ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Μπάρλας

1 Θέμα 2 – 14489

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta - \beta - 2\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2\alpha + \beta$.

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$x + y = 0$.

Συνεπώς,

$x + y = (\alpha - \beta) + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = \alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0$ ισχύει.

2 Θέμα 2 – 14473

α. Είναι $\dfrac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow 4x + 5y = -2(x-4y) \Leftrightarrow 4x + 5y = -2x + 8y \Leftrightarrow 6x = 3y \Leftrightarrow y = 2x$

β. Για $y = 2x$ έχουμε

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy} = \frac{2x^2 + 3\cdot(2x)^2 + x\cdot 2x}{x\cdot 2x} = \frac{2x^2 + 3\cdot 4x^2 + 2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8$$

3 Θέμα 2 – 14555

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5$.

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x + y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125$.

4 Θέμα 2 – 14458

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2 + 4xy + xy + 4y^2 - 9xy = 0$, οπότε $x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$, δηλαδή $(2y - x)^2 = 0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y - x)^2 = 0$, οπότε $2y - x = 0$, άρα $y = \dfrac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\dfrac{x}{2} = y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = (2y - y)^2 + (2y + y)^2 = y^2 + (3y)^2 = y^2 + 9y^2 = 10y^2$$

5 Θέμα 2 – 13472

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$. Αλλά, $\alpha - \beta \neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha + \beta = 1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A=\alpha^2+\beta^2=2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\cdot 1=3$$

αφού $\alpha+\beta=1$.

6 Θέμα 2 – 1251

α. Είναι:
- $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4\Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta\Leftrightarrow \alpha=3\beta$.
- $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma\Leftrightarrow \delta=5\gamma$

β. Για $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ έχουμε $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta\cdot 5\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

7 Θέμα 2 – 13088

α. Έχουμε: $A=2(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)-6xy-y^2=x^2$

β. Ο αριθμός B είναι η αριθμητική τιμή της παράστασης A για $x=2021$ και $y=1$.

Οπότε $B=2021^2$, επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

8 Θέμα 2 – 13053

α. i. Από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=0$, προκύπτει ότι $\beta+\gamma=-\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha$$

β. Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta$ και $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma$

Επομένως, $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

που είναι το ζητούμενο.

9 Θέμα 2 – 12685

α. Έχουμε $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4 \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{1}{\beta}=4\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

β. Είναι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha-\beta=0\Leftrightarrow \alpha=\beta$.

10 Θέμα 2 – 12922

α. Είναι $A=0\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

β. Είναι $A-B=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

γ. Είναι $A-B=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha-\beta=0\Leftrightarrow \alpha=\beta$

11 Θέμα 2 – 1287

α. Είναι $K\geq\Lambda\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

β. Είναι $K=\Lambda\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} \alpha^2+(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha=0$ και $\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

Άρα $\alpha=\beta=0$.

12 Θέμα 2 – 1353

α. Είναι $(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2x+1+y^2+6y+9=x^2+y^2-2x+6y+10$

β. Έχουμε $x^2+y^2-2x+6y+10\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+(y+3)^2=0\Leftrightarrow x-1=0$ και $y+3=0\Leftrightarrow x=1$ και $y=-3$.
Άρα $x=1$ και $y=-3$.

13 Θέμα 2 – 13323

α. Είναι $(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β. $x^2+y^2-2x+8y+17=0\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+(y+4)^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0$ και $(y+4)^2=0\Leftrightarrow x-1=0$ και $y+4=0\Leftrightarrow x=1$ και $y=-4$.

14 Θέμα 2 – 1317

Είναι: **α.** $K-\Lambda=2\alpha^2+\beta^2+9-2\alpha(3-\beta)=2\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta=\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta$
$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

β. $K\geq\Lambda\Leftrightarrow K-\Lambda\geq 0\Leftrightarrow(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)\geq 0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2\geq 0$, που ισχύει.

γ. $K=\Lambda\Leftrightarrow K-\Lambda=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$ και $\alpha-3=0\Leftrightarrow\beta=-\alpha$ και $\alpha=3$
$\Leftrightarrow\beta=-3$ και $\alpha=3$
Άρα $\beta=-3$ και $\alpha=3$.

15 Θέμα 2 – 13266

α. Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2+1=\alpha^2+4\alpha+2^2+1=\alpha^2+4\alpha+5=A$$

β. i. Είναι $A+B\geq 0\Leftrightarrow(\alpha+2)^2+1+(2\beta+1)^2-1\geq 0\Leftrightarrow(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2\geq 0$,

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα **β.i.** βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για
$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2=0\Leftrightarrow\left\{(\alpha+2)^2=0 \text{ και } (2\beta+1)^2=0\right\}\Leftrightarrow(\alpha=-2 \text{ και } \beta=-\frac{1}{2})$.

16 Θέμα 2 – 14704

α. Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$ και βρίσκουμε

$$2+1\leq x+y\leq 3+2\Leftrightarrow 3\leq x+y\leq 5$$

β. Είναι:
- $2\leq x\leq 3\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}2\cdot 2\leq 2x\leq 2\cdot 3\Leftrightarrow 4\leq x\leq 6$, (1)
- $1\leq y\leq 2\overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}(-3)\cdot 1\geq -3y\geq(-3)\cdot 2\Leftrightarrow -3\geq -3y\geq -6\Leftrightarrow -6\leq -3y\leq -3$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$4-6\leq 2x-3y\leq 6-3\Leftrightarrow -2\leq 2x-3y\leq 3$$

γ. Είναι:
- $2\leq x\leq 3$, (3)
- $1\leq y\leq 2\Leftrightarrow 1\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{y}\leq 1$, (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) έχουμε $2\cdot\frac{1}{2}\leq x\cdot\frac{1}{y}\leq 3\cdot 1\Leftrightarrow 1\leq\frac{x}{y}\leq 3$.

17 Θέμα 2 – 14475

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$$-4 \le \beta \le -3 \text{, οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \le \beta \cdot 2 \le -3 \cdot 2 \text{, και τελικά}$$

$$-8 \le 2\beta \le -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2-8 \le \alpha + 2\beta \le 4-6 \text{, οπότε τελικά}$$

$$-6 \le \alpha + 2\beta \le -2 .$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$-4 \le \beta \le -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \ge \beta \cdot (-1) \ge -3 \cdot (-1),$$

$$4 \ge -\beta \ge 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \le -\beta \le 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2+3 \le \alpha - \beta \le 4+4 \text{, οπότε τελικά}$$

$$5 \le \alpha - \beta \le 8 .$$

18 Θέμα 2 – 1324

α. Είναι:
- $3 \le x \le 5 \Rightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Rightarrow -5 \le -x \le -3$, (1)
- $-2 \le y \le -1$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$-5-2 \le -x+y \le -3-1 \Leftrightarrow -7 \le y-x \le -4$

β. Είναι
- $3 \le x \le 5 \Rightarrow 9 \le x^2 \le 25$, (3)
- $-2 \le y \le -1 \Rightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Rightarrow 2^2 \ge (-y)^2 \ge 1^2 \Rightarrow 1 \le y^2 \le 4$, (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) και έχουμε

$$9+1 \le x^2+y^2 \le 25+4 \Leftrightarrow 10 \le x^2+y^2 \le 29$$

19 Θέμα 2 – 12673

α. Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta} \Rightarrow \frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β. Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3 < \beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα **α.** είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε: $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

20 Θέμα 2 – 1373

α. Είναι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \ge 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \ge 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2 \ge 0$, που ισχύει.

β. Από το **α.** ερώτημα έχουμε $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ και $\beta+\frac{4}{\beta}\geq 4$.

Πολλαπλασιάζουμε τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη και προκύπτει $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$.

21 Θέμα 2 – 1261

α. Είναι:
- $EZ=HZ-HE=AB-\Gamma\Delta=x-y$
- $ZB=HA=H\Gamma+\Gamma A=E\Delta+\Gamma A=y+y=2y$

Οπότε η περίμετρος του σχήματος είναι

$$\Pi=EZ+ZB+BA+A\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E=x-y+2y+x+y+y+y=2x+4y$$

β. Είναι:
- $5<x<8\Leftrightarrow 2\cdot 5<2x<2\cdot 8\Leftrightarrow 10<2x<16$, (1)
- $1<y<2\Leftrightarrow 4\cdot 1<4y<4\cdot 2\Leftrightarrow 4<4y<8$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$10+4<2x+4y<16+8\Leftrightarrow 14<\Pi<24$$

22 Θέμα 2 – 14492

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι Π = 2x + 2y. Τότε:

$4\leq x\leq 7 \Leftrightarrow 2\cdot4\leq 2x\leq 2\cdot7 \Leftrightarrow 8\leq 2x\leq 14$ (1) και

$2\leq y\leq 3 \Leftrightarrow 2\cdot2\leq 2y\leq 2\cdot3 \Leftrightarrow 4\leq 2y\leq 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$8+4\leq 2x+2y\leq 14+6 \Leftrightarrow 12\leq \Pi\leq 20$.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$P=2(x-1)+2\cdot3y=2x+6y-2$.Τότε:

$$2\leq y\leq 3\Leftrightarrow 6\cdot2\leq 6y\leq 6\cdot3\Leftrightarrow 12\leq 6y\leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12-2\leq 6y-2\leq 18-2 \Leftrightarrow 10\leq 6y-2\leq 16 \text{ (3)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$8+10\leq 2x+6y-2\leq 14+16\Leftrightarrow 18\leq P\leq 30$.

23 Θέμα 4 – 14820

α) Ισοδύναμα έχουμε

i. $x^2+x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2+x+1-\frac{3}{4}\geq 0\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

ii. $x^2-x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1-\frac{3}{4}\geq 0\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

β) Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2+x+1>\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1>\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Επίσης, για $x=\frac{1}{2}$ είναι $x^2+x+1>\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1=\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x=-\frac{1}{2}$ είναι $x^2+x+1=\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1>\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1,-1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\mathrm{A}>\frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1,-1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1}=\frac{9}{16}$ έχει λύση στο $\mathbb{R}-\{1,-1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1}=\frac{9}{16} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^6-1}{x^2-1}=\frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2)^3-1}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$16(x^4+x^2+1)=9\Leftrightarrow$$
$$16x^4+16x^2+16-9=0\Leftrightarrow$$
$$16x^4+16x^2+7=0$$

και επειδή $16x^4+16x^2+7\geq 7>0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

24 Θέμα 4 – 1392

α. Οι επιφάνειες της θάλασσας που καλύπτουν το πετρέλαιο κάθε ημέρα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=3$ και $\lambda=2$. Στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο είναι
$\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=3\cdot 2^4=48$ τετραγωνικά μίλια.

β. Είναι $\alpha_\nu=768\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=768\Leftrightarrow 3\cdot 2^{\nu-1}=768\Leftrightarrow 2^{\nu-1}=256\Leftrightarrow 2^{\nu-1}=2^8\Leftrightarrow\nu-1=8\Leftrightarrow\nu=9$.
Άρα, μετά από 9 ημέρες το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.

γ. Από το **β.** ερώτημα στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας το πετρέλαιο καλύπτει 768 τ.μ. Από την $10^{η}$ ημέρα και μετά, οι επιφάνειες που καλύπτει το πετρέλαιο κάθε ημέρα σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με
$\beta_1=768-6=762$ και $\omega=-6$.
Είναι $\beta_\nu=12\Leftrightarrow\beta_1+(\nu-1)\omega=12\Leftrightarrow 762+(\nu-1)\cdot(-6)=12\Leftrightarrow 762-6\nu+6=12$
$\Leftrightarrow 768-6\nu=12\Leftrightarrow -6\nu=-756\Leftrightarrow\nu=126$.
Άρα, μετά από $9+126=135$ ημέρες η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

25 Θέμα 2 – 1300

α. Είναι $x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot 2+4+1>0\Leftrightarrow(x+2)^2+1>0$, που ισχύει.

$2^{ος}$ τρόπος (μετά το κεφάλαιο 19)
Το τριώνυμο x^2+4x+5 έχει $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=5$ και διακρίνουσα:
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4<0$$
Επειδή επιπλέον $\alpha=1>0$ έχουμε $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Είναι:
- $x^2+4x+5>0$, οπότε $|x^2+4x+5|=x^2+4x+5$
- $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$, οπότε $|x^2+4x+4|=x^2+4x+4$

Άρα $B=x^2+4x+5-(x^2+4x+4)=x^2+4x+5-x^2-4x-4=1$.

26 Θέμα 2 – 1258

α. Έχουμε $5<x<10\Rightarrow x>5$ και $x<10\Rightarrow x-5>0$ και $x-10<0$.
Οπότε $|x-5|=x-5$ και $|x-10|=-(x-10)=-x+10$.

β. $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}=\frac{x-5}{x-5}+\frac{-(x-10)}{x-10}=1-1=0$

27 Θέμα 2 – 13177

α. Είναι $2\leq\alpha\leq 3$ οπότε $\alpha-3\leq 0$ και άρα $|\alpha-3|=3-\alpha$.

Επίσης είναι $-2\leq\beta\leq -1$ οπότε $\beta+2\geq 0$ και άρα $|\beta+2|=\beta+2$.

β. Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$ έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ. Από το **β.** ερώτημα έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :
$|\alpha+\beta| + |\alpha-3| - |\beta+2| = \alpha+\beta+3-\alpha-(\beta+2) = \alpha+\beta+3-\alpha-\beta-2 = 1$

28 Θέμα 2 – 13169

α. Αφού $3 \le x \le 5$, θα έχουμε $x - 5 \le 0$.

Ακόμα $3 \le x$, οπότε $1 \le x - 2$. Ώστε $x - 2 > 0$.

β. Γνωρίζουμε ότι αν $y \ge 0$, τότε $|y| = y$ ενώ αν $y \le 0$, τότε $|y| = -y$.

Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$.

Τελικά $x = \frac{9}{2}$, λύση η οποία είναι δεκτή, αφού $\frac{9}{2} = 4{,}5 \in [3\,,5]$.

29 Θέμα 2 – 1239

Είναι $A = |3x - 6| + 2 = |3(x-2)| + 2 = 3|x-2| + 2$.

α. i. Για $x \ge 2 \Leftrightarrow x - 2 \ge 0$, είναι $|x - 2| = x - 2$, οπότε

$$A = 3(x-2) + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$$

ii. Για $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$, είναι $|x-2| = -(x-2) = -x + 2$, οπότε

$$A = 3(-x+2) + 2 = -3x + 6 + 2 = 8 - 3x$$

β. Για $x \ge 2$, είναι $\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} \overset{\alpha.}{=} \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 4} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x + 4$

30 Θέμα 2 – 1260

α. Έχουμε $1 < x < 2 \Rightarrow x > 1$ και $x < 2 \Rightarrow x - 1 > 0$ και $x - 2 < 0$.
Οπότε $|x - 1| = x - 1$ και $|x-2| = -(x-2) = -x + 2$.
Άρα $A = |x-1| - |x-2| = x - 1 - (-x + 2) = 2x - 3$.

β. Αν $x < 1$, τότε:

- $x - 1 < 0$, οπότε $|x - 1| = -(x-1) = 1 - x$.
- $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$, οπότε $|x - 2| = -(x-2) = 2 - x$.

Άρα $A = |x-1| - |x-2| = 1 - x - (2 - x) = 1 - x - 2 + x = -1$, δηλαδή έχει σταθερή τιμή.

31 Θέμα 2 – 1384

α. Έχουμε:
- $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$, άρα $|x - 1| = x - 1$
- $y < 3 \Rightarrow y - 3 < 0$, άρα $|y < 3| = -(y-3) = -y + 3$.

Επομένως $A = |x-1| + |y-3| = x - 1 + (-y + 3) = x - y + 2$.

β. Έχουμε $1 < x < 4$, (1) και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2$, (2)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $1 - 3 < x - y < 4 - 2 \Leftrightarrow -2 < x - y < 2 \Rightarrow 0 < x - y + 2 < 4$.
Άρα $0 < A < 4$.

32 Θέμα 2 – 1303

Είναι $A = |2x - 4| = |2(x-2)| = 2|x-2|$.

α. Για $2 \le x < 3$, έχουμε: $x \ge 2$ και $x < 3$, $x - 2 \ge 0$ και $x - 3 < 0$, οπότε

- $A = 2|x-2| = 2(x-2)$
- $B = |x - 3| = -(x-3) = -x + 3$

Άρα $A + B = 2(x-2) - x + 3 = 2x - 4 - x + 3 = x - 1$.

β. Αν $x \in [2, 3) \Leftrightarrow 2 \le x < 3$, από **α.** ερώτημα είναι $A + B = x - 1$.
Οπότε $A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$, απορρίπτεται, αφού $x \in [2, 3)$.
Άρα δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$.

33 Θέμα 2 – 14412

α) Έχουμε $\alpha > \beta$ και ισοδύναμα $\alpha - \beta > 0$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επίσης $\alpha > 1$ ισοδύναμα $1 - \alpha < 0$, οπότε $|1 - \alpha| = \alpha - 1$.

Άρα $\dfrac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha - 1}{1-\alpha} = 1 + \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1 + 1 = 2$.

β) Είναι

$\alpha > 1$ και $\beta > 1$, οπότε

$\alpha + \beta > 1 + 1$, δηλαδή

$\alpha + \beta > 2$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}.$$

34 Θέμα 2 – 12909

α. $|x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (-2, 8)$

β. Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(-2, 8)$, δηλαδή οι: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

γ. Είναι $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ οπότε:
$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $A \cap B = \{-1, 0, 3, 4\}$.

35 Θέμα 2 – 1322

α. Είναι $d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow |x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

β. Έχουμε $-1 < x < 5 \Leftrightarrow x > -1$ και $x < 5 \Leftrightarrow x + 1 > 0$ και $x - 5 < 0$.
Άρα $|x + 1| = x + 1$, $|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5$.
Οπότε $K = \dfrac{|x+1| + |x-5|}{3} = \dfrac{x + 1 - x + 5}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$.

36 Θέμα 2 – 1323

α. Είναι $|y - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 3 \Leftrightarrow y \in (1, 3)$

β. Έχουμε $y \in (1,3) \Rightarrow 1 < y < 3 \Rightarrow y > 1$ και $y < 3 \Rightarrow y - 1 > 0$ και $y - 3 < 0$.
Άρα $|y - 1| = y - 1$, $|y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$.
Οπότε $K = \dfrac{|y-1| + |y-3|}{2} = \dfrac{y - 1 + 3 - y}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

37 Θέμα 2 – 14617

α) Η ανίσωση (I) γράφεται $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 7 < 1 \Leftrightarrow 7 - 1 < x < 7 + 1$.

Ώστε $6 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (6, 8)$.

β) Είναι $k \in (6,8) \Leftrightarrow 6 < k < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{6} > \frac{24}{k} > \frac{24}{8} \Leftrightarrow 4 > \frac{24}{k} > 3$.

Άρα $3 < \frac{24}{k} < 4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3, 4)$.

38 Θέμα 2 – 14572

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|x+2|<1 \Leftrightarrow$$
$$-1<x+2<1 \Leftrightarrow$$
$$-1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow$$
$$-3<x<-1.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3<x<-1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6<2x<-2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2<2x+4<2$, οπότε τελικά

$$|2x+4|<2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $|x+2|<1$ με το 2 και έχουμε

$2\cdot|x+2|<2\cdot 1$, οπότε

$|2\cdot(x+2)|<2$ και τελικά

$$|2x+4|<2.$$

39 Θέμα 2 – 14599

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x|<2$, οπότε

$2|x|<2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και έχουμε

$|x|<1$ και τελικά

$$-1<x<1$$

β) Η ανίσωση

$x^2<1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η

$\sqrt{x^2}<1$,που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η

$|x|<1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει

$-1<x<1$, δηλαδή $x\in(-1,1)$,που ισχύει.

Άρα για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

40 Θέμα 2 – 1284

α. Είναι $|x+4|\geq 3 \Leftrightarrow x+4\geq 3$ ή $x+4\leq -3 \Leftrightarrow x\geq -1$ ή $x\leq -7$

β. Είναι $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+4\geq -1+4 \Leftrightarrow \alpha+4\geq 3$, δηλαδή $\alpha+4>0$.

Άρα $|\alpha+4|=\alpha+4$, οπότε $A=\big||\alpha+4|-3\big|=|\alpha+4-3|=|\alpha+1|$.

Είναι $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+1\geq 0$, οπότε $A=|\alpha+1|=\alpha+1$.

41 Θέμα 2 – 1320

α. Είναι $d(2x,3)=3-2x \Leftrightarrow |2x-3|=-(2x-3)$, (1) Επειδή $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \le 0$ έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow 2x-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2}$.

β. Είναι $K = \ldots = |2x-3| - 2|x-3|$. Έχουμε $x \le \frac{3}{2}$, οπότε

- $2x \le 3 \Rightarrow 2x-3 \le 0$, άρα $|2x-3| = -2x+3$
- $x < 3 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow 3-x > 0$, άρα $|3-x| = 3-x$

Επομένως $K = |2x-3| - 2|3-x| = -2x+3-2(3-x) = -2x+3-6+2x = -3$.

Άρα είναι ανεξάρτητη του x .

42 Θέμα 2 – 1366

α. Για $\alpha < 0$ είναι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2 \overset{\cdot\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 1 \ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \ge 0$, που ισχύει.

β. Για $\alpha < 0$ είναι $|\alpha| = -\alpha$.

Οπότε $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2 \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{\alpha} \ge 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$, που ισχύει από το **α.** ερώτημα.

43 Θέμα 2 – 1371

α. Είναι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \ge 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \ge 0 \text{ , που ισχύει.}$$

β. Είναι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 2 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} (|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

Η ισότητα ισχύει όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

44 Θέμα 2 – 1252

α. Είναι $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(x+y)$.

Έχουμε:
- $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 < 2x < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6$, (1)
- $2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 < 2y < 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 < 2y < 8$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και προκύπτει

$$2+4 < 2x+2y < 6+8 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$$

45 Θέμα 2 – 14491

α. Είναι $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$.

β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = xy$. Έχουμε $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και προκύπτει $2 < xy < 12 \Leftrightarrow 2 < E < 12$.

46 Θέμα 2 – 1268

α. Είναι:
- $|x-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$
- $|y-6| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le y-6 \le 4 \Leftrightarrow 2 \le y \le 10$

β. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2 \cdot 2x + 2y = 4x + 2y$.

Έχουμε:

- $1 \le x \le 5 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 \le 4x \le 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 \le 4x \le 20$, (1)

- $2 \le y \le 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \le 2y \le 10 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 20$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε $4+4 \le 4x+2y \le 20+20 \Leftrightarrow 8 \le \Pi \le 40$.

- Είναι $\Pi = 8$, για $x=1$ και $y=2$.

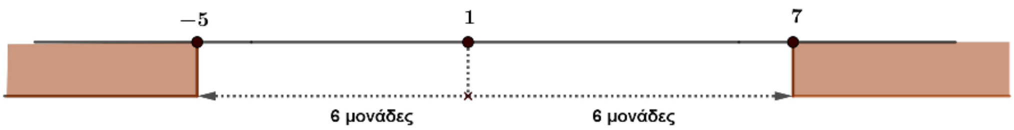
  Οπότε η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου είναι 8.
- Είναι $\Pi = 40$, για $x=5$ και $y=10$.

  Οπότε η μέγιστη τιμή της περιμέτρου είναι 40.

47 Θέμα 2 – 14295

α) Το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \ge 6$ διατυπώνεται γεωμετρικά ως εξής: Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 6.

Η σωστή αναπαράσταση είναι η 4η , διότι



β) Θα λύσουμε την ανίσωση αλγεβρικά, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$|x-1| \ge 6 \text{ , δηλαδή}$$

$$x-1 \le -6 \quad \text{ή} \quad x-1 \ge 6 \text{, οπότε}$$

$$x \le -5 \quad \text{ή} \quad x \ge 7$$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$ που είναι πράγματι η αναπαράσταση 4.

48 Θέμα 4 – 1515

α. Έχουμε $(\alpha-1)(1-\beta) > 0$, οπότε οι αριθμοί $\alpha-1$ και $1-\beta$ είναι ομόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha-1>0$ και $1-\beta>0 \Rightarrow \alpha>1$ και $\beta<1 \Rightarrow \beta<1<\alpha$
- $\alpha-1<0$ και $1-\beta<0 \Rightarrow \alpha<1$ και $\beta>1 \Rightarrow \alpha<1<\beta$

Άρα σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β. • Αν $\beta<1<\alpha$ τότε: $\begin{cases} 1>\beta \\ \alpha>1 \\ \beta<\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\beta>0 \\ \alpha-1>0 \\ \beta-\alpha<0 \end{cases}$, οπότε

- $|1-\beta| = 1-\beta$
- $|\alpha-1| = \alpha-1$
- $|\beta-\alpha| = 4 \Leftrightarrow -(\beta-\alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha-\beta = 4$, (1)

Άρα $K = |\alpha-1| + |1-\beta| = \alpha-1+1-\beta = \alpha-\beta \overset{(1)}{=} 4$.

- Αν $\alpha<1<\beta$, τότε: $\begin{cases} \alpha<1 \\ 1<\beta \\ \beta>\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1<0 \\ 1-\beta<0 \\ \beta-\alpha>0 \end{cases}$, οπότε
  - $|\alpha-1| = -(\alpha-1) = 1-\alpha$
  - $|1-\beta| = -(1-\beta) = \beta-1$
  - $|\beta-\alpha| = 4 \Leftrightarrow \beta-\alpha = 4$, (2)

Άρα $K = |\alpha-1| + |1-\beta| = 1-\alpha+\beta-1 = \beta-\alpha \overset{(2)}{=} 4$.

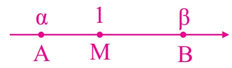
2ος τρόπος

Επειδή οι αριθμοί $\alpha-1$ και $1-\beta$ είναι ομόσημοι έχουμε

$$K = |\alpha-1| + |1-\beta| = |(\alpha-1)+(1-\beta)| = |\alpha-\beta| = |\beta-\alpha| = 4$$

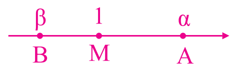
Γεωμετρικά

Έστω $A(\alpha)$, $M(1)$, $B(\beta)$ τα σημεία του άξονα.



