα

$(\mathrm{AB}\Delta) = (\Delta\mathrm{MB}) = (\Delta\mathrm{M}\Gamma)$.



γ)

i. Είναι $\mathrm{AB} = 12$, $\mathrm{B}\Gamma = 2\mathrm{AB} = 2\cdot 12 = 24$ και $\eta\mu\,\mathrm{B} = \frac{3}{4}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B}\Gamma\cdot \mathrm{BA}\cdot \eta\mu\,\mathrm{B}$

ή $(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 12\cdot\frac{3}{4}$ ή $(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 12\cdot\frac{3}{4} = 108$ ή $(\mathrm{AB}\Gamma) = 108$.

ii. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $(\Delta\mathrm{B}\Gamma) = 2(\mathrm{AB}\Delta)$ και στο γ) i) $(\mathrm{AB}\Gamma) = 108$.

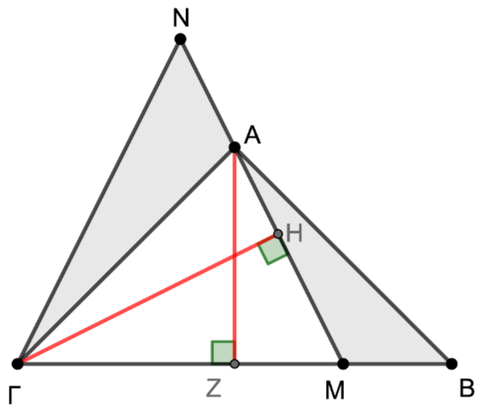
Όμως $(\Delta\mathrm{B}\Gamma) + (\mathrm{AB}\Delta) = (\mathrm{AB}\Gamma)$, άρα $2(\mathrm{AB}\Delta) + (\mathrm{AB}\Delta) = (\mathrm{AB}\Gamma)$ ή $3(\mathrm{AB}\Delta) = 108$

ή $(\mathrm{AB}\Delta) = 36$.

Επίσης θα είναι $(\Delta\mathrm{B}\Gamma) = 2\cdot 36 = 72$.

106 Θέμα 4 - 22404

α)



i. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Άρα $\frac{(\text{AMB})}{(\text{AMΓ})} = \frac{\text{MB}}{\text{MΓ}} = \frac{1}{3}$.

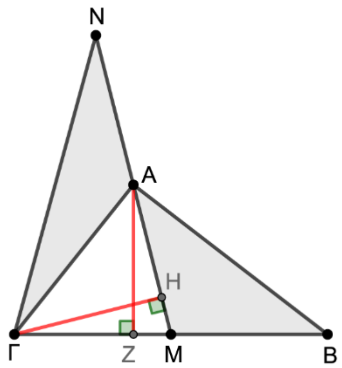
ii. Είναι $\frac{\text{NA}}{\text{NM}} = \frac{1}{4}$, άρα $\text{NM} = 4\text{NA}$ ή $\text{NA} + \text{AM} = 4\text{NA}$ ή $\text{AM} = 3\text{NA}$ ή $\frac{\text{NA}}{\text{AM}} = \frac{1}{3}$.

Εναλλακτικά: $\frac{\text{NA}}{\text{NM}} = \frac{1}{4}$ ή $\frac{\text{NA}}{\text{NM}-\text{NA}} = \frac{1}{4-1}$ ή $\frac{\text{NA}}{\text{AM}} = \frac{1}{3}$.

iii. Τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων. Άρα $\frac{(\text{ANΓ})}{(\text{AMΓ})} = \frac{\text{NA}}{\text{AM}} = \frac{1}{3}$.

Επίσης από το α) i) είναι $\frac{(\text{AMB})}{(\text{AMΓ})} = \frac{1}{3}$, οπότε $\frac{(\text{AMB})}{(\text{AMΓ})} = \frac{(\text{ANΓ})}{(\text{AMΓ})}$ ή $(\text{AMB}) = (\text{ANΓ})$.

β) Είναι $\frac{\text{MB}}{\text{MΓ}} = 1$, άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $(\text{AMB}) = (\text{AMΓ})$, αφού έχουν ίσες βάσεις $\text{MB} = \text{MΓ}$ και το ίδιο ύψος ΑΖ. Όμως δίνεται $(\text{AMB}) = (\text{ANΓ})$, άρα $(\text{AMΓ}) = (\text{ANΓ})$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $\text{NA} = \text{AM}$. Επομένως το Α είναι το μέσο του ΝΜ άρα $\frac{\text{NA}}{\text{NM}} = \frac{1}{2}$.



107 Θέμα 4 - 22375

α) i) Δίνεται $\text{ΛA} = 2\text{ΛK}$.

Στα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΚ, οι γωνίες $\text{A}\widehat{\text{Λ}}\text{Γ}$ και $\text{Γ}\widehat{\text{Λ}}\text{K}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2$ ή $\frac{E_1}{E_2} = 2$ (1) .

Στα τρίγωνα ΑΛΒ και ΒΛΚ, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Β$ και $Β\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{E_4}{E_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2$ ή $\frac{E_4}{E_3} = 2$ (2) .

ii) Δίνεται $ΚΒ = 2ΚΓ$.

Στα τρίγωνα ΒΛΚ και ΓΛΚ οι γωνίες $Λ\widehat{Κ}Β$ και $Λ\widehat{Κ}Γ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2$ ή $\frac{E_3}{E_2} = 2$ (3) .

Από τις (1) και (3) έχουμε

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2}$, οπότε $E_1 = E_3$ (4) .

β) Δίνεται $E_1 = 10$.

Από την (1) έχουμε

$\frac{E_1}{E_2} = 2$ ή $\frac{10}{E_2} = 2$ ή $E_2 = 5$.

Από την (4) έχουμε

$E_3 = E_1$ ή $E_3 = 10$.

Από την (2) έχουμε

$\frac{E_4}{E_3} = 2$ ή $\frac{E_4}{10} = 2$ ή $E_4 = 20$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(ΑΒΓ) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ ή $(ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$

108 Θέμα 4 - 22340

α) i)Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΚΔ έχουν την $Κ\widehat{Α}Δ$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$\frac{(ΑΟΔ)}{(ΑΚΔ)} = \frac{ΑΟ \cdot ΑΔ}{ΑΚ \cdot ΑΔ} = \frac{ΑΟ}{ΑΚ} = \frac{3}{4}$, άρα $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΚΕ έχουν την $Κ\widehat{Α}Ε$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$\frac{(ΑΟΕ)}{(ΑΚΕ)} = \frac{ΑΟ \cdot ΑΕ}{ΑΚ \cdot ΑΕ} = \frac{ΑΟ}{ΑΚ} = \frac{3}{4}$, άρα $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$.

iii) Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$ και $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$,

επομένως θα έχουμε

$(ΑΔΕ) = (ΑΟΔ) + (ΑΟΕ)$

$= \frac{3}{4}(ΑΚΔ) + \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$

$= \frac{3}{4}[(ΑΚΔ) + (ΑΚΕ)]$

$= \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ).$

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΕ περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το εμβαδόν του ΑΔΚΕ είναι μικρότερο του εμβαδού του ΑΒΓ.

Άρα

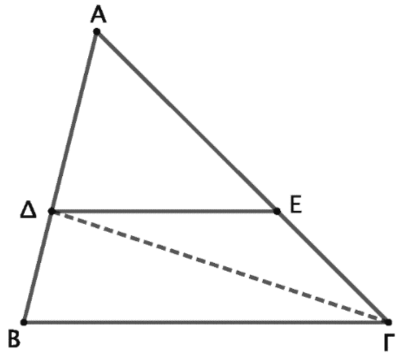
$(ΑΔΚΕ) < (ΑΒΓ)$

$\frac{3}{4}(ΑΔΚΕ) < \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$

$(ΑΔΕ) < \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$, από (α.iii)

Επομένως δεν ισχύει $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

109 Θέμα 4 - 22023



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{Β} = Α\hat{Δ}Ε$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{Α}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Α} = \hat{Α}$	$Α\hat{Ε}Δ = \hat{Γ}$	$Α\hat{Δ}Ε = \hat{Β}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{2ΑΔ} = \frac{1}{2}$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι

$$\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$$

Είναι:

$$(ΔΕΓ) = (ΔΑΓ) - (ΑΔΕ) \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(ΔΑΓ) - (ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(ΔΑΓ)}{(ΑΒΓ)} - \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$$

Από (β) ερώτημα είναι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2$, οπότε:

$$\frac{\lambda ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad ή \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3} \quad ή \quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$$

110 Θέμα 4 - 22150

α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $ΑΓ = 2ΓΕ$ ή $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

Ομοίως το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η $\hat{Γ}$ είναι κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως:

$$\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΕΔΓ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς με εκείνους του α)i προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, εφόσον:

- Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.
- Το Δ είναι μέσο της ΒΓ.
- Η περιεχόμενη γωνία $\hat{Β}$ των ΒΖ, ΒΔ και ΑΒ, ΒΓ είναι κοινή.

Επομένως για το εμβαδόν (ΖΒΔ) του τριγώνου ΖΒΔ ισχύει ότι $(ΖΒΔ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΕΔΓ)$.

Επίσης για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \text{ ή } (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Ή αλλιώς:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\hat{Α}_1 = Δ\hat{Α}Ε$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Α}_1$. Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$, εφόσον το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $(ΑΔΕ) = \frac{(ΑΔΓ)}{2}$.

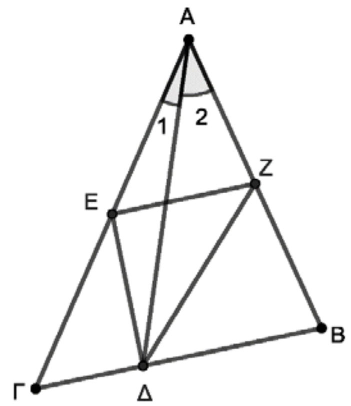
(Εναλλακτικά: Η διάμεσος ΔΕ της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΔΕΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΓ).

Με όμοιους συλλογισμούς για τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΒ έχουμε $(\text{ΑΔΖ}) = \dfrac{(\text{ΑΔΒ})}{2}$.

Όμως για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(\text{ΑΕΔΖ}) = (\text{ΑΔΕ}) + (\text{ΑΔΖ}) \quad \text{ή} \quad (\text{ΑΕΔΖ}) = \frac{(\text{ΑΔΓ})}{2} + \frac{(\text{ΑΔΒ})}{2} = \frac{(\text{ΑΔΓ}) + (\text{ΑΔΒ})}{2} = \frac{(\text{ΑΒΓ})}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



111 Θέμα 4 - 22141

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΔΕ}}$$

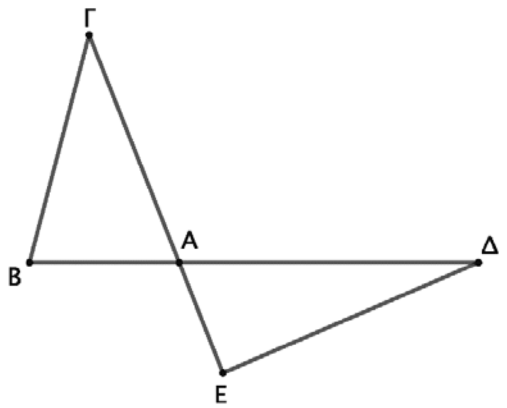
Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ, τότε:

$$\lambda^2 = \frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})} \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ημ}\varphi$ ή

$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{ημ}\varphi$ ή $(\text{ΑΒΓ}) = 10\text{ημ}\varphi$.

112 Θέμα 4 - 18302



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $Δ\hat{A}E = B\hat{A}Γ$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{2ΑΒ \cdot \frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Επομένως, (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ), δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $ΑΔ = μ \cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = ν \cdot ΑΓ$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{μ \cdot ΑΒ \cdot ν \cdot ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = μ \cdot ν$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει $μ \cdot ν = 1$. Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $Δ\hat{A}E = B\hat{A}Γ$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως, θα πρέπει:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΕ} \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΕ} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ} \quad (2)$$

Δίνεται ότι:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad ΑΔ = 2ΑΒ$$

Η (1) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2} = \frac{2ΑΒ}{ΑΕ} \quad \text{ή} \quad ΑΕ = \frac{4}{3}ΑΒ$$

Η (2) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2} = \frac{ΑΕ}{2ΑΒ} \quad \text{ή} \quad ΑΕ = 3ΑΒ$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια όταν $ΑΕ = \frac{4}{3}ΑΒ$ ή $ΑΕ = 3ΑΒ$.

113 Θέμα 4 - 22148

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{3ΑΕ} = \frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες $\hat{Α}_1$ και $\hat{Α}_2$, των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΖ} \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)} = \frac{ΑΕ}{ΑΖ} \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)} = 1 \text{, γιατί ΑΕ = ΑΖ}$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ) = (ΑΔΕ) + (ΑΔΖ) = 2(ΑΔΕ)$.

Επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω $\lambda = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ) = (ΑΔΕ) + (ΑΔΖ) = 2(ΑΔΕ)$, όπως στο α)ii).

Άρα:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2\lambda^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{2} \text{ ή } 2\lambda^2 = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

114 Θέμα 4 - 16582

α. i. Εφόσον $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση.

Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\frac{1}{2}$. Άρα $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Άρα το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

- Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Η}$, επομένως

$\frac{(\text{ΑΗΔ})}{(\text{ΑΗΒ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΗ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{2}$, οπότε $(\text{ΑΗΔ})=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΒ})$

- Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία την $\text{Η}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$.

Βρίσκουμε $(\text{ΑΗΕ})=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΓ})$.

Επομένως $(\text{ΑΔΗΕ})=(\text{ΑΗΔ})+(\text{ΑΗΕ})=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΒ})+\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΓ})=\frac{1}{2}\cdot[(\text{ΑΗΒ})+(\text{ΑΗΓ})]=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ})$.

β. Αν είναι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\lambda$, τότε $0<\lambda<1$, αφού $\text{ΑΔ}<\text{ΑΒ}$.

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

- Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Η}$, οπότε,

$\frac{(\text{ΑΗΔ})}{(\text{ΑΗΒ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΗ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\lambda$, άρα $(\text{ΑΗΔ})=\lambda\cdot(\text{ΑΗΒ})$

- Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία την $\text{Η}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$, οπότε

$\frac{(\text{ΑΗΕ})}{(\text{ΑΗΓ})}=\frac{\text{ΑΕ}\cdot\text{ΑΗ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\lambda$, άρα $(\text{ΑΗΕ})=\lambda\cdot(\text{ΑΗΓ})$.

Επομένως $(\text{ΑΔΗΕ})=(\text{ΑΗΔ})+(\text{ΑΗΕ})=\lambda\cdot(\text{ΑΗΒ})+\lambda\cdot(\text{ΑΗΓ})=\lambda\cdot[(\text{ΑΗΒ})+(\text{ΑΗΓ})]=\lambda\cdot(\text{ΑΒΓ})$.

115 Θέμα 4 - 17907

α. Είναι:
- $\text{ΒΓ}^2=\text{Ε}_2=5\text{Ε}$
- $\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{Ε}_1+\text{Ε}=4\text{Ε}+\text{Ε}=5\text{Ε}$

Οπότε $\text{ΒΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά α, άρα ορθή γωνία την Α.

β. Είναι $\text{ΒΓ}=\alpha$, $\text{ΓΑ}=\beta$, $\text{ΑΒ}=\gamma$.

- Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β και γ, άρα $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$.

- Το τρίγωνο ΑΙΖ, είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β, γ, άρα $(\text{ΑΙΖ})=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$

Άρα $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΙΖ})$.

Είναι: $\text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Δ}+\text{Δ}\hat{\text{Β}}\text{Γ}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Η}=360^\circ \Leftrightarrow \text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Δ}+90^\circ+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}+90^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Δ}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}=180^\circ$

Άρα $\frac{(\text{ΒΗΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΒΗ}\cdot\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΒΑ}}=\frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha\cdot\gamma}=1$, οπότε $\frac{(\text{ΒΗΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=1\Leftrightarrow(\text{ΒΗΔ})=(\text{ΑΒΓ})$.

- Βρίσκουμε $\Theta\hat{\text{Γ}}\text{Ρ}=\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β}=180^\circ$.

Άρα $\frac{(\text{ΓΡΘ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΓΡ}\cdot\text{ΓΘ}}{\text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΒ}}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha}=1$, οπότε $\frac{(\text{ΓΡΘ})}{(\text{ΑΒΓ})}=1\Leftrightarrow(\text{ΓΡΘ})=(\text{ΑΒΓ})$.

Από τα παραπάνω προκύπτει: $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΙΖ})=(\text{ΒΗΔ})=(\text{ΓΡΘ})$.

γ. Είναι $ΑΓ = 1 \Leftrightarrow β = 1$, οπότε $(α^2 = 5β^2$ και $γ^2 = 4β^2) \Leftrightarrow (α^2 = 5$ και $γ^2 = 4) \Leftrightarrow (α = \sqrt{5}$ και $γ = 2)$.
Είναι:

- $(ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot β \cdot γ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.
- $Ε = β^2$, $Ε_1 = γ^2$ και $Ε_2 = α^2$, οπότε $Ε = 1$, $Ε_1 = 4$ και $Ε_2 = 5$.

Άρα $(ΖΗΔΡΘΙ) = Ε + Ε_1 + Ε_2 + (ΑΙΖ) + (ΒΗΔ) + (ΓΡΘ) + (ΑΒΓ) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$.

116 Θέμα 4 - 17956

α. Στο τρίγωνο $ΒΕΔ$, η $ΕΚ$ είναι διάμεσος, οπότε $(ΒΕΚ) = (ΕΚΔ)$, άρα $(ΕΚΔ) = \frac{(ΒΕΔ)}{2}$.

β. Το $ΑΕΔΖ$ είναι παραλληλόγραμμο $(ΔΖ // ΑΕ$ και $ΔΕ // ΑΖ)$ και η διαγώνιος $ΕΖ$ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή $(ΕΖΔ) = (ΑΕΖ)$, άρα $(ΕΖΔ) = \frac{(ΑΕΔΖ)}{2}$.

γ. Στο τρίγωνο $ΔΖΛ$, η $ΖΛ$ είναι διάμεσος, οπότε $(ΔΖΛ) = (ΓΖΛ)$, άρα $(ΔΖΛ) = \frac{(ΔΖΓ)}{2}$.

Είναι $(ΚΕΖΛ) = (ΕΚΔ) + (ΕΖΔ) + (ΔΖΛ) = \frac{(ΒΕΔ)}{2} + \frac{(ΑΕΔΖ)}{2} + \frac{(ΔΖΓ)}{2} = \frac{(ΑΒΓ)}{2}$

Επομένως, το εμβαδόν του $ΚΕΖΛ$ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου $Δ$ πάνω στη $ΒΓ$.

117 Θέμα 4 - 16114

α. i. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ έχουν την γωνία $\hat{Α}$ κοινή και $ΓΕ = \frac{1}{4}ΑΓ$, οπότε $ΑΕ = \frac{3}{4}ΑΓ$. Άρα

$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, οπότε $(ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ)$.

ii. Τα $ΕΖ$ και $ΓΗ$ είναι ύψη των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ αντίστοιχα.

Οπότε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{2}ΑΔ \cdot ΕΖ}{\frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΓΗ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΕΖ}{ΓΗ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ΕΖ}{ΓΗ}$.

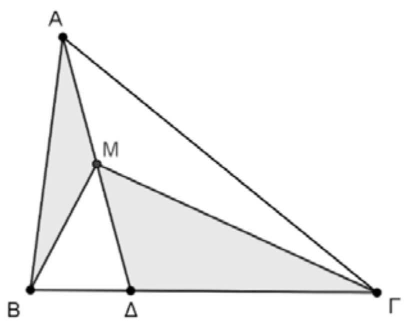
Έχουμε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{ΕΖ}{ΓΗ} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{ΕΖ}{ΓΗ} = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ΕΖ}{ΓΗ} = \frac{3}{4}$.

β. Είναι $(ΑΒΓ) = 2(ΑΔΕ) \Leftrightarrow \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$ και επειδή ο λόγος $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{3}{4}$ παραμένει σταθερός θα έχουμε

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$$

118 Θέμα 4 - 22104

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσο του τμήματος ΑΔ.



α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΒΜ) = (ΜΒΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ), δηλαδή (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΜΓΔ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΓΜ) = (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ), δηλαδή (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ) (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε ότι:

$$(ΑΒΜ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ) + \frac{1}{2}(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}[(ΑΒΔ) + (ΑΓΔ)] = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$$

β) Αν είναι (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) , τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

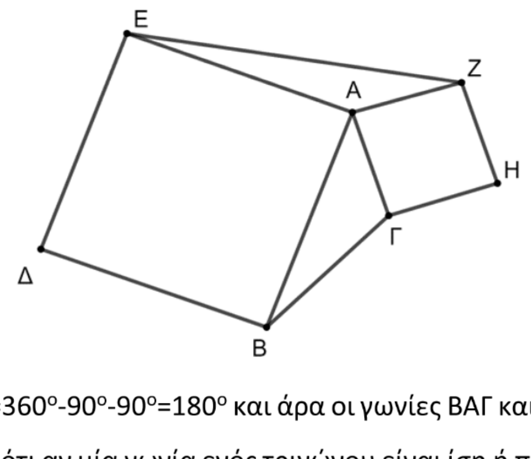
$$\frac{1}{2}(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ) \text{ ή } (ΑΒΔ) = (ΑΓΔ)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή Α στον φορέα των βάσεων τους ΒΔ και ΔΓ. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ). Όμοια (ΜΔΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ).

$$\text{Δηλαδή } (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$$

119 Θέμα 4 - 21839



α) Είναι $\widehat{ΒΑΓ}+\widehat{ΕΑΖ}=360^o-90^o-90^o=180^o$ και άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΕΑΖ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΕ \cdot ΑΖ} = 1$ οπότε (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ).

β)

i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ) και από υπόθεση είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54.
Είναι (ΑΒΓ)+(ΑΒΔΕ)+(ΑΕΖ)+(ΑΓΗΖ)=(ΕΖΗΓΒΔ) ή (ΑΒΓ)+36+(ΑΒΓ)+9=54 ή 2·(ΑΒΓ)=9
ή $(ΑΒΓ)=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημ\widehat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot ημ\widehat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $ημ\widehat{Α}=\frac{1}{2}$ και εφόσον η γωνία $\widehat{Α}$ είναι οξεία, έχουμε ότι $\widehat{Α}=30^o$.

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συν30^o=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=45-18\sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $Ε=ΒΓ^2=45-18\sqrt{3}$.

120 Θέμα 4 - 18301

α. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $Δ\hat{Α}Ε=Β\hat{Α}Γ$ (ως κατακορυφήν), οπότε

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{\frac{1}{2}ΑΒ\cdot\frac{2}{5}ΑΓ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

β. Όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{\frac{1}{λ}ΑΒ\cdot\frac{λ}{μ}ΑΓ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{1}{λ}\cdot\frac{λ}{μ}=\frac{1}{μ}$.

Άρα ο λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ. Αφού $(ΑΔΕ)=(ΑΒΓ)$, έχουμε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{μ}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{μ}\Leftrightarrow μ=1$.

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά για $μ=1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα **β.** .

Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι $(ΑΔΕ)=(ΑΒΓ)$. Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $\{(λ, 1), λ\in\mathbb{N}^*\}$.

Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

121 Θέμα 4 - 18371

α. i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\hat{Γ}=\hat{Δ}$.

Επομένως $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΔΕ\cdot ΔΓ}{ΑΓ\cdot ΒΓ}=\frac{ΔΕ\cdot ΔΓ}{2ΔΓ\cdot ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{2ΒΓ}$ (1), αφού $ΑΓ=2ΔΓ$.

ii. • Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $ΔΕ=ΒΓ$. Οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΔΕ}{2ΒΓ}=\frac{ΒΓ}{2ΒΓ}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

• Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΔ είναι διάμεσος, οπότε $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{2}$ (3)

Από (2) και (3) προκύπτει ότι $(ΔΕΓ)=(ΑΒΔ)$.

β. Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι $\hat{Δ}$ και $\hat{Α}$.