Το σημείο M βρίσκεται μεταξύ των A και B , οπότε

$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = d(\alpha , 1) + d(1 , \beta) = (AM) + (MB) = (AB) = |\alpha - \beta| = 4$

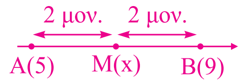


Αν $\beta < 1 < \alpha$, όμοια βρίσκουμε $\kappa = 4$.

49 Θέμα 4 – 1429

α. Είναι: • $|x-5| = d(x , 5) = MA$

• $|x-9| = d(x , 9) = MB$



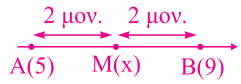
Οπότε οι παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-9|$ παριστάνουν τις αποστάσεις του σημείου M από τα σημεία A και B αντίστοιχα.

β. i. Έχουμε $|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow MA = MB$. Δηλαδή το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος AB .

ii. • Το μέσο M του τμήματος AB είναι το κέντρο του διαστήματος $[5, 9]$, οπότε $x = \dfrac{5+9}{2} = 7$.

2[ος] τρόπος

Είναι: $AB = d(5 , 9) = |5-9| = 4$ μονάδες.



Επομένως το σημείο M απέχει 2 μονάδες από το σημείο A(5) και 2 μονάδες από το B(9).

Άρα είναι $x = 5 + 2 = 7$.

• Είναι $|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow x - 5 = -(x-9)$ ή $x - 5 = x - 9$

$x - 5 = -x + 9$ ή $x - x = -9 + 5 \Leftrightarrow 2x = 14$ ή $0x = -4 \Leftrightarrow x = 7$ ή $0x = -4$, που είναι αδύνατη.

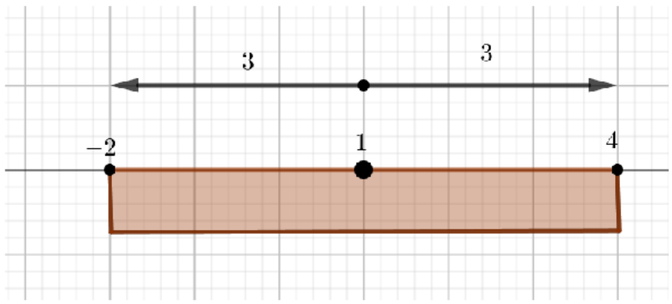
Άρα $x = 7$.

50 Θέμα 4 – 14650

α) Είναι:

$$\begin{aligned} &|x-1| \le 3 \Leftrightarrow \\ &-3 \le x-1 \le 3 \Leftrightarrow \\ &-2 \le x \le 4. \end{aligned}$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται ως εξής:



Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βλέπουμε τους πραγματικούς αριθμούς x, οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

γ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση (1) είναι οι: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4

δ) Θέτουμε $|x| = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $|\omega - 1| \le 3$. Από το γ) ερώτημα γνωρίζουμε ότι την επαληθεύουν οι ακέραιοι $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4. Δεδομένου ότι $\omega = |x| \ge 0$, δεκτοί είναι οι ακέραιοι: $0, 1, 2, 3$ και 4. Συνεπώς:

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

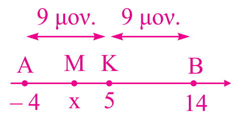
$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ και

$|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

51 Θέμα 4 – 1427



α. Από τη σχέση $d(x, 5) \le 9$ έχουμε ότι ο αριθμός x απέχει από το 5 απόσταση μικρότερη ή ίση του 9.

β. Αν τα σημεία K, M του άξονα αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, x αντίστοιχα, τότε $d(x, 5) \le 9 \Leftrightarrow (MK) \le 9$

Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι το M ανήκει στο τμήμα AB με $A(-4)$ και $B(14)$. Οπότε $x \in [-4, 14]$.

γ. Είναι $d(x, 5) \le 9 \Leftrightarrow |x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow -9+5 \le x \le 9+5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 14$

δ. Έχουμε $x \ge -4 \Leftrightarrow x+4 \ge 0$ και $x \le 14 \Leftrightarrow x-14 \le 0$

Οπότε $|x+4| + |x-14| = x+4-(x-14) = x+4-x+14 = 18$.

52 Θέμα 4 – 1428

α. i. Είναι $|x+2| = |x-(-2)| = d(x,-2) = MA$. Δηλαδή η παράσταση $|x+2|$ παριστάνει την απόσταση του σημείου M από το A.

ii. Είναι $|x-7| = d(x, 7) = MB$.

Δηλαδή η παράσταση $|x-7|$ παριστάνει την απόσταση του σημείου M από το B.

β. Είναι $|x+2| + |x-7| = d(x,-2) + d(x, 7) = MA + MB = AB$

Δηλαδή το άθροισμα $|x+2| + |x-7|$ παριστάνει την απόσταση AB.

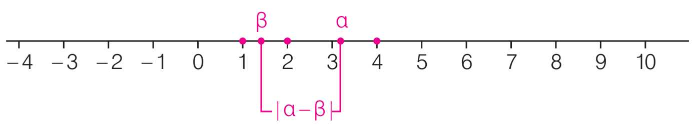
γ. Είναι $|x+2| + |x-7| = AB = d(7,-2) = |7-(-2)| = |9| = 9$

δ. Είναι:

- $x > -2 \Leftrightarrow x+2 > 0$, άρα $|x+2| = x+2$
- $x < 7 \Leftrightarrow x-7 < 0$ άρα $|x-7| = -(x-7) = 7-x$

Οπότε $A = |x+2| + |x-7| = x+2+7-x = 9$

53 Θέμα 4 – 13179



α. Η απόσταση $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha, \beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha, \beta) = 3$ όταν $\beta = 1$ και $\alpha = 4$), δηλαδή $d(\alpha, \beta) \le 3$.

ii. Είναι $1 \le \beta \le 2 \Leftrightarrow -1 \ge -\beta \ge -2 \Leftrightarrow -2 \le -\beta \le -1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 4$, $-2 \le -\beta \le -1$ έχουμε ότι $2-2 \le \alpha - \beta \le 4-1 \Leftrightarrow 0 \le \alpha - \beta \le 3$.

Αφού $0 \le \alpha - \beta$ είναι $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta \le 3$ οπότε $d(\alpha, \beta) \le 3$.

β. i. Δεδομένου ότι $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και αφού $\beta \le 2 \le \alpha$ είναι και $\beta \le \alpha$.

Έτσι αφού $\beta \le \alpha$ και $\beta > 0$ έχουμε ότι $1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta \le \alpha$ και $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1-\frac{\beta}{\alpha} \ge 0$ οπότε

$$|1-\frac{\beta}{\alpha}| = 1-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-1 \ge 0 \quad \text{οπότε} \quad |\frac{\alpha}{\beta}-1| = \frac{\alpha}{\beta}-1$$

Συνεπώς

$$|1-\frac{\beta}{\alpha}| = |\frac{\alpha}{\beta}-1| \Leftrightarrow 1-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}-1 \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 0 = (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Όμως $1 \le \beta \le 2 \le \alpha \le 4$, οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

54 Θέμα 4 – 1525

Έχουμε:

α. $|\alpha-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$.

β. $|\beta-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \beta - 3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \beta \le 5$

γ.
- $1 < \alpha < 3 \Rightarrow 2 < 2\alpha < 6$, (1)
- $1 \le \beta \le 5 \Rightarrow -3 \ge -3\beta \ge -15 \Rightarrow -15 \le -3\beta \le -3$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$

δ.
- $1 < \alpha < 3$, (3)
- $1 \le \beta \le 5 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{\beta} \ge \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{\beta} \le 1$, (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) και (4) και έχουμε: $\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$.

55 Θέμα 4 – 1521

α. Είναι $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6$.

β. i. Θα αποδείξουμε ότι $2 < d(3x, 4) < 14 \Leftrightarrow 2 < |3x-4| < 14$, (1)

Έχουμε $d(x, 4) < 2 \Leftrightarrow |x-4| < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14$, (2)

Άρα $3x - 4 > 0$ οπότε η (1) $\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14$, που ισχύει από την (2). Άρα $2 < d(3x, 4) < 14$.

ii. Έχουμε $|x-4| < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1$, (1), οπότε $3x - 19 < 0$.

Είναι $d(3x, 19) = |3x-19| = -(3x-19) = -3x + 19$.

Η (1) $\Rightarrow 13 > -3x + 19 > 1 \Rightarrow 13 > d(3x, 19) > 1$.

Άρα $1 < d(3x, 19) < 13$.

56 Θέμα 2 – 1375

α. Πρέπει $(x - 4 \ge 0$ και $x + 1 \ge 0) \Leftrightarrow (x \ge 4$ και $x \ge -1) \Leftrightarrow x \ge 4$.

Οπότε η παράσταση Α ορίζεται όταν $x \in [4, +\infty)$.

β. Είναι $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x - 4 - (x+1) = x - 4 - x - 1 = -5$.

57 Θέμα 2 – 1340

α. Είναι $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

β. Είναι $\Pi=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2=2^2-2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4+3+4+3=14$

58 Θέμα 2 – 12943

α. Είναι:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})=\frac{6}{2}=3$$

και

$$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(3^2-\sqrt{5}^2)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{4}{4}=1$$

Άρα $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\cdot\beta=1$.

β. Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})^2+\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}(9+5+6\sqrt{5}+9+5-6\sqrt{5})=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

59 Θέμα 2 – 14774

α) Έχουμε ότι:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2=2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=4+4\sqrt{5}+5=9+4\sqrt{5}$$

και

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^2=1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=1-2\sqrt{5}+5=6-2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}=$$
$$|2+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}|.$$

Αλλά $1<5\Rightarrow 1<\sqrt{5}\Rightarrow 1-\sqrt{5}<0$. Οπότε, $|1-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-1$.

Άρα,

$$|2+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}|=2+\sqrt{5}+\sqrt{5}-1=1+2\sqrt{5}.$$

60 Θέμα 2 – 14452

α) Έχουμε :

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2=10$$

β) Είναι

$\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=3-1=2$ οπότε

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{10}{2}=5$$

61 Θέμα 2 – 1378

α. Πρέπει: $x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq 4$ και $6-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 6$.

Άρα $4\leq x\leq 6\Leftrightarrow x\in[4,\,6]$.

β. Για $x=5$, είναι $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$, οπότε $A^2+A-6=2^2+2-6=0$.

62 Θέμα 2 – 1379

α. Πρέπει: $x^2+4\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq 4$.
Οπότε η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα $x\in[4,+\infty)$.

β. Για $x=4$, έχουμε $A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}-\sqrt{0}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$.

Οπότε $A^2-A=(2\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}=4\cdot 5-2\sqrt{5}=20-2\sqrt{5}=2(10-\sqrt{5})$.

63 Θέμα 2 – 1376

α. Είναι:
- $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\simeq 4,48$
- $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}\simeq 6,72$
- $\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}\simeq 8,96$

β. Είναι $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$.

64 Θέμα 2 – 1270

α. Είναι $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3}$.
Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:
$x+2\neq 0$ και $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$ και $x\neq 3$.
β. Έχουμε $-2<x<3\Rightarrow x>-2$ και $x<3\Rightarrow x+2>0$ και $x-3<0$.
Άρα $|x+2|=x+2$ και $|x-3|=-(x-3)$.

Οπότε $K=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{x+2}{x+2}-\dfrac{-(x-3)}{x-3}=1+1=2$.

65 Θέμα 2 – 1308

α. Είναι $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{3+5}{5-3}=\frac{8}{5-3}=4$$

β. Έχουμε $|x+A|=1\Leftrightarrow|x+4|=1\Leftrightarrow x+4=1$ ή $x+4=-1\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=-5$

66 Θέμα 2 – 1381

α. Πρέπει: $(x-2)^5\geq 0\Leftrightarrow x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.
Άρα η παράσταση B ορίζεται για εκείνα τα $x\in[2,+\infty)$.

β. Για $x=4$, είναι $B=\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$. Οπότε $B^2+6B=2^2+6\cdot 2=16=2^4=B^4$.

67 Θέμα 2 – 1380

α. Πρέπει:
- $1-x\geq 0\Leftrightarrow -x\geq -1\Leftrightarrow x\leq 1$ και
- $x^4\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα $x\in(-\infty,1]$.

β. Για $x=-3$, έχουμε $A=\sqrt{1+3}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{4}-|-3|=2-3=-1$, οπότε

$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$

68 Θέμα 2 – 1335

α. Πρέπει $(x-2)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η παράσταση Α ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$.

β. Πρέπει $(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$. Οπότε η παράσταση Β ορίζεται για $x \in (-\infty, 2]$.

γ. Για $x \leq 2$ έχουμε $x-2 \leq 0$ και $2-x \geq 0$.

Οπότε $A = |x-2| = -x+2$ και $B = |2-x| = 2-x$

Άρα $A = B$.

69 Θέμα 2 – 1377

α. Είναι $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < (\sqrt[3]{30})^3 < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64$, που ισχύει.