122 Θέμα 4 - 22380

α) i) Το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα

$\mathrm{AK} = \mathrm{B\Gamma} = 16.$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ $\left(\mathrm{A\widehat{K}\Delta} = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{K\Delta}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 - \mathrm{AK}^2$

$\mathrm{K\Delta}^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$

$\mathrm{K\Delta} = 12.$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι

$(\mathrm{AK\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{K\Delta}\cdot\mathrm{AK} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16 = 96.$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι ορθογώνια $\left(\mathrm{A\widehat{K}\Delta} = \mathrm{B\widehat{\Lambda}A} = 90°\right)$ και έχουν

$\widehat{\Delta} = \mathrm{\Lambda\widehat{A}B}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΛΔ . Άρα τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι

$\lambda = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{BA}}$ ή $\lambda = \frac{20}{10}$ ή $\lambda = 2$,

αφού $\mathrm{BA} = \mathrm{K\Gamma}$ από το ορθογώνιο ΑΒΓΚ και $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{\Gamma\Delta} - \mathrm{K\Delta} = 22 - 12 = 10.$

Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

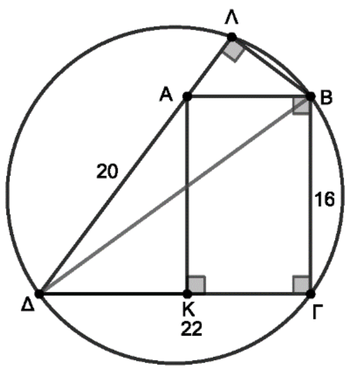
$$\frac{(\mathrm{AK\Delta})}{(\mathrm{B\Lambda A})} = \lambda^2$$

$$\frac{96}{(\mathrm{B\Lambda A})} = 2^2$$

$$(\mathrm{B\Lambda A}) = \frac{96}{4}$$

$$(\mathrm{B\Lambda A}) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη ΒΔ , η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\mathrm{B\widehat{\Gamma}\Delta} = 90°$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ $\left(\mathrm{B\widehat{\Gamma}\Delta} = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma\Delta}^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4\cdot 185$

$\mathrm{B\Delta} = 2\sqrt{185}$.

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

123 Θέμα 4 - 20678

α) Αφού το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, θα είναι $(\text{ΑΒΓΔ}) = 2(\text{Α'Β'Γ'Δ'})$ ή

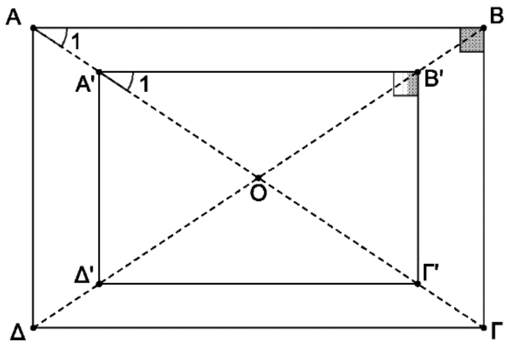
$$\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{Α'Β'Γ'Δ'})} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ', τότε

$$\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{Α'Β'Γ'Δ'})} = \lambda^2.$$

Άρα $\lambda^2 = 2$ ή $\lambda = \sqrt{2}$.

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\widehat{\text{Α}}_1 = \widehat{\text{Α}}'_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α'Β' που τέμνονται από την ΑΓ και $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Β}'} = 90^o$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $\lambda = \sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α'Β'}} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουμε ότι $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α'Β'}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{Α'Γ'}}$.

Επομένως $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{Α'Γ'}} = \sqrt{2}$.

Όμως $\text{ΑΓ} = 40$, άρα $\frac{40}{\text{Α'Γ'}} = \sqrt{2}$ ή $\text{Α'Γ'} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' έχουν το ίδιο μήκος και διχοτομούνται. Επομένως

$$\text{ΟΑ'} = \text{ΟΒ'} = \text{ΟΓ'} = \text{ΟΔ'} = \frac{\text{Α'Γ'}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Είναι $Α'\hat{O}Β' = Γ'\hat{O}Δ' = 120^o$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Β' και ΟΓ'Δ' ισχύει

$$(ΟΑ'Β') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΒ' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΓ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΓ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Είναι $Α'\hat{O}Δ' = Β'\hat{O}Γ' = 60^o$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $Α'\hat{O}Β' = 120^o$. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Δ' και ΟΒ'Γ' ισχύει

$$(ΟΑ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΒ'Γ') = \frac{1}{2}ΟΒ' \cdot ΟΓ' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(Α'Β'Γ'Δ') = (ΟΑ'Β') + (ΟΓ'Δ') + (ΟΑ'Δ') + (ΟΒ'Γ') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

<u>2η λύση για το ερώτημα γ)ii.</u>

Το τρίγωνο ΟΑ΄Δ΄ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ΄ = ΟΔ' ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και $Α'\hat{O}Δ' = 60^o$. Άρα $Ο\hat{Α'}Δ' = 60^o$. Όμως η γωνία $Β'\hat{Α'}Δ'$ είναι ορθή, επομένως $Ο\hat{Α'}Β' = 90^o - 60^o = 30^o$.

Η γωνία $Ο\hat{Α'}Β'$ του ορθογωνίου τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ ισούται με 30^o, οπότε η απέναντι πλευρά Β΄Γ΄ είναι το μισό της υποτείνουσας Α΄Γ΄, δηλαδή $Β'Γ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{Α'Γ'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ έχουμε ότι

$$Α'Β'^2 = Α'Γ'^2 - Β'Γ'^2.$$

Όμως $Α'Γ' = 20\sqrt{2}$ και $Β'Γ' = 10\sqrt{2}$, οπότε

$$Α'Β'^2 = (20\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^2 \text{ ή } Α'Β'^2 = 600 \text{ ή } Α'Β' = 10\sqrt{6}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(Α'Β'Γ'Δ') = Α'Β' \cdot Β'Γ' = 10\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{2} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

124 Θέμα 4 - 18370

α. Είναι:
- $ΜΓ \perp ΟΓ$.
- $ΜΟ = ΜΒ + ΒΟ = 2ρ + ρ = 3ρ$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ έχουμε

$ΜΓ^2 = ΟΜ^2 - ΟΓ^2 = (3ρ)^2 - ρ^2 = 8ρ^2$, οπότε $ΜΓ = \sqrt{8ρ^2} = 2\sqrt{2}\,ρ$.

β. i. Είναι $ΔΑ \perp ΟΑ$, οπότε $\hat{Α} = 90^o$.

Τα τρίγωνα ΓΜΟ και ΑΜΔ είναι όμοια αφού $\hat{Γ} = \hat{Α} = 90^o$ και η γωνία $\hat{Μ}$ είναι κοινή.

Άρα $\frac{ΓΜ}{ΑΜ} = \frac{ΜΟ}{ΜΔ} \Leftrightarrow \frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$.

ii. • Τα τρίγωνα $ΓΜΟ$ και $ΑΜΔ$ είναι όμοια, επομένως $\frac{(ΑΔΜ)}{(ΜΟΓ)}=\left(\frac{ΑΜ}{ΓΜ}\right)^2=\frac{ΑΜ^2}{ΓΜ^2}$

• Είναι $ΟΜ=ΜΒ+ΒΟ=λρ+ρ=(λ+1)ρ$.

• Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΜΟΓ$ έχουμε

$ΓΜ^2=ΟΜ^2-ΟΓ^2=\left((λ+1)ρ\right)^2-ρ^2=...=(λ^2+2λ+1-1)ρ^2=(λ^2+2λ)ρ^2=λ(λ+2)ρ^2$,

• $ΑΜ=ΑΒ+ΒΜ=2ρ+λρ=(λ+2)ρ$, οπότε $ΑΜ^2=(λ+2)^2ρ^2$

Η (1) γίνεται $\frac{(ΑΔΜ)}{(ΜΟΓ)}=\frac{ΑΜ^2}{ΓΜ^2}=\frac{(λ+2)^2ρ^2}{λ(λ+2)ρ^2}=\frac{λ+2}{λ}$

Έχουμε $(ΑΔΜ)=9(ΜΟΓ)\Leftrightarrow\frac{(ΑΔΜ)}{(ΜΟΓ)}=9\Leftrightarrow\frac{λ+2}{λ}=9\Leftrightarrow λ+2=9λ\Leftrightarrow 8λ=2\Leftrightarrow λ=\frac{1}{4}$.

125 Θέμα 4 - 18553

α. i. Το τρίγωνο $ΣΔΓ$ έχει βάση την $ΔΓ$, και ύψος όσο το $ΑΔ$. Άρα $(ΣΔΓ)=\frac{1}{2}\cdot α\cdot α=\frac{α^2}{2}$.

ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΣΒΓ$ έχουμε $ΣΓ^2=ΣΒ^2+ΒΓ^2=α^2+α^2=2α^2$ ή $ΣΓ=α\sqrt{2}$.

β. i. Τα τρίγωνα $Σ΄ΔΓ$ και $ΣΔΓ$ έχουν κοινή βάση τη $ΔΓ$ και ύψος όσο το $ΑΔ$.

Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. Άρα $(Σ΄ΔΓ)=(ΣΔΓ)=\frac{α^2}{2}$.

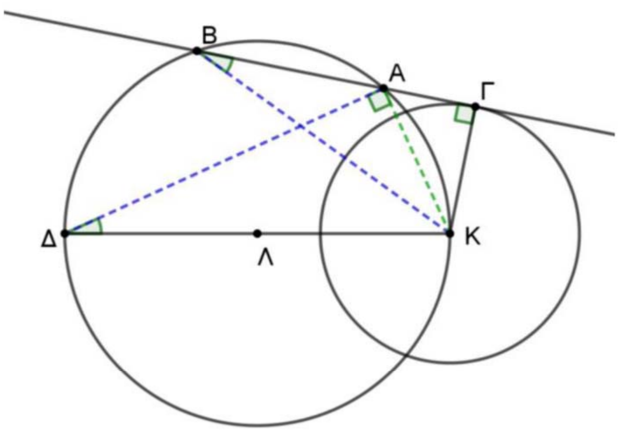
ii. Από το σημείο $Γ$ έχουμε το κάθετο τμήμα $ΓΒ$ προς την ευθεία $ΑΒ$ και τα πλάγια $ΓΣ$ και $ΓΣ΄$.

Τα ίχνη $Σ$ και $Σ΄$ των πλάγιων τμημάτων $ΓΣ$ και $ΓΣ΄$ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος $Β$ του κάθετου $ΓΒ$ να είναι άνισες και συγκεκριμένα $ΒΣ΄>ΒΣ$, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή $ΓΣ΄>ΓΣ$.

iii. Φέρουμε $ΔΕ\perp ΣΓ$, $ΔΗ\perp Σ΄Γ$.

Έχουμε: $(Σ΄ΔΓ)=(ΣΔΓ)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot Σ΄Γ\cdot ΔΗ=\frac{1}{2}ΣΓ\cdot ΔΕ\Leftrightarrow Σ΄Γ\cdot ΔΗ=ΣΓ\cdot ΔΕ\Leftrightarrow\frac{Σ΄Γ}{ΣΓ}=\frac{ΔΕ}{ΔΗ}$ και επειδή $Σ΄Γ>ΣΓ$ θα έχουμε $ΔΕ>ΔΗ$.

126 Θέμα 4 - 22568



α)

i. Οι γωνίες $K\hat{B}Γ$ και $K\hat{Α}Α$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία $K\hat{Γ}B$ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία $K\hat{Α}Δ$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.

Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $K\hat{\Gamma}B = K\hat{A}\Delta$ (ορθές) και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{\Delta}A$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R), άρα ΚΔ=2·R=20 και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ,ρ), άρα ΚΓ=ρ=6. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι $\frac{6}{KA}=\frac{KB}{20}$ ή ΚΑ·ΚΒ=120.

β) Αφού είναι ΚΒ=15 και ΚΑ·ΚΒ=120 τότε 15·ΚΑ=120, άρα ΚΑ=8. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $K\Gamma^2+\Gamma A^2=KA^2$ ή $36+\Gamma A^2=64$ ή $\Gamma A^2=28$ ή $\Gamma A=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ είναι $(A\Gamma K)=\frac{K\Gamma\cdot AK}{2}=\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}=6\sqrt{7}$.

127 Θέμα 2 - 20638

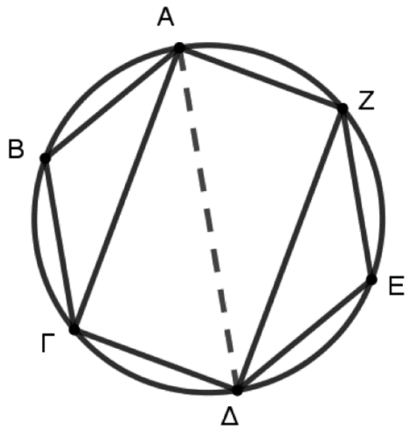
α. Έχουμε $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \nu_2 = 2\nu_1$.

Οπότε $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\frac{360^o}{\nu_1}}{\frac{360^o}{\nu_2}}=\frac{360^o\cdot\nu_2}{360^o\cdot\nu_1}=\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{2\nu_1}{\nu_1}=2.$$

β. Επειδή $\nu_2=2\nu_1$ και $\nu_1=5$ έχουμε $\nu_2=2\cdot 5=10$.

Οπότε $$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{180^o-\frac{360^o}{\nu_1}}{180^o-\frac{360^o}{\nu_2}}=\frac{180^o-\frac{360^o}{5}}{180^o-\frac{360^o}{10}}=\frac{108^o}{144^o}=\frac{3}{4}.$$

128 Θέμα 4 - 21841



α)

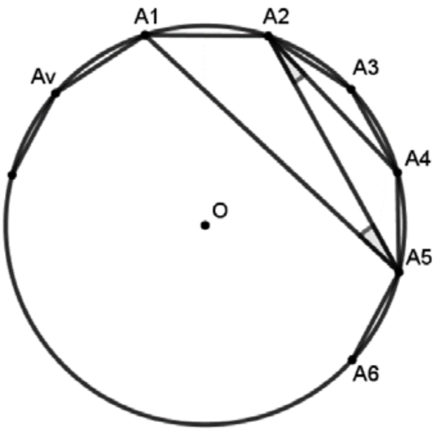
i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3\cdot 60^o = 180^o$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60^o το καθένα , άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με $3\cdot 60^o=180^o$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180^o , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R), άρα $AZ=\lambda_6=R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120^o , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). Έτσι $A\Gamma=\lambda_3=R\sqrt{3}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $(A\Gamma\Delta Z)=AZ\cdot A\Gamma=R\cdot R\sqrt{3}=R^2\sqrt{3}$.

β)



Έστω ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$, (ν>5). Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5.Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^o}{\nu}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4\widehat{A_2}A_5$ και $A_2\widehat{A_5}A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4 // A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

129 Θέμα 4 - 17600

α. Το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει πλευρά $\lambda_6=R$.

Το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου είναι $(AB\Gamma\Delta EZ)=E_6=\frac{1}{2}\cdot P_6\cdot \alpha_6$, όπου $P_6=6\lambda_6=6R$ και $\alpha_6=\frac{R\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $(ΑΒΓΔΕΖ)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot R\cdot \frac{R\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

β. Η $ΑΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) και ισχύει $ΑΔ=2R$. Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $ΑΔ$ αφού η γωνία $Γ$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Είναι $ΓΔ=λ_6=R$. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΔ^2=ΑΓ^2+ΓΔ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2=ΑΔ^2-ΓΔ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2=(2R)^2-R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ΑΓ^2=4R^2-R^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2=3R^2 \Leftrightarrow ΑΓ=R\cdot\sqrt{3}$

Άρα $(ΑΓΔ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΓ\cdot ΓΔ=\frac{1}{2}\cdot R\cdot\sqrt{3}\cdot R=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Η $ΑΜ$ διάμεσος του τριγώνου $ΑΓΔ$, άρα $(ΑΜΓ)=\frac{(ΑΓΔ)}{2}=\frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

γ. Είναι $(ΑΜΔΕΖ)=(ΑΔΕΖ)+(ΑΜΔ)$.

Έχουμε $(ΑΔΕΖ)=\frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ και $(ΑΜΔ)=(ΑΜΓ)=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$,

άρα $(ΑΜΔΕΖ)=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4R^2\sqrt{3}}{4}=R^2\sqrt{3}$.

130 Θέμα 4 - 16928

α. Αν R η ακτίνα του κύκλου μήκους $L=10$, τότε:

$$L=10 \Leftrightarrow 2\pi R=10 \Leftrightarrow R=\frac{10}{2\pi} \Leftrightarrow R=\frac{5}{\pi}$$

Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $λ_3=R\sqrt{3}$, οπότε η περίμετρός του είναι $P_3=3\cdot λ_3=3R\sqrt{3}=3\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$.

β. Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι $λ_6=R \Leftrightarrow λ_6=\frac{5}{\pi}$.

Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου είναι $P_6=6\cdot λ_6=6\cdot\frac{5}{\pi}=\frac{30}{\pi}$.

γ. Θεωρούμε τα κανονικά πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με μήκος 10. Η περίμετρος κάθε τέτοιου κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο, δηλαδή του 10. Επίσης, εφόσον το πλήθος των πλευρών διπλασιάζεται η τιμή της περιμέτρου είναι όλο και μεγαλύτερη, αλλά παραμένει μικρότερη από το 10.

Είναι $\frac{30}{\pi}=P_6$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}=P_3$.

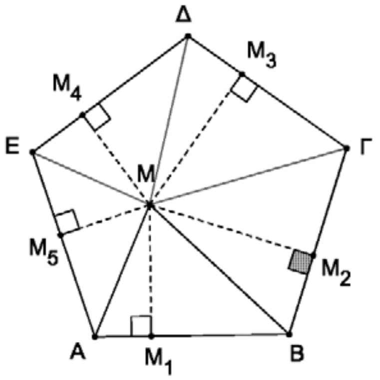
Άρα $P_3<P_6<P_{12}<P_{24}<10 \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{3}}{\pi}<\frac{30}{\pi}<P_{12}<P_{24}<10$.

131 Θέμα 4 - 22099

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το $ΜΜ_1$ είναι

$$(ΑΒΜ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΜΜ_1=\frac{1}{2}\cdot λ_5\cdot ΜΜ_1.$$

ii. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ, ΜΔ και ΜΕ.



Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

$$(\text{ΑΒΓΔΕ}) = (\text{ΑΒΜ}) + (\text{ΒΓΜ}) + (\text{ΓΔΜ}) + (\text{ΔΕΜ}) + (\text{ΕΑΜ})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot MM_1 + \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot MM_2 + \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot MM_3 + \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot MM_4 + \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot MM_5$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot(MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) \quad (1).$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(\text{ΑΒΓΔΕ}) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\lambda_5\cdot\alpha_5 \quad (2).$$

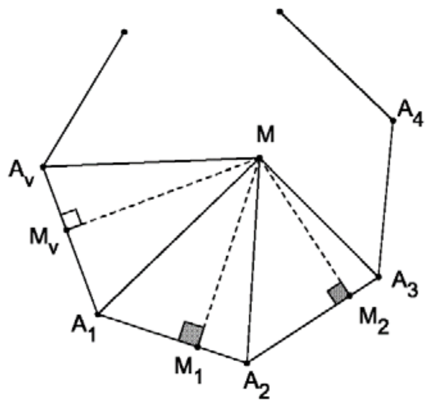
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot(MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\lambda_5\cdot\alpha_5$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2}\cdot\lambda_5$ προκύπτει ότι

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5.$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα MA_1, MA_2,…, MA_ν.



Για το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2…A_\nu$ έχουμε:

$$(A_1A_2\ldots A_\nu) = (A_1A_2M) + (A_2A_3M) + \cdots + (A_\nu A_1M)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_1 + \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_2 + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_\nu$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot(MM_1 + MM_2 + \cdots + MM_\nu) \quad (3).$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2…A_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$(A_1A_2\ldots A_\nu) = \frac{1}{2}\cdot\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu \quad (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot(MM_1+MM_2+\cdots+MM_\nu)=\frac{1}{2}\cdot\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu$ προκύπτει ότι

$$MM_1+MM_2+\cdots+MM_\nu=\nu\alpha_\nu.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

132 Θέμα 2 - 18097

α. Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του τετραγώνου είναι κάθετες και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο $Ο$ του περιγεγραμμένου κύκλου. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο $ΟΔΑ$ έχουμε: $\alpha^2=R^2+R^2=2R^2$.

Έχουμε $(ΑΒΓΔ)=4\Leftrightarrow\alpha^2=4\Leftrightarrow R=\sqrt{2}$. Άρα $R=\sqrt{2}$.

β. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi R^2=2\pi$.

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι $E-E_\tau=2\pi-4$.

133 Θέμα 2 - 21298

α. Είναι $L=10\pi$ και $L=2\pi\cdot\rho\Leftrightarrow\rho=\frac{L}{2\pi}\Leftrightarrow\rho=\frac{10\pi}{2\pi}\Leftrightarrow\rho=5$.

β. i. Είναι $ΒΓ=2\rho=10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε:

$ΑΓ^2=ΒΓ^2-ΑΒ^2=100-36=64$, οπότε $ΑΓ=8$.

ii. $(ΑΒΓ)=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{48}{2}=24$.

134 Θέμα 2 - 21301

α. Έχουμε $E=4\pi\Leftrightarrow\pi\rho^2=4\pi\Leftrightarrow\rho^2=4\Leftrightarrow\rho=2$.

β. • Είναι $ΑΓ=2\rho=4$.

• Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο με $\hat{B}=90^0$ και ισοσκελές με $ΑΒ=ΒΓ$, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.

Έχουμε $ΑΓ=ΑΒ\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow 4=ΑΒ\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow ΑΒ=\frac{4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow ΑΒ=\frac{4\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow ΑΒ=2\sqrt{2}$.

γ. Το εμβαδόν του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ είναι $(ΑΒΓΔ)=ΑΒ^2=(2\sqrt{2})^2=8$.

135 Θέμα 2 - 21300

α. Η γωνία $Α\hat{Κ}Δ$ είναι η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_4$ του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$. Άρα $Α\hat{Κ}Δ=\frac{360^o}{4}=90^o$.

Επομένως το τρίγωνο $ΑΚΔ$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $Α\hat{Κ}Δ$.

β. i. Είναι $(ΑΚΔ)=\frac{1}{2}\cdot ΚΔ\cdot ΚΑ=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\rho=\frac{1}{2}\rho^2$.

Έχουμε $(ΑΚΔ)=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}\rho^2=4\Leftrightarrow\rho^2=8\Leftrightarrow\rho=\sqrt{8}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi\rho^2=\pi\cdot(\sqrt{8})^2=8\pi$.

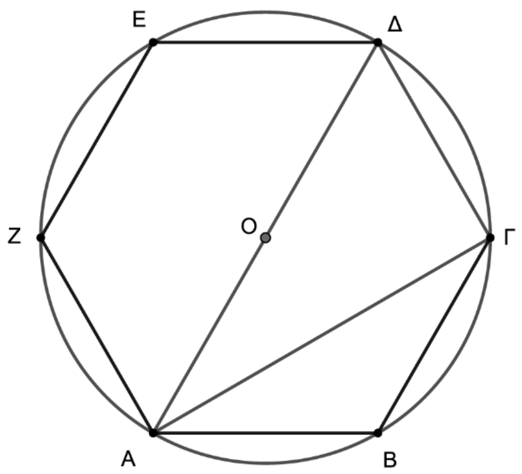
136 Θέμα 2 - 16820

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 7)

β) ΑΓ = $R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) (ΑΒΓΔΕΖ) = $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 9)



137 Θέμα 2 - 16818

α) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,R) και ισχύει ΑΔ = 2R. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

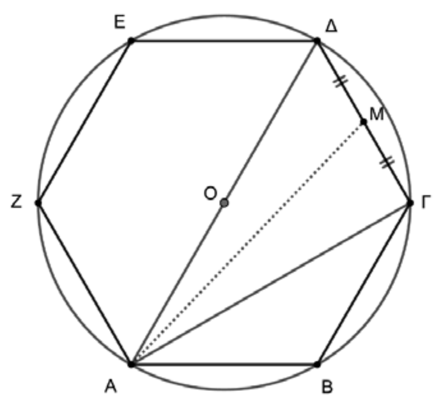
β) Η κάθετη πλευρά ΓΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ισούται με λ_6=R. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ ή

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$ ή $A\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2$ ή

$A\Gamma^2 = 4\,R^2 - R^2$ ή $A\Gamma^2 = 3\,R^2$ ή $A\Gamma = R \cdot \sqrt{3}$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΜ ισούται με:

(ΑΓΜ)= $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma M} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{R} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\mathrm{R}}{2} = \frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4}$



138 Θέμα 2 - 22310

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}$, η ακτίνα του είναι

$\rho = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\ \mathrm{cm}$, άρα το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι

$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\cdot \pi\rho^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi\ \ \mathrm{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\rho = \pi\rho = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{AB}\cdot \mathrm{A\Delta} = 8\cdot \mathrm{A\Delta}\ \mathrm{cm}^2$.

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά , θα έχουμε

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{E}$ ή $8\cdot \mathrm{A\Delta} = 8\pi$ ή $\mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $\mathrm{L} = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $\mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$ και επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, είναι

$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$ και $\mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}$.