β. Είναι $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$, αφού

$$\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} > 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3 > 3^3 \Leftrightarrow 30 > 27$$, που ισχύει.

Άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$.

70 Θέμα 2 – 1382

α. • $A = (\sqrt{2})^6 = \left((\sqrt{2})^2\right)^3 = 2^3 = 8$ • $B = (\sqrt[3]{2})^6 = \left((\sqrt[3]{2})^3\right)^2 = 2^2 = 4$

Οπότε $A - B = 8 - 4 = 4$.

β. Έχουμε: $(\sqrt{2})^6 = 8$, $(\sqrt[3]{2})^6 = 4$ και $1^6 = 1$. Είναι $1 < 4 < 8 \Rightarrow 1^6 < (\sqrt[3]{2})^6 < (\sqrt{2})^6 \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

71 Θέμα 2 – 14682

α) Έχουμε: $A = (\sqrt{3})^6 = ((\sqrt{3})^2)^3 = 3^3 = 27$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6 = ((\sqrt[3]{3})^3)^2 = 3^2 = 9.$

Άρα : $A - B = 27 - 9 = 18.$

β) Αφού οι αριθμοί $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$ είναι θετικοί θα έχουν την ίδια διάταξη και όταν υψωθούν εις την έκτη. Από το ερώτημα α) $(\sqrt{3})^6 = A = 27$ και $(\sqrt[3]{3})^6 = B = 9.$

Άρα: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}.$

72 Θέμα 2 – 1281

α. Είναι: • $A = (\sqrt{2})^6 = \left((\sqrt{2})^2\right)^3 = 2^3 = 8$ • $B = (\sqrt[3]{3})^6 = \left((\sqrt[3]{3})^3\right)^2 = 3^2 = 9$ • $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6 = 6$

Οπότε $A + B + \Gamma = 23$.

β. Είναι $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.

Οπότε $6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$

73 Θέμα 2 – 1338

α. Είναι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$

β. Είναι: • $A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25}$ • $B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{27}$

Οπότε $25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B$.

74 Θέμα 4 – 14931

α) Έχουμε $A=\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$.

β) Έχουμε $B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}=|\alpha|-|\beta|=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}\overset{\alpha),\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{A}>B\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}}>2\Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{2}>4\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}>1\Leftrightarrow$$

$2>1$, που ισχύει.

75 Θέμα 2 – 1246

Είναι $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$

α. • Για $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται $0\cdot 2x=2\cdot 3\Leftrightarrow 0x=6$, αδύνατη.
• Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γίνεται $-2\cdot 0x=0\cdot 1\Leftrightarrow 0x=0$, ταυτότητα.

β. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση, όταν $(\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0\Leftrightarrow\lambda-1\neq 0$ και $\lambda+1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$.

76 Θέμα 2 – 12917

α. Για $\alpha=0$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|0-1|-3)\cdot x=0+2\Leftrightarrow(1-3)\cdot x=2\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1$$

Για $\alpha=5$ η εξίσωση γίνεται:

$(|5-1|-3)\cdot x=5+2\Leftrightarrow(4-3)\cdot x=7\Leftrightarrow x=7$

β. i. Είναι $|\alpha-1|=3\Leftrightarrow\alpha-1=3$ ή $\alpha-1=-3\Leftrightarrow\alpha=4$ ή $\alpha=-2$

ii. Για $\alpha=4$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|4-1|-3)\cdot x=4+2\Leftrightarrow 0\cdot x=6$$, που είναι αδύνατη

Για $\alpha=-2$ η εξίσωση γίνεται: $(|-2-1|-3)\cdot x=-2+2\Leftrightarrow 0\cdot x=0$, που είναι ταυτότητα.

77 Θέμα 2 – 1351

α. Είναι $\lambda x=x+\lambda^2-1\Leftrightarrow\lambda x-x=\lambda^2-1\Leftrightarrow(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, (1)

β. Η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση αν και μόνο αν $\lambda-1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1$.

Για $\lambda\neq 1$ η $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}\Leftrightarrow x=\lambda+1$. Άρα η μοναδική λύση είναι $x=\lambda+1$.

γ. Για να είναι ταυτότητα, πρέπει $\lambda-1=0$ και $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ $\Leftrightarrow\lambda=1$ και ($\lambda=1$ ή $\lambda=-1$) $\Leftrightarrow\lambda=1$.

78 Θέμα 2 – 12857

α. i. Για $\lambda=-2$ η εξίσωση γίνεται $-3x+6=0\Leftrightarrow -3x=-6\Leftrightarrow x=2$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x=2$.

ii. Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται

$$(\lambda-1)1-2\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda-1-2\lambda+2=0\Leftrightarrow -\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

β. Για να είναι ταυτότητα η εξίσωση θα είναι της μορφής $0x = 0$, οπότε

$\lambda - 1 = 0$ και $2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ και $2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$

79 Θέμα 2 – 1369

α. • Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $(1^2 - 9)x = 1^2 - 3\cdot 1 \Leftrightarrow -8x = -2$

• Για $\lambda = 3$, η εξίσωση γίνεται $(3^2 - 9)x = 3^2 - 3\cdot 3 \Leftrightarrow 0x = 0$

• Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γίνεται $-9x = 0$.

β. Η (1) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$

γ. Για $\lambda \neq \pm 3$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι

$x = \dfrac{\lambda^2 - 3\lambda}{\lambda^2 - 9} = \dfrac{\lambda(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} = \dfrac{\lambda}{\lambda + 3}$ και ισούται με 4 , οπότε

$$x = 4 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + 3} = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4\lambda + 12 \Leftrightarrow -3\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

80 Θέμα 2 – 1327

Είναι $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow (\alpha + 3)x = (\alpha - 3)(\alpha + 3)$, (1)

α. i. Για $\alpha = 1$, η εξίσωση γράφεται $(1 + 3)x = (1 - 3)(1 + 3) \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

ii. Για $\alpha = -3$, η εξίσωση γράφεται $(-3 + 3)x = (-3 - 3)(-3 + 3) \Leftrightarrow 0x = -6\cdot 0 \Leftrightarrow 0x = 0$, ταυτότητα.

β. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Για $\alpha \neq -3$, η $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{(\alpha - 3)(\alpha + 3)}{\alpha + 3} \Leftrightarrow x = \alpha - 3$.

81 Θέμα 2 – 13028

α. Για $x = 3$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha 3^2 - 2\alpha 3 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6\alpha - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Άρα $\alpha = 2$.

β. Στην (1) αντικαθιστούμε το $\alpha = 2$ και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 > 0$ και ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, δηλαδή

$x_1 = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{2 - 4}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3 και -1 .

82 Θέμα 2 – 1349

α. Είναι $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3$ ή $2x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = 4$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$

β. Έχουμε $\alpha = -1, \beta = 2$ και $\gamma = 3$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3 = 4 = 12 = 16 > 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \dfrac{-2 \pm 4}{-2}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{-2 + 4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$ και $x_2 = \dfrac{-2 - 4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$.

Άρα $x = 3$ ή $x = -1$

83 Θέμα 2 – 1290

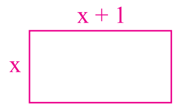
α. Επειδή η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 1 έχουμε

$$1^2 - (\lambda - 1)1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β. Για $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 - x + 6 = 0$, (2) .

Η (2) έχει $\alpha=1$, $\beta=-1$ και $\gamma=6$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot6=1-24=-23<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

84 Θέμα 2 – 1285



α. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(x+1)+2x=4x+2$, $x>0$ και το εμβαδόν του

$$E=(x+1)\cdot x=x^2+x\ ,\quad x>0$$

β. Έχουμε $E=90 \Leftrightarrow x^2+x=90 \Leftrightarrow x^2+x-90=0$.
Είναι $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-90$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-90)=361>0$.

Οι ρίζες είναι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm19}{2}$

$x_1=\dfrac{-1+19}{2}=\dfrac{18}{2}=9$ και $x_2=\dfrac{-1-19}{2}=\dfrac{-20}{2}=-10$, που απορρίπτεται.

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x=9$ μέτρα και $x+1=10$ μέτρα.

85 Θέμα 4 – 1509

Είναι:

α. $\Delta=[-(\alpha^2-1)]^2-4\alpha\cdot(-\alpha)=(\alpha^2-1)^2+4\alpha^2=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2$

β. Είναι $\Delta>0$, για κάθε $\alpha\neq0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$\rho_{1,2}=\dfrac{\alpha^2-1\pm\sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1\pm(\alpha^2+1)}{2\alpha}$, οπότε

$\rho_1=\dfrac{\alpha^2-1+(\alpha^2+1)}{2\alpha}=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha}=\alpha$ και $\rho_2=\dfrac{\alpha^2-1-(\alpha^2+1)}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=\dfrac{-2}{2\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}$

γ. Είναι $|\rho_1-\rho_2|=2 \Leftrightarrow \left|\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha^2+1|}{|\alpha|}=2 \Leftrightarrow |\alpha^2+1|=2|\alpha| \Leftrightarrow \alpha^2+1=2|\alpha|$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha|+1=0 \Leftrightarrow (|\alpha|-1)^2=0 \Leftrightarrow |\alpha|-1=0 \Leftrightarrow |\alpha|=1 \Leftrightarrow \alpha=\pm1$.

86 Θέμα 4 – 13320

α. Έστω Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων (Ι) και (ΙΙ) αντίστοιχα. Τότε

$\Delta_1=\beta^2-4\alpha\gamma$ και $\Delta_2=\beta^2-4\gamma\alpha$. Άρα $\Delta_1=\Delta_2$, που σημαίνει ότι οι εξισώσεις (Ι) και (ΙΙ) ή θα έχουν δύο διαφορετικές λύσεις η κάθε μία αν $\Delta_1=\Delta_2>0$, ή και οι δύο θα είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$ αν $\Delta_1=\Delta_2<0$ ή θα έχουν από μία διπλή ρίζα η κάθε μία, αν $\Delta_1=\Delta_2=0$.

β. Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (Ι) θα ισχύει η σχέση $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$ (1).

Για να είναι ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$\gamma(\dfrac{1}{\rho})^2+\beta\dfrac{1}{\rho}+\alpha=0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\rho^2}+\dfrac{\beta}{\rho}+\alpha=0 \Leftrightarrow \gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$ που ισχύει από την (1).

γ. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (Ι). Τότε θα ισχύει

$\alpha(\sqrt{2})^2+\beta\sqrt{2}+\gamma=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\gamma+\beta\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}=-\dfrac{2\alpha+\gamma}{\beta}$, αφού είναι $\beta\neq0$.

Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι πηλίκο ακεραίων, επομένως ρητός, άτοπο.
Ανάλογα, αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρίζα ούτε της εξίσωσης (ΙΙ).

87 Θέμα 4 – 1476

α. Είναι $\alpha=2$, $\beta=\lambda$ και $\gamma=-36$ οπότε $\Delta=\lambda^2-4\cdot2\cdot(-36)=\lambda^2+288>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης έχουμε $2\rho^2+\lambda\rho-36=0$, (1).

i. Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης, αν και μόνο αν

$$2(-\rho)^2-\lambda\cdot(-\rho)-36=0 \Leftrightarrow 2\rho^2+\lambda\rho-36=0 \text{ , που ισχύει.}$$

ii. • Αν $\rho=0$, τότε η $(1)\Leftrightarrow 2\cdot 0^2+\lambda\cdot 0-36=0 \Leftrightarrow -36=0$, άτοπο. Άρα $\rho\neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$-36x^2+\lambda x=2=0$ αν και μόνο αν

$$-36\cdot\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\lambda\cdot\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow -\frac{36}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow -36+\lambda\rho+2\rho^2=0 \Leftrightarrow 2\rho^2+\lambda\rho-36=0 \text{ , που ισχύει.}$$

88 Θέμα 4 – 1469

α. Είναι $\alpha=\lambda$, $\beta=2\lambda-1$ και $\gamma=\lambda-1$, οπότε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda-1)^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda=1$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(2\lambda-1)\pm\sqrt{1}}{2\cdot\lambda}=\frac{1-2\lambda\pm 1}{2\lambda}$$

Οπότε $x=\frac{1-2\lambda+1}{2\lambda}=\frac{2-2\lambda}{2\lambda}=\frac{2(1-\lambda)}{2\lambda}=\frac{1-\lambda}{\lambda}$ και $x=\frac{1-2\lambda-1}{2\lambda}=\frac{-2\lambda}{2\lambda}=-1$.

γ. Η απόσταση των ριζών είναι ίση με 2, όταν $d(x_1,x_2)=2\Leftrightarrow |x_2-x_1|=2\Leftrightarrow \left|-1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}=2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda}=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}.$$

89 Θέμα 4 – 1459

α. Αντικαθιστούμε στη σχέση $x=-5$ και έχουμε

$$\lambda=(2(-5)+5)^2-8\cdot(-5)=(-10+5)^2+40=(-5)^2+40=25+40=65$$

β. Αντικαθιστούμε στη σχέση $\lambda=20$ και έχουμε

$$20=(2x+5)^2-8x\Leftrightarrow 20=4x^2+20x+25-8x\Leftrightarrow 4x^2+12x+5=0$$

Είναι $\alpha=4$, $\beta=12$ και $\gamma=5$ οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=12^2-4\cdot4\cdot5=144-80=64>0$.