Η περίμετρος Ρ του σχήματος (Σ) είναι

$\mathrm{P} = \mathrm{L} + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}$ ή $\mathrm{P} = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\ \ \mathrm{cm}$.

139 Θέμα 2 - 22133

α) Το μήκος λ_4 της πλευράς τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R είναι:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}$$

Αν $\mathrm{R} = 5$, τότε $\lambda_4 = 5\sqrt{2} = B\Gamma$.

β) Άρα, στον κύκλο $(A, 5)$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ της χορδής $B\Gamma$ είναι ίση με την

κεντρική γωνία ω_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο, άρα $B\hat{A}\Gamma = \omega_4 = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

γ) Στο κυρτό τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Επομένως $\ell = \frac{\pi\rho 90}{180} = \frac{5\pi}{2} = 2{,}5\pi$, εφόσον $\rho = 5$.

140 Θέμα 2 - 21192

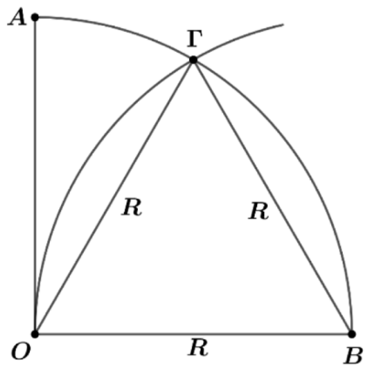
α) Είναι ΟΒ = ΟΓ = ΒΓ = R ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο ΟΒΓ είναι

ισόπλευρο οπότε $\mathrm{B\hat{O}\Gamma} = 60^{\circ}$.

Το μήκος ℓ τόξου μ° ενός κύκλου με ακτίνα R είναι $\ell = \frac{\pi\cdot \mathrm{R}\cdot \mu}{180}$, άρα το μήκος του τόξου ΒΓ

είναι:

$$\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi\cdot \mathrm{R}\cdot 60}{180} = \frac{\pi\cdot \mathrm{R}}{3}$$



β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ η γωνία $A\hat{O}B = 90^o$ έχουμε ότι:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma = 90^o - 60^o = 30^o$$

και το μήκος $\ell_{\widehat{A\Gamma}}$ του αντίστοιχου τόξου ΑΓ της γωνίας ΑΟΓ = 30ο είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi \cdot \mathrm{R} \cdot 30^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot \mathrm{R}}{6}$$

γ) Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα ΟΓ και ΒΓ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών $O\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\ell_{\widehat{O\Gamma}} = \ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot \mathrm{R}}{3}$$

Η περίμετρος $\mathrm{T}_{OA\Gamma}$ του μικτογράμμου τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$T_{OA\Gamma} = OA + \ell_{\widehat{A\Gamma}} + \ell_{\widehat{O\Gamma}} = \mathrm{R} + \frac{\pi \cdot \mathrm{R}}{6} + \frac{\pi \cdot \mathrm{R}}{3} = \mathrm{R} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{R} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

141 Θέμα 2 - 21181

α) Το απόστημα α_3 του ισοπλεύρου τριγώνου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, επομένως για $\alpha_3 = 5$ έχουμε:

$$5 = \frac{R}{2} \text{ ή } R = 10$$

β)

i. Το εμβαδό κύκλου ακτίνας R είναι $E = \pi \cdot R^2$. Για R = 10 το εμβαδό E_1 του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι:

$$E_1 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

ii. Το εμβαδό E_2 εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $E_2 = \pi \cdot \rho^2$ όπου $\rho = \alpha_3 = 5$, επομένως έχουμε:

$$E_2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Άρα το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου Ε είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi$$

142 Θέμα 2 - 22242

α) i. Αφού $A\hat{K}B = 60^o$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K,R), επομένως η AB είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R). Άρα

$$AB = R \ (1).$$

ii. Αφού $A\hat{\Lambda}B = 120^o$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ), επομένως η AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ). Άρα

$$AB = \rho\sqrt{3} \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $R = \rho\sqrt{3}$.

β) Αφού $A\hat{K}B = 60^o$ το μήκος ℓ_1 του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου είναι

$$\ell_1 = \frac{\pi R 60}{180} \text{ ή } \ell_1 = \frac{\pi R}{3} \ (3).$$

Αφού $A\hat{\Lambda}B = 120^o$ το μήκος ℓ_2 του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου είναι

$$\ell_2 = \frac{\pi \rho 120}{180} \text{ ή } \ell_2 = \frac{2\pi\rho}{3} \ (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\frac{\pi R}{3}}{\frac{2\pi\rho}{3}} = \frac{R}{2\rho}.$$

Όμως από το ερώτημα α) έχουμε $R = \rho\sqrt{3}$, επομένως

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\rho\sqrt{3}}{2\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

143 Θέμα 2 - 18098

α. Τα τόξα ΘΕ , ΕΖ , ΖΗ , ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $A\overset{\frown}{\Theta E}$, $B\overset{\frown}{EZ}$, $\Gamma\overset{\frown}{ZH}$, $\Delta\overset{\frown}{H\Theta}$ έχουν ίσα εμβαδά. Είναι:

$$A\overset{\frown}{\Theta E} = B\overset{\frown}{EZ} = \Gamma\overset{\frown}{ZH} = \Delta\overset{\frown}{H\Theta} = \frac{\pi\rho^2 90}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi$$

β. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = \alpha^2 = 4^2 = 16$.

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E - 4(A\overset{\frown}{\Theta E}) = 16 - 4\pi = 4(4-\pi)$.

144 Θέμα 2 - 18099

α. Η πλευρά και το απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι

$\lambda_6 = R$, $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Αφού $R = 2\sqrt{3}$ έχουμε $\lambda_6 = 2\sqrt{3}$, $\alpha_6 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3$.

β. Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου είναι

$$E_6=\frac{1}{2}P_6\alpha_6=\frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6=3\cdot2\sqrt{3}\cdot3=18\sqrt{3}$$

γ. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi R^2=\pi(2\sqrt{3})^2=12\pi$.

Οπότε, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E-E_6=12\pi-18\sqrt{3}=6(2\pi-3\sqrt{3})$$

145 Θέμα 2 - 21075

α. Είναι $E=16\pi$, οπότε $E=\pi\rho^2\Leftrightarrow16\pi=\pi\rho^2\Leftrightarrow\rho^2=16$, οπότε $\rho=4$.

β. i. Η πλευρά AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με ακτίνα $\rho=4$ είναι $AB=\rho\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=16\pi$, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E'=AB^2=(4\sqrt{2})^2=16\cdot2=32$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο είναι $E-E'=16\pi-32$.

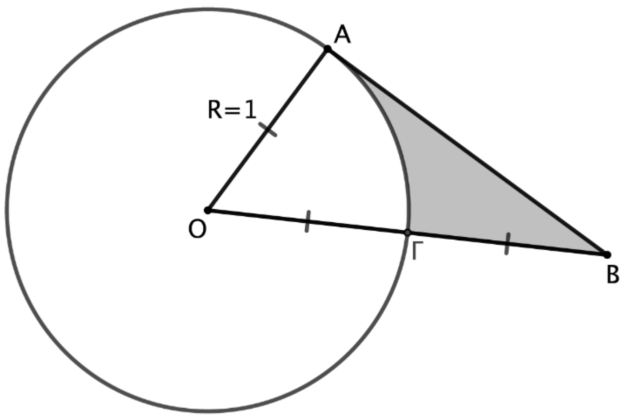
146 Θέμα 2 - 21122

α. Είναι $A\Delta^2=B\Delta\cdot\Delta\Gamma\Leftrightarrow A\Delta^2=1\cdot4\Leftrightarrow A\Delta^2=4$, οπότε $A\Delta=2$.

β. Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{E\Delta Z}$ είναι $\mu=90^0$ αφού $\hat{A}=90^o$ και είναι τόξο του κύκλου ακτίνας $R=A\Delta=2$.

Άρα το $\overset{\frown}{E\Delta Z}$ έχει μήκος $l=\frac{\pi R\mu}{180}=\frac{\pi\cdot2\cdot90}{180}=\pi$.

147 Θέμα 2 - 22046



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA\perp OA$. Άρα, η γωνία $O\hat{A}B$ είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $O\hat{B}A$ ισούται με 30^o.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$AB^2=OB^2-OA^2=2^2-1^2=3$$

Άρα, $AB=\sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $A\hat{O}B = 90^o - 30^o = 60^o$. Έτσι, το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi}{3}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:

$$L = (AB) + (B\Gamma) + \ell_{\widehat{A\Gamma}} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$$

148 Θέμα 2 - 20672

α. • Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του

$$E_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

• Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $R_2 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του

$$E_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi.$$

• Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $R_3 = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του

$$E_3 = \frac{\pi R_3^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

β. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι $E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$.

149 Θέμα 2 - 20363

α. • Η πλευρά κανονικού 6–γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου. Οπότε $AB = R = OA = OB$, οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $A\hat{O}B = 60^o$, επομένως $\widehat{AB} = 60^o$.

• Η πλευρά τετραγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με $R = \sqrt{2}$. Οπότε $B\Gamma = R\sqrt{2}$ και το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ορθογώνιο (οι διαγώνιες του τετραγώνου τέμνονται κάθετα), άρα $B\hat{O}\Gamma = 90^o$, επομένως $\widehat{B\Gamma} = 90^o$.

β. • Το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$, είναι $\ell_1 = \frac{\pi R \cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3}$.

• Το μήκος του τόξου $\widehat{B\Gamma}$, είναι $\ell_2 = \frac{\pi R \cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$.

γ. Είναι $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$.

Οπότε $\widehat{OA\Gamma} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 150}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}$.

150 Θέμα 2 - 21123

α. Επειδή $A\hat{O}B = 90^o$, το OH είναι το απόστημα τετραγώνου πλευράς, εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R), οπότε $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

β. • Ο κυκλικός τομέας $O\widehat{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\widehat{AB}$ με μέτρο $\mu = A\hat{O}B = 90^o$ και ακτίνα $R = 2$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(O\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360}=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 90}{360}=\pi.$$

• Ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ με μέτρο $\mu=\Gamma\hat{O}\Delta=90^o$ και ακτίνα $\rho=OH=\sqrt{2}$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)=\frac{\pi\rho^2\mu}{360}=\frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 90}{360}=\frac{\pi\cdot 180}{360}=\frac{\pi}{2}.$$

γ. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους, είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $O\overset{\frown}{AB}$ και $O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\left(O\overset{\frown}{AB}\right)-\left(O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

151 Θέμα 2 - 21121

α. $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Delta=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 6=39$

β. i. Ο κυκλικός τομέας $A\overset{\frown}{E\Delta Z}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{E\Delta Z}$ με μέτρο $\mu=\hat{A}=90^o$ και ακτίνας $R=A\Delta=6$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(A\overset{\frown}{E\Delta Z}\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360}=\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 90}{360}=9\pi.$$

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $AB\Gamma$ και του κυκλικού τομέα $A\overset{\frown}{E\Delta Z}$, δηλαδή

$$(AB\Gamma)-\left(A\overset{\frown}{E\Delta Z}\right)=39-9\pi.$$

152 Θέμα 2 - 21069

α. Το μήκος της χορδής $B\Gamma$ είναι $B\Gamma=3\sqrt{3}=\rho\sqrt{3}$, επομένως η $B\Gamma$ είναι η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Άρα, το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\mu=\omega_3=\frac{360^0}{3}=120^o$.

β. Το μήκος κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που έχει $\mu=120^o$ και αντιστοιχεί στο κύκλο ακτίνας $\rho=3$ είναι $\frac{\pi\rho\mu}{180}=\frac{\pi\cdot 3\cdot 120}{180}=2\pi$.

γ. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\left(O\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=\pi\rho^2\frac{\mu}{360}=\pi\cdot 3^2\frac{120}{360}=3\pi$.

153 Θέμα 4 - 22157

α) i. Η ΟΑ είναι ακτίνα του κύκλου (O,ρ), εφόσον η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου στο Α.

Υπολογίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου (O,ρ):

Το εμβαδόν του κύκλου (O,ρ) είναι $E=\pi\cdot\rho^2$. Άρα, $\rho^2=\frac{E}{\pi}$.

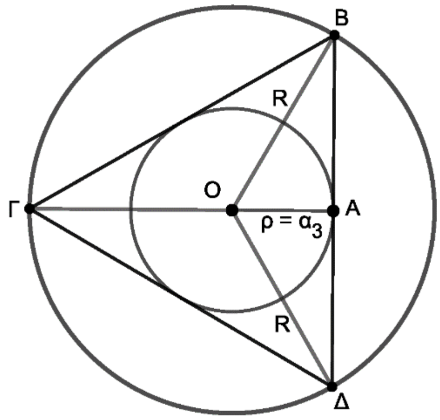
Εφόσον $E=36\pi$ είναι $\rho^2=\frac{36\pi}{\pi}$ ή $\rho^2=36$ ή $\rho=6$.

ii. Ισχύει $\alpha_3=\rho$ και $\alpha_3=\frac{R}{2}$ ή $\rho=\frac{R}{2}$ ή $R=2\rho$. Όμως $\rho=6$, άρα $R=2\cdot 6=12$.

iii. Έστω λ_3 η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R).

Τότε $\lambda_3=R\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Φέρνουμε τις $O\Gamma=OB=O\Delta=R$. Τότε τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΒΓ, ΟΓΔ είναι ίσα.



Αν (ΒΟΔ) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΔ και (ΒΓΔ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ, τότε ισχύει:

$$(\text{ΒΓΔ}) = 3(\text{ΒΟΔ})$$

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΒΟΔ:

$$(\text{ΒΟΔ}) = \frac{\text{ΒΔ} \cdot \text{ΟΑ}}{2} = \frac{\lambda_3 \cdot \rho}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 36\sqrt{3}$$

Άρα $(\text{ΒΓΔ}) = 3 \cdot 36\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$.

β) Στην απάντηση του α) i. βρήκαμε ότι αν Ε είναι το εμβαδόν του κύκλου (Ο, ρ), τότε $\rho^2 = \frac{E}{\pi}$

Στην απάντηση του α) ii. βρήκαμε ότι $R = 2\rho$.

Στην απάντηση του α) iii. βρήκαμε ότι $(\text{ΒΓΔ}) = 3(\text{ΒΟΔ}) = 3 \cdot \frac{\lambda_3 \cdot \rho}{2}$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και στο ερώτημα β).

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, άρα $\lambda_3 = 2\rho\sqrt{3}$, εφόσον $R = 2\rho$.

Άρα $(\text{ΒΓΔ}) = 3 \cdot \frac{2\rho\sqrt{3} \cdot \rho}{2}$ ή $(\text{ΒΓΔ}) = 3\sqrt{3}\rho^2$ ή $(\text{ΒΓΔ}) = 3\sqrt{3} \cdot \frac{E}{\pi}$ ή $(\text{ΒΓΔ}) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot E$.

154 Θέμα 4 - 22098

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΔ} = 4\alpha \cdot \pi\alpha = 4\pi\alpha^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ δίνεται από τον τύπο

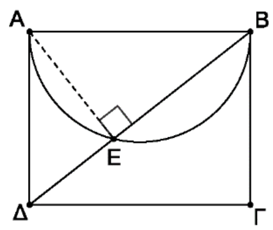
$$E_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = \frac{4\pi\alpha^2}{2} = 2\pi\alpha^2 \ (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$E_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - E_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\mathrm{A\hat{E}B} = 90^{o}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Delta} \cdot \mathrm{BE} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{B\Delta} \cdot \mathrm{\Delta E} \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AB} = 4\alpha$, $\mathrm{A\Delta} = \pi\alpha$, οπότε

$$\mathrm{B\Delta}^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 \;\; ή \;\; \mathrm{B\Delta}^2 = (16+\pi^2)\alpha^2 \;\; ή \;\; \mathrm{B\Delta} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}.$$

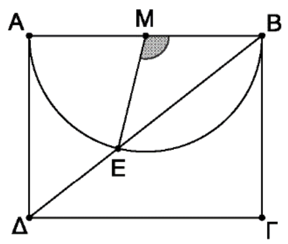
Είναι $\mathrm{AB} = 4\alpha$ και $\mathrm{B\Delta} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (1) γίνεται

$$(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot \mathrm{BE} \;\; ή \;\; \mathrm{BE} = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

Είναι $\mathrm{A\Delta} = \pi\alpha$ και $\mathrm{B\Delta} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (2) γίνεται

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot \mathrm{\Delta E} \;\; ή \;\; \mathrm{\Delta E} = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως

$$\mathrm{ME} = \mathrm{MB} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

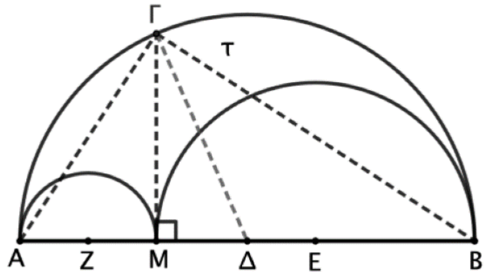
Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{ME}^2 - 2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{ME}\cdot συν\mathrm{B\widehat{M}E} \;\; ή \;\; συν\mathrm{B\widehat{M}E} = \frac{\mathrm{MB}^2+\mathrm{ME}^2-\mathrm{BE}^2}{2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{ME}}.$$

Όμως $ΜΕ = ΜΒ = 2α$ και $ΒΕ = \dfrac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$, οπότε

$$συνB\widehat{M}E = \frac{(2α)^2+(2α)^2-\frac{256α^2}{16+π^2}}{2\cdot 2α\cdot 2α} \quad ή \quad συνB\widehat{M}E = \frac{\left(8-\frac{256}{16+π^2}\right)α^2}{8α^2} \quad ή \quad συνB\widehat{M}E = \frac{π^2-16}{16+π^2}.$$

155 Θέμα 4 - 22024



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $ΑΖ = ΖΜ = α$, $ΜΕ = ΕΒ = β$ και $ΑΔ = ΔΒ = α + β$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Ζ\widehat{ΑΜ}$ είναι:

$$(Ζ\widehat{ΑΜ}) = \frac{π \cdot ΖΜ^2 \cdot 180^ο}{360^ο} = \frac{π \cdot α^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Ε\widehat{ΜΒ}$ είναι:

$$(Ε\widehat{ΜΒ}) = \frac{π \cdot ΕΒ^2 \cdot 180^ο}{360^ο} = \frac{π \cdot β^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\widehat{ΑΒ}$ είναι:

$$(Δ\widehat{ΑΒ}) = \frac{π \cdot ΔΒ^2 \cdot 180^ο}{360^ο} = \frac{π \cdot (α+β)^2}{2}$$

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\widehat{ΑΒ}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων $Ζ\widehat{ΑΜ}$ και $Ε\widehat{ΜΒ}$, δηλαδή:

$$(τ) = (Δ\widehat{ΑΒ}) - (Ζ\widehat{ΑΜ}) - (Ε\widehat{ΜΒ}) = \frac{π \cdot (α+β)^2}{2} - \frac{π \cdot α^2}{2} - \frac{π \cdot β^2}{2}$$

Οπότε

$$(τ) = \frac{π}{2}(α^2 + 2αβ + β^2 - α^2 - β^2) = \frac{π}{2}2αβ = παβ$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει ακτίνα $ρ = \dfrac{ΜΓ}{2}$ και εμβαδόν

$$Ε = π \cdot ρ^2 = π \cdot \left(\frac{ΜΓ}{2}\right)^2 = \frac{π \cdot ΜΓ^2}{4}$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$$ΜΓ^2 = ΑΜ \cdot ΜΒ = 2α \cdot 2β = 4αβ$$

Άρα, έχουμε τελικά:

$$E = \frac{\pi \cdot 4\alpha\beta}{4} = \pi\alpha\beta$$

Επομένως, $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα

$$\frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $M\Gamma = R$, αφού $M\Gamma \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.

156 Θέμα 4 - 17599

α. Έχουμε:
- $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$
- $(\overset{\frown}{AB\Delta}) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot 90}{360} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$

Άρα $(x_1) = (AB\Gamma\Delta) - (\overset{\frown}{AB\Delta}) = \alpha^2 - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi)$

β.
- $(x_2) = \dfrac{\pi \cdot (\frac{\alpha}{2})^2 \cdot 180}{360} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$
- $(x_3) = (\overset{\frown}{AB\Delta}) - x_2 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$

γ. $(x_2) - (x_1) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi) = \ldots = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (3\pi - 8) > 0$, οπότε $(x_2) > (x_1)$.

157 Θέμα 4 - 22151

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (Α, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi \cdot r^2$ και το εμβαδόν $E_{E\Gamma}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή $E_{E\Gamma} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ ή $E_{E\Gamma} = \pi(R^2 - r^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi \cdot r^2}$ ή $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$.

ii. Με όμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι $E_{A\Delta} = \pi \cdot \rho^2$ και $E_{\Delta B} = \pi(r^2 - \rho^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$.

β) Από τα α)i) και α)ii), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{R^2 - r^2}{r^2} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} - 1 = \dfrac{r^2}{\rho^2} - 1$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R}{r} = \dfrac{r}{\rho}$.

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί:

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ ή $\frac{\rho}{r}=\frac{r}{R}$ ή $\frac{R}{r}=\frac{r}{\rho}$.

158 Θέμα 4 - 22154

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{ΕΓ}=E_3-E_2$.

Επίσης $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2}=\frac{E_3-E_2}{E_2}$ ή $\frac{7}{9}=\frac{\pi\rho_3^2-\pi\rho_2^2}{\pi\rho_2^2}$ ή $\frac{7}{9}=\frac{\pi(\rho_3^2-\rho_2^2)}{\pi\rho_2^2}$ ή $\frac{7}{9}=\frac{\rho_3^2-\rho_2^2}{\rho_2^2}$ ή

$7\rho_2^2=9\rho_3^2-9\rho_2^2$ ή $16\rho_2^2=9\rho_3^2$ ή $\frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}=\frac{9}{16}$ ή $\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2=\frac{9}{16}$ ή $\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{3}{4}$.

ii. Τα εμβαδά των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3) είναι $E_2=\pi\rho_2^2$ και $E_3=\pi\rho_3^2$, αντίστοιχα.

Άρα $\frac{E_2}{E_3}=\frac{\pi\rho_2^2}{\pi\rho_3^2}=\frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Άρα, από την απάντηση στο α) i έχουμε $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{3}{4}$.

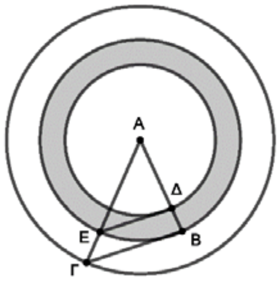
β) Έχουμε $E_{ΕΓ}=E_3-E_2$ ή $E_2=E_3-E_2$ ή $2E_2=E_3$ ή $2\pi\rho_2^2=\pi\rho_3^2$ ή $2\rho_2^2=\rho_3^2$ ή $\rho_3=\rho_2\sqrt{2}$.

Όπως στο α) iii, από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ ή $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

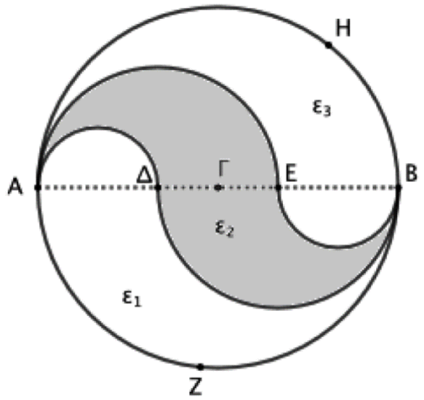
Επομένως $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_2\sqrt{2}}$ ή $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $\rho_2=\rho_1\sqrt{2}$ ή $\rho_2^2=\rho_1^2\left(\sqrt{2}\right)^2$ ή $\rho_2^2=2\rho_1^2$ ή $\pi\rho_2^2=2\pi\rho_1^2$

ή $E_2=2E_1$.

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{ΔΒ}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{ΔΒ}=E_2-E_1$ ή $E_{ΔΒ}=2E_1-E_1$ ή $E_{ΔΒ}=E_1$.