Οι ρίζες είναι $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot 4}=\frac{-12\pm 8}{8}$.

Οπότε $x=\frac{-12+8}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ και $x=\frac{-12-8}{8}=\frac{-20}{8}=-\frac{5}{2}$.

γ. i. Είναι $\lambda=(2x+5)^2-8x\Leftrightarrow\lambda=4x^2+20x+25-8x\Leftrightarrow 4x^2+12x+(25-\lambda)=0$, (2).

Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να είναι $\lambda=5$. Από την (2) έχουμε:

$4x^2+12x+(25-5)=0\Leftrightarrow 4x^2+12x+20=0\Leftrightarrow x^2+3x+5=0$, που είναι αδύνατη αφού έχει $\Delta=-11<0$, άτοπο. Άρα $\lambda\neq 5$.

ii. Οι δυνατές τιμές του λ είναι οι τιμές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε πρέπει:
$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 12^2-4\cdot4\cdot(25-\lambda)\geq 0\Leftrightarrow 144-400+16\lambda\geq 0\Leftrightarrow 16\lambda\geq 256\Leftrightarrow\lambda\geq 16$.

90 Θέμα 4 – 1452

α. Είναι $\alpha=1$, $\beta=-3$ και $\gamma=-4$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25>0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}$.

Οπότε $x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ και $x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

β. Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) , αν και μόνο αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{3\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$, που ισχύει.

ii. Επειδή ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) και οι λύσεις της (1) είναι $x_1 = 4$ και $x_2 = -1$ έχουμε

$\frac{\alpha}{\beta} = 4$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = -1$.

Οπότε:
- $\alpha = -\beta$, αδύνατο αφού οι α , β είναι ομόσημοι.
- $\alpha = 4\beta$

Άρα ο α είναι τετραπλάσιος του β .

91 Θέμα 4 – 1416

α. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

Η μεσαία σειρά είναι η 13^{η} $\left(\frac{25+1}{2} = 13\right)$.

Τα καθίσματα της:
- μεσαίας σειράς είναι $\alpha_{13} = \alpha_1 + (13-1)\omega = 12 + 12\cdot 2 = 36$
- τελευταίας σειράς είναι $\alpha_{25} = \alpha_1 + (25-1)\omega = 12 + 24\cdot 2 = 60$

β. Η χωρητικότητα του σταδίου είναι $S_{25} = \frac{25}{2}\cdot[2\alpha_1 + (25-1)\omega] = \frac{25}{2}\cdot(2\cdot 12 + 24\cdot 2) =$

$= \frac{25}{2}(24+48) = \frac{25}{2}\cdot 72 = 25\cdot 36 = 900$ καθίσματα.

γ. Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι $S = \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \ldots + \alpha_{14} = S_{14} - S_6$.

Είναι:
- $S_{14} = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) = 7\cdot(2\cdot 12 + 13\cdot 2) = 7\cdot(24+26) = 7\cdot 50 = 350$
- $S_6 = \frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega) = 3\cdot(2\cdot 12 + 5\cdot 2) = 3\cdot(24+10) = 3\cdot 34 = 102$

Άρα $S = 350 - 102 = 248$.

92 Θέμα 4 – 1516

α. • Η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$, έχει $\Delta = (-14)^2 - 4\cdot 3\cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$ και ρίζες τις

$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{2\cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6}$, οπότε $x = \frac{24}{6} = 4$ ή $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

• Η εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$, έχει

$\Delta = (-14)^2 - 4\cdot 8\cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{16}$, οπότε $x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ή $x = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

β. i. Αν $\rho = 0$, τότε $\alpha\cdot 0^2 + \beta\cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$.

ii. Επειδή ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) έχουμε $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.

Για $x = \frac{1}{\rho}$ η (4) γίνεται

$$\gamma \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$, που ισχύει.

93 Θέμα 4 – 14406

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta\cdot(\alpha^2+1) = \alpha\cdot(\beta^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\cdot\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha\cdot\beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta - 1) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta = 1.$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1.$$

γ) Γνωρίζουμε πως $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha \cdot \beta = 1$ με $\alpha, \beta > 0$. Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$$s=\alpha+\beta \text{ και } p=\alpha\cdot\beta,\ x^2 - sx + p = 0$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{5\pm3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$ ή αντίστροφα.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$. Για να είναι το σχήμα τετράγωνο πρέπει τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να γίνουν ίσα. Έστω ω ο αριθμός που θα προσθέσουμε στον μικρότερο που είναι ο β για να γίνει ίσο με το α, τότε :

$$\alpha = \beta + \omega \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2}.$$

Άρα πρέπει να προστεθεί στο β ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

94 Θέμα 4 – 14543

α) Έχουμε διαδοχικά: $3=4-1=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$ και σκεπτόμενοι ότι

$7=M^2-N^2=(M-N)(M+N)$, ένα γινόμενο ακεραίων που δίνει 7 είναι οι **1**, 7.

Αν Μ>Ν τότε Μ-Ν=**1**, Μ+Ν=7 και λύνοντας το σύστημα έχουμε με αντικατάσταση:

Μ=Ν+**1** και Ν+**1** +Ν = 7 , άρα 2Ν = 6, δηλαδή Ν = 3 και Μ= 4 .

Οπότε $7=(4)^2-(3)^2$.

β) i) Έστω οι διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Η διαφορά των τετραγώνων τους είναι $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Ο οποίος είναι περιττός αριθμός.

ii) Έχουμε ότι $2021=2\cdot 1010+1$.

Από την απόδειξη στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$2021=(1010+1)^2-(1010)^2=1011^2-1010^2$.

γ) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ν+**1**, ενώ το ΓΗΡΚ έχει πλευρά ν.

Ισχύει $(\nu+1)^2-\nu^2=45$, οπότε $2\nu+1=45 \Leftrightarrow 2\nu=44 \Leftrightarrow \nu=22$.

95 Θέμα 4 – 12683

α. Έστω x το μήκος και το πλάτος της δεξαμενής, οπότε το ύψος της θα είναι $\frac{x}{4}$. Ο όγκος της δεξαμενής V είναι: $V=x\cdot x\cdot\frac{x}{4}=\frac{x^3}{4}$.

Έχουμε $V=16 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4}=16 \Leftrightarrow x^3=64 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x=4\text{ m}$.

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος 4m και ύψος 1 m.

β. Έστω $x, (x>0)$ το μήκος της δεξαμενής. Τότε το πλάτος της θα είναι $x-2$ και ο όγκος της δεξαμενής θα ισούται με $V=2x(x-2)$. Οπότε έχουμε:

$$V=16 \Leftrightarrow 2x(x-2)=16 \Leftrightarrow x(x-2)=8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36>0$.

Οπότε $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm6}{2} \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$, που απορρίπτεται.

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ. Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του υγρού μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του υγρού θα είναι:

$V_{\pi\varepsilon\tau\rho.}=10 \Leftrightarrow 4\cdot2\cdot x=10 \Leftrightarrow 8\cdot x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{8} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\text{ m}$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4}$ m.

96 Θέμα 2 – 1348

α. Είναι $\alpha=1$, $\beta=-2\lambda$ και $\gamma=4(\lambda-1)$ και

$$\Delta=4\lambda^2-16(\lambda-1)=4\lambda^2-16\lambda+16=4(\lambda^2-4\lambda+4)=4(\lambda-2)^2$$

β. Επειδή $\Delta=4(\lambda-2)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

- $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-2\lambda}{1}=2\lambda$
- $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{4(\lambda-1)}{1}=4(\lambda-1)=4\lambda-4$

Οπότε $x_1+x_2=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow 2\lambda=4\lambda-4 \Leftrightarrow 4=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=2$.

97 Θέμα 2 – 1359

α. $|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ ή $x=2-\sqrt{3}$.

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$.

Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2=2-\sqrt{3}$. Είναι $S=x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$ και

$P=x_1\cdot x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2==4-3=1$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$.

98 Θέμα 2 – 1262

α. Είναι:

i. $A+B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}==\dfrac{10}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{10}{25-5}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

ii. $A\cdot B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}=\dfrac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{1}{25-5}=\dfrac{1}{20}$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0$ με $S=A+B=\dfrac{1}{2}$ και $P=A\cdot B=\dfrac{1}{20}$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$.

99 Θέμα 2 – 1337

α. Είναι:

- $A+B=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{6}{9-7}=\dfrac{6}{2}=3$
- $AB=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{1}{9-7}=\dfrac{1}{2}$

β. Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ όπου $S=A+B=3$ και $P=A\cdot B=\dfrac{1}{2}$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-3x+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-6x+1=0$.

100 Θέμα 2 – 1280

α. Είναι:
- $\alpha+\beta=2$
- $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta=-15$

β. Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=2$, $P=\alpha\beta=-15$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-2x-15=0$.

Είναι:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$

- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 8}{2}$

Οπότε $x_1=\dfrac{2+8}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ και $x_2=\dfrac{2-8}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$.

Οπότε $(\alpha=5$ και $\beta=-3)$ ή $(\alpha=-3$ και $\beta=5)$.

101 Θέμα 2 – 1315

α. Έχουμε:
- $\alpha\beta=4$
- $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=20 \Leftrightarrow 4\cdot(\alpha+\beta)=20 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5$.

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=5$ και $P=\alpha\beta=4$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$.

Είναι:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2x1}=\dfrac{5\pm3}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ και $x_2=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Άρα $(\alpha=4$ και $\beta=1)$ ή $(\alpha=1$ και $\beta=4)$.

102 Θέμα 2 – 1316

α. Είναι:
- $\alpha+\beta=-1$
- $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta(-1)^2=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta=-12$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=-1$ και $P=\alpha\beta=-12$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2+x-12=0$.

Είναι:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm7}{2}$. Οπότε: $x_1=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$.

Άρα $(\alpha=-4$ και $\beta=3)$ ή $(\alpha=3$ και $\beta=-4)$.

103 Θέμα 2 – 1334

α. Είναι:
- $\alpha+\beta=12$
- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 144=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow -2\alpha\beta=128 \Leftrightarrow \alpha\beta=-64$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=12$, $P=\alpha\beta=-64$, οπότε η εξίσωση είναι $x^2-12x-64=0$, (1) .

γ. Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε

$$12^2=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow 144=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-128 \Leftrightarrow \alpha\beta=-64$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx-P=0 \quad \text{με} \quad S=\alpha+\beta=12 \quad \text{και} \quad P=\alpha\beta=-64$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-12$ και $\gamma=-64$, έχουμε:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-64)=144+256=400>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{400}}{2\cdot1}=\dfrac{12\pm20}{2}$

Οπότε $x_1=\dfrac{12+20}{2}=\dfrac{32}{2}=16$ και $x_2=\dfrac{12-20}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$.

104 Θέμα 2 – 1288

α. Είναι: • $\alpha=1$, $\beta=-\kappa$, $\gamma=-2$

• $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-\kappa)^2-4\cdot1\cdot(-2)=\kappa^2+8>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

β. Είναι $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-3}{1}=3$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-2}{1}=-2$.

ii. Είναι: • $S'=\rho_1+\rho_2=2(x_1+x_2)=2S=2\cdot3=6$.

• $P'=\rho_1\cdot\rho_2=2x_1\cdot2x_2=4x_1x_2=4P=4\cdot(-2)=-8$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-S'x+P'=0\Leftrightarrow x^2-6x-8=0$.

105 Θέμα 2 – 1269

α. Το τριώνυμο $2x^2+5x-1$ έχει $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot(-1)=25+8=33>0$, οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 .

β. Είναι: • $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{5}{2}$

• $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

• $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$

γ. Είναι $S=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=5$ και $P=\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}=-2$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-5x-2=0$.

106 Θέμα 4 – 1508

α. Η εξίσωση έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot\lambda=4-4\lambda=4(1-\lambda)>0$, αφού $\lambda<1\Leftrightarrow1-\lambda>0$, οπότε έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Είναι $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-2}{1}=2$, άρα $x_1+x_2=2$, (1).

γ. i. Έχουμε $|x_1-2|=|x_2+2|\Leftrightarrow x_1-2=x_2+2$ ή $x_1-2=-(x_2+2)\Leftrightarrow x_1-x_2=4$ ή $x_1+x_2=0$
Επειδή $x_1+x_2=2$, αποκλείεται $x_1+x_2=0$, οπότε $x_1-x_2=4$, (2) .

ii. Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $x_1+x_2+x_1-x_2=2+4\Leftrightarrow2x_1=6\Leftrightarrow x_1=3$.

Οπότε η (1) $3+x_2=2\Leftrightarrow x_2=-1$. Είναι $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow3\cdot(-1)=\dfrac{\lambda}{1}\Leftrightarrow\lambda=-3$.

107 Θέμα 4 – 1463

α. Είναι $\Delta=[-(\alpha^2+\beta^2)]^2-4\alpha\beta\cdot\alpha\beta=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

β. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha^2-\beta^2)^2>0\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2\neq0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha-\beta\neq0$ και $\alpha+\beta\neq0$, που ισχύει αφού α, β θετικοί. Άρα $\alpha\neq\beta$.