159 Θέμα 4 - 22058



α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$A\Delta = \Delta E = EB = \frac{AB}{3} = \frac{2R}{3}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{A\Delta}$ και $\widehat{BE}$ έχουν ακτίνα

$$\rho_1 = \frac{A\Delta}{2} = \frac{R}{3}$$

και εμβαδόν

$$\varepsilon = \frac{\pi {\rho_1}^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{18}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{AE}$ και $\widehat{B\Delta}$ έχουν ακτίνα

$$\rho_2 = \frac{AE}{2} = A\Delta = \frac{2R}{3}$$

και εμβαδόν

$$\tau = \frac{\pi {\rho_2}^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi \left(\frac{2R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{2\pi R^2}{9}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{AHB}$ και $\widehat{AZB}$ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν

$$\sigma = \frac{\pi R^2}{2}$$

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma + \varepsilon - \tau = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{2\pi R^2}{9} = \frac{9\pi R^2}{18} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{4\pi R^2}{18} = \frac{6\pi R^2}{18} = \frac{\pi R^2}{3}$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο AB είναι

$$E = \pi R^2$$

Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν

$$\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$$

Άρα, ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

160 Θέμα 4 - 21103

α. Το κάθε ημικύκλιο έχει $\rho = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Το κάθε ημικύκλιο έχει μέτρο $\mu = 180^\circ$, οπότε το μήκος τους είναι $\frac{\pi\rho\mu}{180} = \frac{\pi\alpha 180}{180} = \pi\alpha$.

β. i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το **α.** ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος $\pi\alpha$ οπότε η περίμετρος είναι $\pi\alpha + \pi\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 2\pi\alpha + 4\alpha = (2\pi + 4)\cdot\alpha$.

Άρα $(2\pi + 4)\alpha = 2\pi + 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ii. Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΕΖ $(\hat{B} = 90^\circ$, $BE = BZ = \alpha)$ έχουμε

$EZ = BE\sqrt{2} = \alpha\sqrt{2} = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

γ. • Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα $\rho = \alpha$, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau) = \pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

• Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta) = (AB)^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

Οπότε $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4} < 1$, αφού $\pi < 4$.

161 Θέμα 4 - 21197

α. i. • Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα $\frac{AB}{2} = \alpha$ και εμβαδόν $E = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.

Έχουμε $E = 10 \Leftrightarrow \frac{\pi\alpha^2}{2} = 10 \Leftrightarrow \pi\alpha^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$.

• Είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4\cdot\frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$.

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, οπότε $\Delta\Lambda = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΛ έχουμε:

$A\Lambda^2 = A\Delta^2 + \Delta\Lambda^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2 = 5\cdot\frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$.

β. i. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ είναι η διαφορά του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $A\overset{\frown}{MN}$ από το εμβαδόν Ε του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ, δηλαδή $(ABMNA) = (A\overset{\frown}{MN}) - E$.

Είναι $(A\overset{\frown}{MN}) = \frac{\pi\cdot A\Lambda^2}{4} = \frac{\pi\cdot\frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$ και $E = 10$.

Οπότε $(ABMNA) = 25 - 10 = 15$.

ii. $\frac{(A\overset{\frown}{MN})}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$.

162 Θέμα 4 - 21193

α)

i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + 90^{\mathrm{o}} + \widehat{\mathrm{A}} + 90^{\mathrm{o}} = 360^{\mathrm{o}} \text{ ή } \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{\mathrm{o}}$$

δηλαδή η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$ και η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{\mathrm{o}}$$

Ανάλογα για τις γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ βρίσκουμε $\widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^{\mathrm{o}}$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{\mathrm{o}}$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{\mathrm{o}} + 180^{\mathrm{o}} + 180^{\mathrm{o}} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} + 180^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}} + 180^{\mathrm{o}} + 180^{\mathrm{o}} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^{\mathrm{o}}$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) ι. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΝΡ = α, ΛΜ = β και ΚΣ = γ. Αν συμβολίσουμε με $\ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}}, \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}}$ και $\ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}}$ τα μήκη των μικρότερων του ημικυκλίου τόξων $\widehat{\mathrm{K}\Lambda}, \widehat{\mathrm{MN}}$ και $\widehat{\mathrm{P}\Sigma}$ αντίστοιχα, τότε το μήκος L του ιμάντα είναι:

$$\mathrm{L} = \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \Lambda\mathrm{M} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \mathrm{NP} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + \mathrm{K}\Sigma =$$

$$= \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + (\alpha + \beta + \gamma) =$$

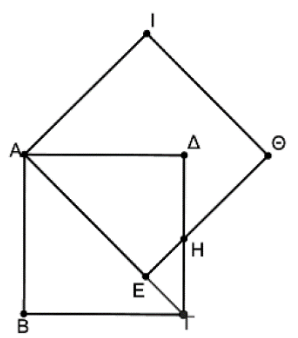
$$= \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\omega}}{180^{\mathrm{o}}} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\varphi}}{180^{\mathrm{o}}} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\theta}}{180^{\mathrm{o}}} + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{\mathrm{o}}} \cdot (\widehat{\omega} + \widehat{\phi} + \widehat{\theta}) + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{\mathrm{o}}} \cdot 360^{\mathrm{o}} + 2\tau = 2\pi\mathrm{R} + 2\tau = 2(\tau + \pi\mathrm{R})$$

163 Θέμα 4 - 18355

α)



i. ΕΓ = $\frac{1}{4}$ ΑΓ, επομένως ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$. Άρα $\mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2}$.

Τα τετράγωνα ΑΙΘΕ και ΑΒΓΔ είναι όμοια, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$$\frac{(\mathrm{AI\Theta E})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Delta}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ ορθές και την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Οι ανάλογες πλευρές τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Delta}$	$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H} = \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΗΓ	ΗΓ	ΕΗ	ΕΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΓΔ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ

Ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας,

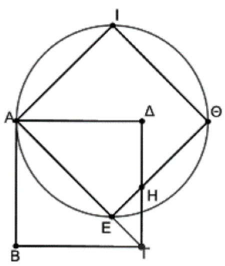
δηλαδή $\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\Delta\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ: Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του, άρα $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ = 45°. Επομένως τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή με ΕΓ = ΕΗ και ΑΔ = ΔΓ. Τα εμβαδά τους θα είναι:

(ΕΓΗ) = $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{E\Gamma}\cdot\mathrm{EH} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{E\Gamma}^2$ και (ΑΓΔ) = $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A\Delta}\cdot\Delta\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\alpha^2$.

$$\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{E\Gamma}^2}{\frac{1}{2}\cdot\alpha^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot\mathrm{A\Gamma}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\frac{1}{16}\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{1}{16}\frac{\alpha^2\cdot 2}{\alpha^2} = \frac{1}{8}.$$

β)



Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ και έστω ρ η ακτίνα του.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ = $\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο ΑΙΘΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο οπότε η πλευρά του ΑΕ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ, δηλαδή ΑΕ = $\rho\sqrt{2}$.

Άρα $\rho = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\alpha}{4}$.

Επομένως ο ζητούμενος λόγος γίνεται $\frac{\text{εμβαδόν κύκλου}}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{\pi\rho^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\frac{9}{16}\alpha^2}{\alpha^2} = \pi\frac{9}{16}$,

που είναι ανεξάρτητος του μήκους της πλευράς α του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

164 Θέμα 4 - 22389

α) Είναι $ΒΑ = ΒΔ = R$ και $ΓΔ = ΓΕ = \rho$.

Επειδή το Ε είναι το μέσο της ΑΓ, είναι $ΑΓ = 2ΓΕ = 2\rho$.

Επίσης είναι $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = R + \rho$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$(R + \rho)^2 = R^2 + (2\rho)^2$

$R^2 + 2R\rho + \rho^2 = R^2 + 4\rho^2$

$2R\rho = 3\rho^2$

$\rho = \frac{2}{3}R$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$E_1 = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot R = \frac{2}{3}R \cdot R = \frac{2}{3}R^2$

και του κύκλου $(Β, R)$, $E_2 = \pi R^2$, άρα

$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi R^2}{\frac{2}{3}R^2} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Ο κυκλικός τομέας $Β\widehat{ΑΔ}$ είναι ακτίνας R και γωνίας $\hat{B} = \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$E_3 = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$.

Ο κυκλικός τομέας $Γ\widehat{ΔΕ}$ είναι ακτίνας $\rho = \frac{2}{3}R$ και γωνίας $\hat{Γ} = 90° - \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$E_4 = \frac{\pi\rho^2(90-\mu)}{360} = \frac{4\pi R^2(90-\mu)}{9 \cdot 360}$.

Άρα

$\frac{E_4}{E_3} = \frac{4\pi R^2(90-\mu) \cdot 360}{9 \cdot 360 \cdot \pi R^2 \mu} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$.

165 Θέμα 4 - 20361

α. Φέρνουμε τις ακτίνες OA , OB .

Η AB είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{360^o}{6}=60^o$.

Άρα $A\hat{O}B=60^o$ επομένως το τρίγωνο OAB θα είναι ισόπλευρο πλευράς R . Δηλαδή $AB=R=OA=OB$ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^o .

Η OA ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη $x'x$, επομένως $O\hat{A}\Gamma=90^o$.

Άρα $B\hat{A}\Gamma=90^o-60^o=30^o$, οπότε $B\Gamma=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2=AB^2-B\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2=R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2=R^2-\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma^2=\frac{3R^2}{4} \text{ , οπότε } A\Gamma=\frac{R\sqrt{3}}{2} .$$

β. Επειδή οι OA , $B\Gamma$ είναι κάθετες στην $x'x$, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $OA\Gamma B$ είναι τραπέζιο με βάσεις OA , $B\Gamma$ και ύψος $A\Gamma$.

Οπότε $(OA\Gamma B)=\dfrac{OA+B\Gamma}{2}\cdot A\Gamma=\dfrac{R+\frac{R}{2}}{2}\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3R}{4}\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ. Το ζητούμενο εμβαδόν E που ορίζεται από την χορδή AB και το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

δ. Το εμβαδόν είναι $E=(OA\Gamma B)-(O\overset{\frown}{AB})$.

Από ερώτημα **β.** έχουμε $(OA\Gamma B)=\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης $(O\overset{\frown}{AB})=\dfrac{\pi R^2\cdot 60}{360}=\dfrac{\pi R^2}{6}$.

Άρα $E=\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}-\dfrac{\pi R^2}{6}=\dfrac{9\sqrt{3}R^2-4\pi R^2}{24}=\dfrac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$.

166 Θέμα 4- 21659

α. Έχουμε:

- $AB=R=\lambda_6$, οπότε $A\hat{O}B=\dfrac{360^o}{6}=60^o$, άρα το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\mu=60^o$, (1) .
- $B\Gamma=R\sqrt{2}=\lambda_4$, οπότε $B\hat{O}\Gamma=\dfrac{360^o}{4}=90^o$, άρα το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\mu=90^o$, (2) .
- Το μήκος ℓ_1 του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\ell_1=\dfrac{\pi R\cdot 60}{180}=\dfrac{\pi R}{3}$.
- Το μήκος ℓ_2 του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\ell_2=\dfrac{\pi R\cdot 90}{180}=\dfrac{\pi R}{2}$.

β. Λόγω των (1) , (2) είναι $A\hat{O}\Gamma=A\hat{O}B+B\hat{O}\Gamma=150^o$.

- Το μήκος ℓ_3 του μη κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι

$$\ell_3=2\pi R-\ell_1-\ell_2=2\pi R-\frac{\pi R}{3}-\frac{\pi R}{2}=\frac{12\pi R-2\pi R-3\pi R}{6}=\frac{7\pi R}{6} .$$

- Είναι $(O\overset{\frown}{A\Gamma})=\dfrac{\pi R^2\cdot 150}{360}=\dfrac{5\pi R^2}{12}$

γ. • $(\tau_1)=(O\overset{\frown}{AB})-(OAB)=\dfrac{\pi R^2\cdot 60}{360}-\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\pi R^2}{6}-\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$

• $(\tau_2)=(O\overset{\frown}{B\Gamma})-(OB\Gamma)=\dfrac{\pi R^2\cdot 90}{360}-\dfrac{1}{2}OB\cdot O\Gamma=\dfrac{\pi R^2}{4}-\dfrac{R^2}{2}=\dfrac{(\pi-2)R^2}{4}$

Άρα $(\tau_1)+(\tau_2)=\dfrac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}+\dfrac{(\pi-2)R^2}{4}=\dfrac{(2\pi+3\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12}=\dfrac{(5\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

167 Θέμα 4 - 21138

α. i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $OA\Lambda$ και έχουμε $OA^2=A\Lambda^2-\Lambda O^2=2^2-1^2=3$, οπότε $OA=\sqrt{3}$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAK και έχουμε $AK^2=KO^2+OA^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2=6$, οπότε $R=AK=\sqrt{6}$.

β. Η ευθεία $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το O είναι το μέσο της AB , οπότε $AB=2\cdot OA \Leftrightarrow AB=2\sqrt{3}$.

i. • Επειδή $AB=2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt{2\cdot 6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=R\sqrt{2}$, η AB είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_1 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $A\hat{K}B=\dfrac{360}{4}=90^o$.

Ο κυκλικός τομέας $K\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου c_1 με μέτρο $\mu=A\hat{K}B=90^o$ και ακτίνα $R=\sqrt{6}$ οπότε $\left(K\overset{\frown}{AB}\right)=\dfrac{\pi R^2\mu}{360}=\dfrac{\pi\cdot(\sqrt{6})^2\cdot 90}{360}=\dfrac{3\pi}{2}$.

• Επειδή $AB=2\sqrt{3}=\rho\sqrt{3}$, η AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_2 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $A\hat{\Lambda}B=\dfrac{360^o}{3}=120^o$.

Ο κυκλικός τομέας $\Lambda\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου c_2 με μέτρο $\mu=A\hat{\Lambda}B=120^o$ και ακτίνα $\rho=2$ οπότε $\left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right)=\dfrac{\pi\rho^2\mu}{360}=\dfrac{\pi\cdot 2^2\cdot 120}{360}=\dfrac{4\pi}{3}$.

ii. Αν (KAB) και (ΛAB) είναι τα εμβαδά των τριγώνων KAB και ΛAB τότε το εμβαδόν E του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι $E=\left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right)-\left(K\overset{\frown}{AB}\right)+(KAB)-(\Lambda AB)$.

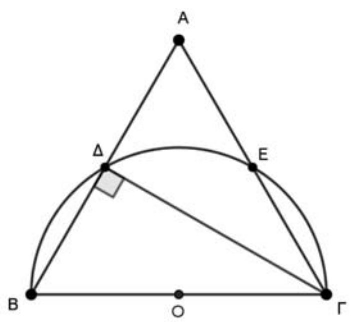
• Είναι $(KAB)=\dfrac{KA\cdot KB}{2}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{2}=3$ και $(\Lambda AB)=\dfrac{AB\cdot\Lambda O}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\sqrt{3}$.

• Έχουμε από το **β.i.**, $\left(K\overset{\frown}{AB}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$ και $\left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right)=\dfrac{4\pi}{3}$.

Άρα $E=\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{3\pi}{2}+3-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6}$.

168 Θέμα 4 - 21979

α)



Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Άρα έχουμε:

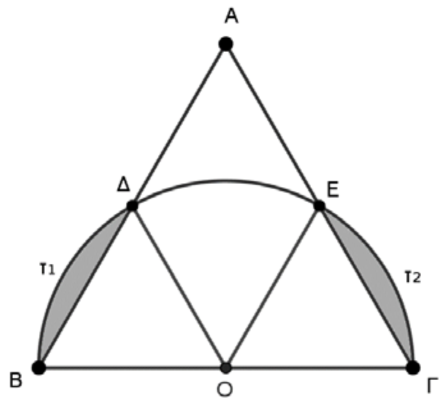
ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^0$.

Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 3\alpha^2$, επομένως $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β)



Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά τ_1, τ_2 των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα.

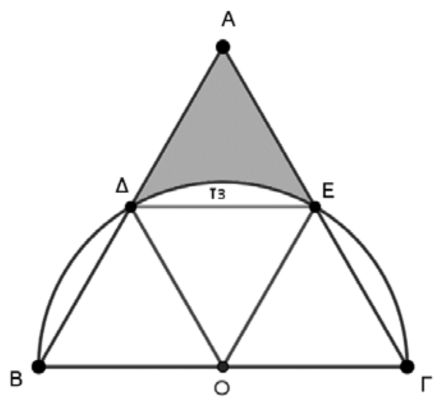
Άρα $E = \tau_1 + \tau_2 = 2\,\tau_1$ (1).

Όμως $\tau_1 = (O\,\overset{\frown}{B\Delta}) - (OB\Delta) =$

$$\frac{\pi\alpha^2 60}{360} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi\alpha^2 - 3\alpha^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}.$$

Οπότε από την (1): $E = 2\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}$.

γ)



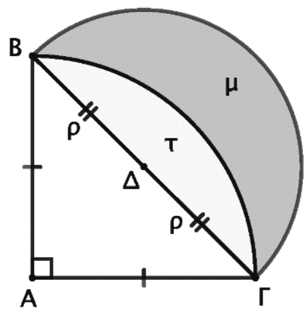
Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό $τ_3$, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά $τ_1$ και $τ_2$. Δηλαδή $τ_3 = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$Ε' = (ΑΔΕ) - τ_3 = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}α^2-2πα^2+3\sqrt{3}α^2}{12} = \frac{6\sqrt{3}α^2-2πα^2}{12} =$$

$$\frac{2(3\sqrt{3}-π)α^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}.$$

169 Θέμα 4 - 22021



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι $ΑΒ = ΑΓ$. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$
$$(2ρ)^2 = ΑΒ^2 + ΑΒ^2$$
$$4ρ^2 = 2ΑΒ^2$$
$$ΑΒ^2 = 2ρ^2$$

Επομένως, $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή:

$$(μ) = (Δ\,\widehat{ΒΓ}) - (τ)$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\,\widehat{ΒΓ}$ είναι:

$$(Δ\,\widehat{ΒΓ}) = \frac{π \cdot ΔΓ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot ρ^2}{2}$$

Το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ υπολογίζεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Α\,\widehat{ΒΓ}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή:

$$(τ) = (Α\,\widehat{ΒΓ}) - (ΑΒΓ) = \frac{π \cdot ΑΒ^2 \cdot 90^o}{360^o} - \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{π \cdot 2ρ^2}{4} - \frac{1}{2}2ρ^2 = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2$$

Επομένως, έχουμε τελικά:

$$(\mu) = \frac{\pi \cdot \rho^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot \rho^2}{2} - \rho^2\right) = \rho^2$$

γ) Στο προηγούμενο ερώτημα βρέθηκε ότι $(\mu) = \rho^2$.

Επίσης, είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \frac{1}{2}2\rho^2 = \rho^2$$

Επομένως, $(\mu) = (\mathrm{AB\Gamma})$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΒΓ.

170 Θέμα 4 - 21127

α. i. Είναι $\mathrm{MN} = \frac{3\mathrm{R}}{2}$ και $\mathrm{ON} = \mathrm{R}$, άρα $\mathrm{OM} = \mathrm{MN} - \mathrm{ON} = \frac{3\mathrm{R}}{2} - \mathrm{R} = \frac{\mathrm{R}}{2}$.

Επειδή η χορδή ΑΒ έχει απόστημα $\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{R}}{2}$, είναι ίση με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{R}\sqrt{3}$.

ii. Η γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R), άρα $\mathrm{A\hat{O}B} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

β. i. Είναι $\mathrm{R} = 10\,\mathrm{cm}$, οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{R}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ και $\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{R}}{2} = 5\,\mathrm{cm}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι $\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{OM} = \frac{1}{2}10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{ANB}}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{ANB}}$ με μέτρο $\mu = 360^\circ - \mathrm{A\hat{O}B} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\pi \mathrm{R}^2 \mu}{360} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 240}{360} = \frac{200\pi}{3}\mathrm{cm}^2.$$

Άρα το εμβαδόν Ε που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{ANB}}$ είναι

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_1 = \left(\frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2.$$

ii. Το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{ANB}}$ έχει μέτρο $\mu = 240^\circ$ και αντιστοιχεί στο κύκλο ακτίνας $\mathrm{R} = 10\,\mathrm{cm}$.

Οπότε το μήκος του είναι $\frac{\pi \mathrm{R}\mu}{180} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 240}{180} = \frac{40\pi}{3}\mathrm{cm}$.

171 Θέμα 4 - 22261

α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$.

Είναι: $\mathrm{B\Gamma}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$ και $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

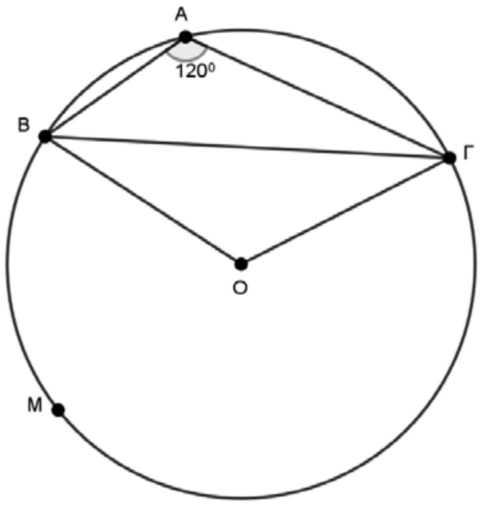
Οπότε: $\mathrm{B\Gamma}^2 > \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 \Rightarrow \widehat{\mathrm{A}} > 90^0$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 – 2ΑΓ·ΑΒ·συνΑ = $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot$ συνΑ .

Επίσης από το ερώτημα (α): ΒΓ^2 = $\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$.

Άρα: $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot$ συνΑ = $\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ ή συνΑ = $-\frac{1}{2}$, άρα $\hat{A}$ = 120^0 .



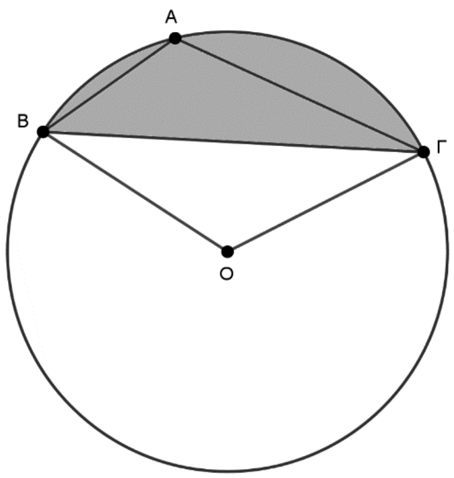
γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν. Άρα $\overset{\frown}{\mathrm{BM\Gamma}}$ = 2·120^0 = 240^0 .

Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο ΒΑΓ θα ισχύει: $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}$ = 360^0 - 240^0 = 120^0, οπότε η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) είναι: $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}$ = 120^0, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

Ε = (Ο $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}$) – (ΟΒΓ) = $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$ - $\frac{1}{2}$ΟΒ·ΟΓ·ημ120^0 = $\frac{\pi R^2 120}{360}$ - $\frac{1}{2}$·R·R·$\frac{\sqrt{3}}{2}$ =

= $\frac{\pi R^2}{3}$ - $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ = $\frac{4\pi R^2-3\sqrt{3}R^2}{12}$ = $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$.



172 Θέμα 4 - 22244

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $E = 10^2 = 100\ \mathrm{m}^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^o και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$E_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} = 25\pi\ \mathrm{m}^2.$$

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι

$$2E_1 - E = 50\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathrm{m}^2.$$

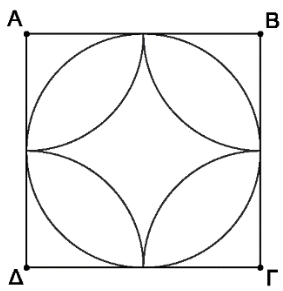
β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^o και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$E_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = \frac{25\pi}{4}\ \mathrm{m}^2.$$

Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι

$$E - 4E_2 = 100 - 25\pi = 25(4 - \pi)\ \mathrm{m}^2.$$

ii.



Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι

$$E_3 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

$$4E_1 + E_3 - E = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathrm{m}^2.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).

173 Θέμα 4 - 18043

α. i. Είναι: • $AB = \lambda_4$, οπότε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μέτρο $\frac{360^o}{4} = 90^o$.

• $A\Delta = \lambda_6$, οπότε το τόξο $A\Delta = \frac{360^o}{6} = 60^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 360^o - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma} - \overset{\frown}{A\Delta} = 360^o - 90^o - 120^o - 60^o = 90^o$.

Άρα $\Delta\Gamma = \lambda_4 = \rho\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι $(\tau) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma)$.

• $\left(O\overset{\frown}{B\Gamma}\right) = \frac{\pi\rho^2 120}{360} = \frac{\pi\rho^2}{3}$

• $(OB\Gamma) = \frac{1}{2}OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$.

Άρα $(\tau) = \frac{\pi\rho^2}{3} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$.

β. Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο , τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ .

Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Είναι $\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{BA} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$.

Άρα το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι: $\pi\rho\frac{\mu}{180} = \pi\rho\frac{60}{180} = \frac{\pi\rho}{3}$.