Είναι: $x_{1,2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2}}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta}$

οπότε $x_1=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

γ. Είναι $(1+x_1)(1+x_2)\geq4\Leftrightarrow(1+\dfrac{\alpha}{\beta})(1+\dfrac{\beta}{\alpha})\geq4\Leftrightarrow1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+1\geq4\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}\geq2$, $\alpha\beta>0$

$\Leftrightarrow\alpha\beta\dfrac{\beta}{\alpha}+\alpha\beta\dfrac{\alpha}{\beta}\geq2\alpha\beta\Leftrightarrow\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\geq0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq0$, που ισχύει.

108 Θέμα 4 – 1461

α. Είναι • $\alpha=1$, $\beta=-\lambda$ και $\gamma=1$

• $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot 1=\lambda^2-4$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4>0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|^2>2^2 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow \lambda<-2 \text{ ή } \lambda>2$$

β. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (1) τότε $\rho^2-\lambda\rho+1=0$.

Για $x=\dfrac{1}{\rho}$ η εξίσωση (1) γίνεται $\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2-\lambda\cdot\dfrac{1}{\rho}+1=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho^2-\lambda\rho+1=0$ που ισχύει.

γ. i. Αν $\lambda>2$, τότε $S=x_1+x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda>0$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{1}{1}=1>0$.

Επειδή $S>0$ και $P>0$ οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικοί αριθμοί.

ii. Είναι $P=1 \Leftrightarrow x_1x_2=1 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

Οπότε $x_1+4x_2\geq 4 \Leftrightarrow x_1+\dfrac{4}{x_1}\geq 4 \Leftrightarrow x_1^{\,2}+4\geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2-4x_1+4\geq 0 \Leftrightarrow (x_1-2)^2\geq 0$, που ισχύει.

109 Θέμα 4 – 1431

α. Είναι: • $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=2-\lambda^2$

• $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\,(2-\lambda^2)=16-8+4\lambda^2=8+4\lambda^2$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Είναι: **i.** $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-4}{1}=4$

ii. $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2-\lambda^2}{1}=-\lambda^2+2$

γ. i. Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$. Έχουμε $x_1+x_2=4 \Leftrightarrow 2+\sqrt{3}+x_2=4 \Leftrightarrow x_2=2-\sqrt{3}$.

ii. Είναι $x_1x_2=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow 2^2-(\sqrt{3})^2=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1 .$$

110 Θέμα 4 – 1491

α. Είναι $\Delta=(-5\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=25\lambda^2+4>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. i. Είναι $S=x_1+x_2=-\dfrac{-5\lambda}{1}=5\lambda$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{-1}{1}=-1$.

Οπότε $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24}=0 \Leftrightarrow (5\lambda)^2-18-7(-1)^{24}=0 \Leftrightarrow 25\lambda^2-18-7=0 \Leftrightarrow 25\lambda^2=25$

$$\Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1$$

ii. Για $\lambda=1$ είναι $x_1+x_2=5\cdot 1=5$ και $x_1x_2=-1$.

Οπότε $x_1^{\,2}x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^{\,2}=x_1^{\,2}x_2+x_1x_2^{\,2}-3x_1-3x_2+4=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)-3(x_1+x_2)+4=-1\cdot 5-3\cdot 5+4=-5-15+4=-16$.

111 Θέμα 4 – 1407

α. i. $|t_A-t_\Delta|=|t_B-t_\Delta| \Leftrightarrow t_A-t_\Delta=t_B-t_\Delta$, (1) ή $t_A-t_\Delta=-t_B+t_\Delta$, (2)

• η $(1) \Leftrightarrow t_A=t_B$, που απορρίπτεται αφού $t_A<t_B$

• η $(2) \Leftrightarrow t_A+t_B=2t_\Delta \Leftrightarrow 2t_\Delta=t_A+t_B \Leftrightarrow t_\Delta=\dfrac{t_A+t_B}{2}$

ii. Είναι:
- $t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0$, άρα $t_\Gamma < t_B$, (1)
- $t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0$, άρα $t_\Delta < t_\Gamma$, (2)
- $t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0$, άρα $t_A < t_\Delta$, (3)

Οπότε $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$.

Επομένως, $1^{ος}$ τερμάτισε ο Αργύρης, $2^{ος}$ ο Δημήτρης, $3^{ος}$ ο Γιώργος και $4^{ος}$ ο Βασίλης.

β. i. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$.
Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - 6t + 8 = 0$.

ii. Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

και ρίζες τις $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$, οπότε $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ λεπτά, $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2\cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ λεπτά.

112 Θέμα 4 – 1478

α. i. Αν α, β οι διαστάσεις του ορθογωνίου, έχουμε
- $\Pi = 34 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 34 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 17$
- $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 169$, (1)

Είναι $\alpha + \beta = 17 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 = 289 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 289 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 169 + 2\alpha\beta = 289 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 120 \Leftrightarrow \alpha\beta = 60$
Οπότε $E = \alpha \cdot \beta = 60 \text{ cm}^2$.

ii. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = \kappa + \lambda = 17$ και $P = \kappa \cdot \lambda = 60$
Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 - 17x + 60 = 0$, (1).

iii. Η εξίσωση (1) έχει:
- $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$
- $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2}$

Οπότε $x_1 = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12$ και $x_2 = \frac{17-7}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Άρα οι διαστάσεις είναι 5 cm και 12 cm.

β. Αρκεί να υπάρχουν α, β τέτοια ώστε
- $\alpha\beta = 40$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2 \cdot 40 = 64 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 80 = 64$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 = 144 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$, αφού $\alpha, \beta > 0$

Άρα, τα α, β πρέπει να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x + 40 = 0$, η οποία είναι αδύνατη, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.

113 Θέμα 4 – 14651

α. Είναι $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})$ και $P = x_1 \cdot x_2 = 16$. Οπότε το ορθογώνιο έχει:

i. $\Pi = 2(x_1 + x_2) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$ **ii.** $E = x_1 x_2 = 16$

β. Είναι $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \overset{\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

γ. Είναι $\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται

$x^2 - 4(1+1)x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $x = 4$. Άρα $x_1 = x_2 = 4$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

114 Θέμα 4 – 1493

α. Από τους τύπους Vieta έχουμε $S = x_1 + x_2 = 2$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda(2-\lambda)$.

Το ορθογώνιο έχει:

i. $\Pi = 2(x_1 + x_2) = 4$ **ii.** $E = x_1 x_2 = \lambda(2-\lambda)$

β. Είναι $E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \ge 0$, που ισχύει .

γ. Είναι $E = 1 \overset{\cdot\beta}{\Leftrightarrow} (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, διπλή.

Άρα $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

115 Θέμα 4 – 13312

α. Η εξίσωση (1) είναι 2$^{\text{ου}}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda \ge 0 \Leftrightarrow -4\lambda \ge -36 \Leftrightarrow \lambda \le 9$.

β. i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α , β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο **α.** ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda \le 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \le 9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta = 0$ δηλαδή $36 - 4\lambda = 0$ οπότε $-4\lambda = -36$ και τελικά $\lambda = 9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha \cdot \beta = 9$.

γ. Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12.

Τότε $2\alpha + 2\beta = 12$ δηλαδή $\alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.

Δείξαμε στο **β.** ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 6$, τότε $\alpha \cdot \beta \le 9$ και μάλιστα $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

116 Θέμα 4 – 14490

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6.

Άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β) i. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$ ως δευτεροβάθμια δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν

Δ<0.

Επομένως,

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4 \cdot \lambda + 8 = 12 - 4 \cdot \lambda.$

Άρα $12 - 4 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3.$

Δηλαδή $\lambda \in (3, +\infty)$, επιπλέον $\lambda \in \Omega$, δηλαδή $\lambda \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Προκύπτει λ=4 ή 5 ή 6.

Άρα το ζητούμενο σύνολο $A=\{4,5,6\}$.

ii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Σύμφωνα με τους τύπους Vieta $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$.

Άρα $\lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

γ) Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ διπλή ρίζα.

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι η x=1 διπλή.

117 Θέμα 2 – 1238

α. Είναι $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$.

Είναι:
- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$
- $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}$

Οπότε $x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$ και $x_2\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$. Πρέπει: $x-2\neq0\Leftrightarrow x\neq2$.

Για $x\neq2$ είναι $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0\Leftrightarrow \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} x=3$ ή $x=2$, που απορρίπτεται.

Άρα $x=3$.

118 Θέμα 4 – 1448

α. Είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot\alpha\cdot\alpha=25-4\alpha^2$.

Αρκεί $\Delta\geq0\Leftrightarrow 25-4\alpha^2\geq0\Leftrightarrow -4\alpha^2\geq-25 \Leftrightarrow \alpha^2\leq\frac{25}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}\leq\sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, που ισχύει.

Αν x_1, x_2 οι ρίζες τότε $x_1x_2=\frac{\alpha}{\alpha}=1$, οπότε είναι αντίστροφες.

β. Για $\alpha=2$, έχουμε $2x^2-5x+2=0$.

Είναι:
- $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$
- $x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}==\frac{5\pm3}{4}$.

Οπότε $x=\frac{8}{4}=2$ ή $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

γ. Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=y$ (1), οπότε έχουμε $2y^2-5y+2=0 \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} y=2$ ή $y=\frac{1}{2}$.

- Για $y=2$ η (1) $\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2+1=2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$
- Για $y=\frac{1}{2}$ η (1) $\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+2=x \Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$

Η εξίσωση έχει $\Delta=(-1)^2-4\cdot2\cdot2=1-16=-15<0$, οπότε είναι αδύνατη. Άρα $x=1$.

119 Θέμα 4 – 1460

α. Από τους τύπους Vieta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-\beta}{1} = \beta$, οπότε $|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = \pm 4$.

β. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 - 4\cdot 1\cdot \gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \ 16 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma < 4$$

γ. ► Για $\beta = 4$ η εξίσωση $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$, (2).

Θέτουμε $|x| = y$ οπότε η (2) $\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$.

Είναι:
- $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:
- $y_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

Οπότε $y = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ ή $y = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

- Για $y = 3 \ \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- Για $y = 1 \ \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

► Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) $\Leftrightarrow x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$, (3)

Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε η $(3) \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 3 = 0$.

Είναι:
- $\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$
- $\omega_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 2}{2}$.

  Οπότε $\omega = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ ή $\omega = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

- Για $\omega = -1 \ \Leftrightarrow |x| = -1$, αδύνατη
- Για $\omega = -3 \ \Leftrightarrow |x| = -3$, αδύνατη

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\beta = -4$.

120 Θέμα 4 – 1477

α. Είναι $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \overset{x^2 = y}{\Leftrightarrow} y^2 - 8y - 9 = 0$.

- $\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot (-9) = 64 + 36 = 100$
- $y_{1,2} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$.

  Οπότε $y = \dfrac{18}{2} = 9$ ή $y = \dfrac{-2}{2} = -1$.

- Αν $y = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- Αν $y = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$, αδύνατη .

Άρα η εξίσωση έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

β. Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y^2 + \beta y + \gamma = 0$, (1) .

i. Η (1) έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Είναι:
- $\beta^2 \geq 0$
- $\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0$

Οπότε $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii. Η (1) έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$, από το ερώτημα **β.i.** και $P = \gamma < 0$. Άρα έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και από τη θετική ρίζα προκύπτει ότι η αρχική έχει δύο άνισες ρίζες.

121 Θέμα 4 – 12912

α) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 7y + 12 = 0 .$$

Το τριώνυμο $y^2 - 7y + 12$ έχει $\alpha = 1, \beta = -7, \gamma = 12$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0 .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ \frac{7-1}{2} = 3 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

- Για $y = 4$ έχουμε : $x^2 = 4$, δηλαδή $x = 2$ ή $x = -2$.
- Για $y = 3$ έχουμε : $x^2 = 3$, δηλαδή $x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$

β) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \beta y + \gamma = 0 . \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \text{, από υπόθεση.}$$

Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις οποίες συμβολίζουμε y_1 και y_2.

Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών βρίσκουμε:

- $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta}{1} = -\beta > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 έχουν άθροισμα θετικό.
- $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{1} = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 είναι ομόσημες.

Εφόσον οι ρίζες είναι ομόσημες και έχουν άθροισμα θετικό, θα είναι και οι δύο θετικές.

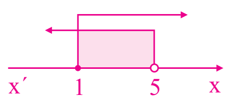
Οπότε: $\begin{cases} x^2 = y_1 \Leftrightarrow \\ x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x^2 = y_2 \Leftrightarrow \\ x = \sqrt{y_2} \text{ ή } x = -\sqrt{y_2} \end{cases}$

Τελικά η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

122 Θέμα 2 – 1357

α. Είναι:

- $3x - 1 < x + 9 \Leftrightarrow 3x - x < 9 + 1 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$
- $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -x - 2x \leq 1 - 4 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$



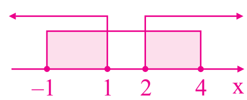
β. Το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το διάστημα $[1, 5)$.

123 Θέμα 2 – 1330

α. Είναι:

i. $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

ii. $|2x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 1$ ή $2x - 3 \leq -1 \Leftrightarrow 2x \geq 4$ ή $2x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \leq 1$



β. Οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν όταν:
$x \in [-1, 1] \cup [2, 4]$

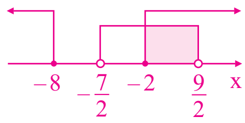
124 Θέμα 2 – 1365

Είναι:

α. $|x-\frac{1}{2}|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-4<x<\frac{1}{2}+4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

β. $|x+5| \geq 3 \Leftrightarrow x+5 \geq 3$ ή $x+5 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq -2$ ή $x \leq -8$

γ. Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι: $x \in [-2, \frac{9}{2})$.



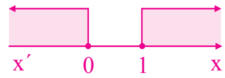
125 Θέμα 2 – 1374

α. Είναι: **i.** $|1-2x|<5 \Leftrightarrow |2x-1|<5 \Leftrightarrow -5<2x-1<5 \Leftrightarrow -5+1<2x<5+1$

$\Leftrightarrow -4<2x<6 \Leftrightarrow -\frac{4}{2}<x<\frac{6}{2} \Leftrightarrow -2<x<3$

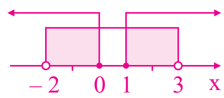
ii. $|1-2x| \geq 1 \Leftrightarrow |2x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x-1 \geq 1$ ή $2x-1 \leq -1$

$\Leftrightarrow 2x \geq 2$ ή $\Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq 0$



β. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών οι κοινές λύσεις είναι: $x \in (-2, 0] \cup [1, 3)$.

Οι ζητούμενες ακέραιες τιμές του x είναι: $-1, 0, 1, 2$.

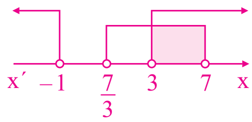


126 Θέμα 2 – 1355

α. Είναι $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow 3<x<7$

β. Είναι $|2-3x|>5 \Leftrightarrow |3x-2|>5 \Leftrightarrow 3x-2>5$ ή $3x-2<-5 \Leftrightarrow 3x>7$ ή $3x<-3 \Leftrightarrow x>\frac{7}{3}$ ή $x<-1$

γ. Οι ζητούμενες κοινές λύσεις είναι: $x \in (3, 7)$.

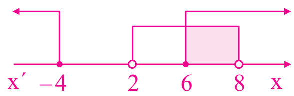


127 Θέμα 2 – 1243

α. Είναι $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow x-1 \geq 5$ ή $x-1 \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 6$ ή $x \leq -4$

β. Είναι $d(x, 5)<3 \Leftrightarrow |x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow 2<x<8$

γ. Οι κοινές λύσεις των **α.** και **β.** είναι: $x \in [6, 8)$.



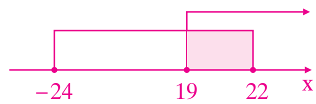
128 Θέμα 2 – 13025

α. Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $\frac{-(3-2x)}{7} \geq 5$ οπότε $\frac{2x-3}{7} \geq 5 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 35$, άρα

$2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$.

β. Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα
$|x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -23-1 \leq x \leq 23-1 \Leftrightarrow -24 \leq x \leq 22$.

γ. Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα,
απ' όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.



129 Θέμα 4 – 13474

α. Είναι:

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x-1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$$

β. Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1-\sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1+\sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

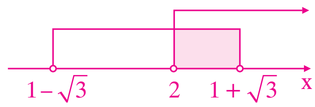
$$s = x_1 + x_2 = 1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 2 \quad \text{και} \quad p = x_1 x_2 = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) = 1-3 = -2$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ. Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 6-(x+4) < 0 \Leftrightarrow 6 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \le 1+\sqrt{3}$.



δ. Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $(2\,, 1+\sqrt{3}\,]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \le 3(1+\sqrt{3})$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \le 4(1+\sqrt{3})$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3) , (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha + 4\beta \le 7(1+\sqrt{3})$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha+4\beta}{7} \le 1+\sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2) , που είναι το ζητούμενο.

130 Θέμα 2 – 1367

Είναι:

α. $|2x-4| = 3|x-1| \Leftrightarrow |2x-4| = |3(x-1)| \Leftrightarrow |2x-4| = |3x-3| \Leftrightarrow 2x-4 = 3x-3$ ή $2x-4 = -(3x-3)$
$\Leftrightarrow 2x - 3x = -3+4$ ή $2x+3x = 3+4 \Leftrightarrow -x = 1$ ή $5x = 7$
$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = \dfrac{7}{5}$.

β. $|3x-5| > 1 \Leftrightarrow 3x-5 > 1$ ή $3x - 5 < -1 \Leftrightarrow 3x > 6$ ή $3x < 4 \Leftrightarrow x > 2$ ή $x < \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \dfrac{4}{3}) \cup (2, +\infty)$

γ. Επειδή $-1 < \dfrac{4}{3}$, η λύση $x = -1$ της εξίσωσης, είναι και λύση της ανίσωσης.

Είναι:
- $\dfrac{7}{5} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{21-20}{15} = \dfrac{1}{15} > 0$, οπότε $\dfrac{7}{5} > \dfrac{4}{3}$
- $\dfrac{7}{5} - 2 = \dfrac{7-10}{5} = -\dfrac{3}{5} < 0$, οπότε $\dfrac{7}{5} < 2$

Άρα $\dfrac{4}{3} < \dfrac{7}{5} < 2$, οπότε η λύση $x = \dfrac{7}{5}$ της εξίσωσης δεν είναι λύση της ανίσωσης.

131 Θέμα 2 – 1331

α. Η εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$ και

ρίζες τις: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$, οπότε $x_1 = \dfrac{8}{4} = 2$ και $x_2 = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

β. Είναι $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$.

γ. Επειδή $x_1 = -\dfrac{3}{2} \notin (1, 3)$ και $x_2 = 2 \in (1, 3)$, η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι ο αριθμός 2 .

132 Θέμα 2 – 1383

α. Είναι $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$

β. Έχουμε $-3<x<1 \Rightarrow x>-3$ και $x<1 \Rightarrow x+3>0$ και $x-1<0$, οπότε

$|x+3|=x+3$ και $|x-1|=-(x-1)$. Επομένως $K=\dfrac{x+3-(x-1)}{4}=\dfrac{x+3-x+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1$.

133 Θέμα 4 – 13174

α. Η παράσταση Α ορίζεται όταν : $|x|-1\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$

και η παράσταση Β όταν: $|x|-2\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 2 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$

β. Έχουμε: $-x^2+4|x|-3=-|x|^2+4|x|-3$. Θέτουμε $\omega=|x|$, οπότε

$$-|x|^2+4|x|-3=-\omega^2+4\omega-3,$$

που είναι τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς 3 και 1 .

Άρα $-\omega^2+4\omega-3=-(\omega-1)(\omega-3)$ και $-|x|^2+4|x|-3=-(|x|-1)(|x|-3)$.

Συνεπώς: $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}=\dfrac{-(|x|-1)(|x|-3)}{(|x|-1)}=3-|x|$.

Για την παράσταση Β έχουμε: $B=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}=\dfrac{|x|^2-4|x|+4}{|x|-2}=\dfrac{(|x|-2)^2}{(|x|-2)}=|x|-2$.

γ. Η ανίσωση γίνεται:

$B-A<2d(x\,,4)-5 \Leftrightarrow |x|-2-3+|x|<2|x-4|-5 \Leftrightarrow 2|x|-5<2|x-4|-5 \Leftrightarrow$

$|x|<|x-4| \Leftrightarrow |x|^2<|x-4|^2 \Leftrightarrow x^2<(x-4)^2 \Leftrightarrow x^2<x^2-8x+16 \Leftrightarrow x<2$

Δεδομένου ότι για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x\neq\pm1$ και $x\neq\pm2$, τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,-1)\cup(-1,1)\cup(1\,,2)$.

134 Θέμα 4 – 1455

α. Είναι: • $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=\lambda-\lambda^2$

• $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(2\lambda-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Πρέπει $\Delta=0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow 2\lambda-1=0 \Leftrightarrow 2\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{(2\lambda-1)^2}}{2}=\dfrac{1\pm(2\lambda-1)}{2}$.

Οπότε $x_1=\dfrac{1+2\lambda-1}{2}=\dfrac{2\lambda}{2}=\lambda$ και $x_2=\dfrac{1-2\lambda+1}{2}=\dfrac{2-2\lambda}{2}=\dfrac{2(1-\lambda)}{2}=1-\lambda$

Είναι $0<d(x_1,x_2)<2 \Leftrightarrow 0<|x_1-x_2|<2 \Leftrightarrow 0<|\lambda+\lambda-1|<2 \Leftrightarrow 0<|2\lambda-1|<2 \Leftrightarrow |2\lambda-1|>0$ και $|2\lambda-1|<2$

Έχουμε: • $|2\lambda-1|>0 \Leftrightarrow 2\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\dfrac{1}{2}$

• $|2\lambda-1|<2 \Leftrightarrow -2<2\lambda-1<2 \Leftrightarrow -1<2\lambda<3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<\lambda<\dfrac{3}{2}$

Άρα $\lambda\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$.

135 Θέμα 2 – 14474

α) Παρατηρούμε ότι: $2\cdot 1^2+3\cdot 1-5=2+3-5=0$, οπότε το $x_1=1$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο, θα βρούμε και την δεύτερη ρίζα του χρησιμοποιώντας το γινόμενο των ριζών $x_1\cdot x_2=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$.

Οπότε:

$$x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{, δηλαδή}$$

$$1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{ και τελικά}$$

$$x_2=-\frac{5}{2}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2x^2+3x-5=2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

136 Θέμα 2 – 1250

α. Το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25>0$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}$. Οπότε $x_1=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$. Οπότε $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

Άρα $2x^2-3x-2=2(x-2)(x+\frac{1}{2})=(x-2)(2x+1)$.

β. Η παράσταση Κ ορίζεται για εκείνα τα x που ισχύει

$$2x^2-3x-2\neq 0\Leftrightarrow (x-2)(2x+1)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq -\frac{1}{2}$$

γ. Για $x\neq 2$ και $x\neq\frac{1}{2}$ είναι $K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)}=\frac{x-2}{2x+1}$.

137 Θέμα 2 – 1273

α. Είναι: • $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{3}-1$, $\gamma=\sqrt{3}$

• $\Delta=(\sqrt{3}-1)^2+4\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2=(\sqrt{3}+1)^2$

β. Επειδή $\Delta>0$, το τριώνυμο έχει ρίζες τις $x_{1,2}=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}+1)}{-2}$.

Οπότε $x_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{-2}=\frac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{-2}=\frac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$.

Άρα $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=-1\cdot(x+1)\cdot(x-\sqrt{3})=-(x+1)(x-\sqrt{3})$.

138 Θέμα 2 – 14577

α) Παρατηρούμε ότι $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$, οπότε ο αριθμός -1 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ και η μια ρίζα της είναι

$x_1 = -1$. Άρα για την δεύτερη ρίζα της εξίσωσης έχουμε:

$$x_1 \cdot x_2 = -2 \Leftrightarrow$$
$$-1 \cdot x_2 = -2 \Leftrightarrow$$
$$x_2 = 2.$$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

Η παράσταση γίνεται:

$$A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x}.$$

139 Θέμα 2 – 1291

α. Είναι:
- $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$
- $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$. Οπότε $x_1 = \dfrac{4}{2} = 2$ και $x_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

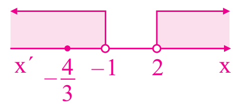
Άρα $x = 2$ ή $x = -1$.

β. Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ. Επειδή $-\dfrac{4}{3} = -1 - \dfrac{1}{3} < -1$, το $-\dfrac{4}{3}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **β.**.



140 Θέμα 2 – 12976

α. Είναι $\Delta = 9 > 0$. Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Επομένως το τριώνυμο γίνεται $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x + \dfrac{1}{2}) = (x-1)(2x+1)$.

β. Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x) \le -1 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \ge 0$.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος.

Άρα μηδενίζεται για $x_1 = 1$ και $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ και επειδή το $\alpha = 2 > 0$ προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

141 Θέμα 2 – 12722

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$.

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$x_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$

β. $-2 \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Από τον διπλανό πίνακα προσήμου του τριωνύμου, έχουμε

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$$

142 Θέμα 2 – 13321

α. Έχουμε:

$$x^4-16=0 \Leftrightarrow x^4=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=2$, $x=-2$.

β. Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου x^2+3x και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του x^2+3x . Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-3$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο διπλανός:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x \in [-3, 0]$.

γ. Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x=-2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3, 0]$.

143 Θέμα 2 – 14319

α) Είναι:

$$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<2x<3+5 \Leftrightarrow 2<2x<8 \Leftrightarrow 1<x<4 .$$

Άρα, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x, με $x \in (1, 4)$.

β) Ο αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης, οπότε $\alpha \in (1, 4)$. Έτσι έχουμε $\alpha>1$, οπότε $\alpha-1>0$

και $\alpha<5$, οπότε $\alpha-5<0$.

Επομένως οι παράγοντες του γινομένου $(\alpha-1)(\alpha-5)$ είναι ετερόσημοι, οπότε

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5)<0 .$$

144 Θέμα 2 – 1306

α. Το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12$ έχει:

- $\Delta=9^2-4\cdot 3\cdot(-12)=81+144=225$
- $x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{2\cdot 3}=\frac{-9\pm 15}{6}$. Οπότε $x_1=\frac{6}{6}=1$ και $x_2=\frac{-24}{6}=-4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $x \in [-4, 1]$.

Το σύνολο των λύσεων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

β. Είναι $2>1 \Rightarrow \sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{1}=1$, οπότε ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **α.** .

145 Θέμα 2 – 1356

α. Το τριώνυμο $2x^2-3x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4}$, οπότε $x_1=\frac{4}{4}=1$ και $x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

β. Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

γ. Είναι $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

Οπότε $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$, άρα οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

146 Θέμα 2 – 1279

α. Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχει $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6}$. Οπότε $x_1 = \frac{6}{6} = 1$ και $x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $3x^2 - 4x + 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{3}, 1]$.

β. Είναι $\frac{3\alpha + 6\beta}{9} = \frac{3(\alpha + 2\beta)}{9} = \frac{\alpha + 2\beta}{3}$.

Επειδή οι αριθμοί α , β είναι λύσεις της ανίσωσης $3x^2 - 4x + 1 \le 0$, έχουμε:

- $\frac{1}{3} \le \alpha \le 1$
- $\frac{1}{3} \le \beta \le 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \le 2\beta \le 2$

Οπότε $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \le \alpha + 2\beta \le 1 + 2 \Leftrightarrow 1 \le \alpha + 2\beta \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{\alpha + 2\beta}{3} \le 1$.

Επομένως ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **α.** .

147 Θέμα 2 – 1271

α. • Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$. Οπότε $x_1 = \frac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{4}{2} = 2$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$-x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$.

• Για το τριώνυμο $x^2 - 16$ είναι $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x^2 - 16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $x^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$.

β. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος **α.** είναι: $x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$.

148 Θέμα 2 – 14189

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1,4)$.

β) Είναι $A = |2x + 2| + |x - 5| = 2|x + 1| + |x - 5|$.

Επειδή $x \in (-1,4)$ τότε $x > -1$ και $x + 1 > 0$. Άρα $|x + 1| = x + 1$.

Επειδή $x \in (-1,4)$ τότε $x < 4 < 5$ και $x - 5 < 0$. Άρα $|x - 5| = 5 - x$.

Επομένως η παράσταση $A = 2(x + 1) + 5 - x = 2x + 2 + 5 - x = x + 7$.

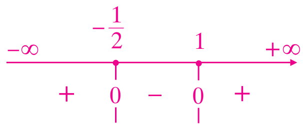
149 Θέμα 2 – 1350

α. • Είναι $|2x-5|\le 3 \Leftrightarrow -3\le 2x-5\le 3 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 8 \Leftrightarrow 1\le x\le 4$.

• Το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9>0$ και

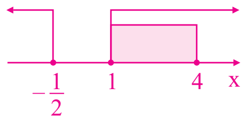
ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\dfrac{1\pm 3}{4}$.

Οπότε $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.



Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Άρα $2x^2-x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.



β. Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι σε κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $x\in[1,4]$.

150 Θέμα 2 – 1363

α. Θέτουμε $|x+1|=y$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται

$$\frac{y}{3}-\frac{y+4}{5}=\frac{2}{3} \overset{\cdot 15}{\Leftrightarrow} 5y-3(y+4)=5\cdot 2 \Leftrightarrow 5y-3y-12=10 \Leftrightarrow 2y=22 \Leftrightarrow y=11$$

Οπότε $|x+1|=11 \Leftrightarrow x+1=11$ ή $x+1=-11 \Leftrightarrow x=10$ ή $x=-12$.

β. Είναι $-x^2+2x+3\le 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3\ge 0$.

Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 4}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-2}{2}=-1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$x^2-2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

γ. Επειδή $10\in[2,+\infty)$ και $-12\in(-\infty,-1]$, οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος **α.** είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος **β.** .

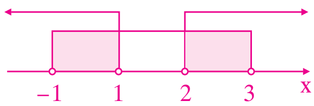
151 Θέμα 4 – 13176

α. Έχουμε: $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty\,,\,1]\cup[2\,,+\infty)$.



β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1\,,1]\cup[2\,,3)$.

γ. Εφόσον οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, θα ισχύει: $\rho_1\,,\rho_2\in(-1\,,1]\cup[2\,,3)$.

i. Αν $\rho_1\,,\rho_2\in(-1\,,1]$, τότε : $\begin{cases}-1<\rho_1\le 1\\ -3<3\rho_2\le 3\end{cases}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$-4<\rho_1+3\rho_2\le 4 \Leftrightarrow -1<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}\le 1$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.

ii. Αν $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2\,,3)$, τότε : $\begin{cases}-1<\rho_1\le 1\\ 6<3\rho_2\le 9\end{cases}$, και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$5<\rho_1+3\rho_2<10 \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο εάν $2\le\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$.

152 Θέμα 2 – 1277

α. Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot21=100-84=16$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{10\pm4}{2}$, οπότε $x_1=\dfrac{14}{2}=7$ και $x_2=\dfrac{6}{2}=3$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow x\in(3,\,7)$.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x-21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

β. i. Για $3<x<7$ είναι $x>3\Leftrightarrow x-3>0$ και $x^2-10x+21<0$. Οπότε $|x-3|=x-3$ και $|x^2-10x+21|=-(x^2-10x+21)$.

Άρα, $A=x-3-(x^2-10x+21)=-x^2+11x-24$.

ii. Για $x\in(3,\,7)$ έχουμε $A=6\Leftrightarrow -x^2+11x-24=6\Leftrightarrow x^2-11x+30=0$.

Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot30=121-120=1$
- $x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{11\pm1}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{12}{2}=6$, $x_2=\dfrac{10}{2}=5$, που είναι δεκτές.

153 Θέμα 4 – 1402

α. Είναι:
- $\alpha=1$, $\beta=-2(\lambda-1)$, $\gamma=\lambda+5$
- $\Delta=[-2(\lambda-1)]^2-4\cdot1(\lambda+5)=4(\lambda-1)^2-4(\lambda+5)=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4(\lambda+5)$
  $=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=4\lambda^2-12\lambda-16$

β. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$$\Delta>0\Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16>0\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0\ ,\ (1)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda-4$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25>0$ και

ρίζες τις $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\dfrac{3\pm5}{2}$. Οπότε $\lambda_1=\dfrac{8}{2}=4$ και $\lambda_2=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι η $(1)\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ. Για $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ είναι

$$d(x_1,x_2)=\sqrt{24}\Leftrightarrow|x_1-x_2|=\sqrt{24}\Leftrightarrow|x_1-x_2|^2=24\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=24\Leftrightarrow x_1^{\,2}+x_2^{\,2}-2x_1\cdot x_2=24$$

$$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_2=24\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=24\ ,\ (2)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-2(\lambda-1)}{1}=2(\lambda-1)\quad\text{και}\quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda+5}{1}=\lambda+5\ .$$

Οπότε η $(2)\Leftrightarrow[2(\lambda-1)]^2-4(\lambda+5)=24\Leftrightarrow4(\lambda-1)^2-4\lambda-20=24$

$\Leftrightarrow4\lambda^2-12\lambda-40=0\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda-10=0\Leftrightarrow\lambda=5$ ή $\lambda=-2$, που είναι δεκτές.

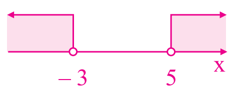
154 Θέμα 4 – 1406

α. Είναι $\Delta=[-(\alpha+1)]^2-4\cdot1\cdot(4+\alpha)=(\alpha+1)^2-16-4\alpha=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha$

$=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$

β. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2-16>0\Leftrightarrow(\alpha-1-4)(\alpha-1+4)>0$

$\Leftrightarrow(\alpha-5)(\alpha+3)>0\Leftrightarrow\alpha>5$ ή $\alpha<-3$



γ. Είναι:

i. $S=-\dfrac{-(\alpha+1)}{1}=\alpha+1$, $P=\dfrac{4+\alpha}{1}=\alpha+4$.

ii. $d(x_1, 1)\cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1|\cdot|x_2 - 1| = |(x_1 - 1)(x_2 - 1)| = |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1|$

$= |x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1| = |\alpha + 4 - (\alpha + 1) + 1| = |\alpha + 4 - \alpha - 1 + 1| = 4$

155 Θέμα 4 – 1450

α. Είναι $(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 3\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + [-4(\lambda+1)]x + 3\lambda + 4 = 0$

β. Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow [-4(\lambda+1)]^2 - 4\cdot 1\cdot(3\lambda+4) > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 16(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 4(3\lambda+4) > 0$

$\Leftrightarrow 16\lambda^2 + 32\lambda + 16 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0 \quad (1)$

Είναι $4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -\frac{5}{4}$

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$4\lambda^2 + 5\lambda$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η (1) $\Leftrightarrow \lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$.

γ. Είναι **i.** $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4(\lambda+1)}{1} = 4(\lambda+1)$ και $P = x_1\cdot x_2 = \frac{3\lambda+4}{1} = 3\lambda + 4$.

ii. $A = (4x_1 - 3)\cdot(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 = 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$

$= 16\cdot(3\lambda+4) - 12\cdot 4(\lambda+1) + 9 = 48\lambda + 64 - 48\lambda - 48 + 9 = 25$

156 Θέμα 4 – 1425

α. Είναι:

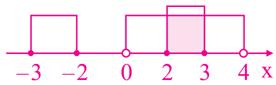
- $2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow |x| \le 3$ και $|x| \ge 2 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$ και ($x \ge 2$ ή $x \le -2$)

  $\Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$

- $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$.



β. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

γ. Οι $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ άρα $2 \le \rho_1 \le 3$ και $2 \le \rho_2 \le 3$, οπότε

$4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le 3$.

Άρα ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

157 Θέμα 4 – 1426

α.

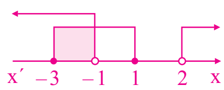
- Είναι $|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x + 1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$
- Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ και

  ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$, οπότε $x = \frac{4}{2} = 2$ ή $x = \frac{-2}{2} = -1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Επομένως

$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	



β. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

γ. Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ έχουμε:

- $-3 \le \rho_1 < -1$, (1)
- $-3 \le \rho_2 < -1 \Rightarrow 1 < -\rho_2 \le 3$, (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε $-2 < \rho_1 - \rho_2 < 2 \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

158 Θέμα 4 – 1396

Η εξίσωση έχει:

- $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$, $\gamma = 4\lambda + 5$
- $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(4\lambda+5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$.

α. Για $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 4(5^2 - 4\cdot 5 - 5) = 4(25 - 20 - 5) = 0$, οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$.

Είναι:
- $\Delta' = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36$
- $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} = \dfrac{4\pm 6}{2}$. Οπότε $\lambda_1 = \dfrac{10}{2} = 5$, $\lambda_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Άρα υπάρχει και η τιμή του $\lambda = -1$, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, όταν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0$, (1).

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

λ	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$\lambda^2 - 4\lambda - 5$		+	0	−	0	+	

δ. Είναι $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\Delta}{4} \le 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0$.

Το ίσον ισχύει για $\lambda = -1$ ή $\lambda = 5$.

Οπότε για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ έχουμε $\Delta < 0$, επομένως η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές.

159 Θέμα 4 – 1432

α. Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

β. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$\Delta = (2-\lambda)^2 - 4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

i. Αν $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, από τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

Οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ομόσημες, όταν $\Delta \ge 0$ και $P > 0$, (όπου $P = x_1 x_2$).

Είναι:
- $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, (2)
- $P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 \Leftrightarrow \lambda \in (2, +\infty)$, (3)

Οι (2) και (3) συναληθεύουν, όταν $\lambda \in [3, +\infty)$.

160 Θέμα 4 – 1436

α. $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$, (1).

Είναι $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	−	0	+	

β. i. Έχουμε $0 < \alpha < 1$, οπότε:
- $\alpha^2 > 0$
- $\alpha < 1 \overset{\cdot\,\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha^2 < \alpha$
- $\alpha < 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha} < 1$
- $\alpha^2 < \alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$

Άρα $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$.

ii. Είναι $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt{1+\alpha})^2 < (1+\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + (\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow \alpha < 2\sqrt{\alpha} + \alpha$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > 0$, που ισχύει.

161 Θέμα 4 – 1439

α. Είναι $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1$

$=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Είναι $S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. i. Αν $\lambda<0$, τότε $S<0$ και $P=1>0$.
Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες αρνητικές.

ii. Είναι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\right|\geq 2\cdot 1 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|}\geq 2 \overset{\cdot|\lambda|}{\Leftrightarrow} |\lambda^2+1|\geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2-2|\lambda|+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\lambda|^2-2|\lambda|+1>0 \Leftrightarrow (|\lambda|-1)^2\geq 0$, που ισχύει.

162 Θέμα 4 – 1440

α. Είναι:

- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$
- $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1>0$ και $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, για κάθε $\lambda>0$.

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

β. i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=x_1\cdot x_2=1$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}=2\cdot(\lambda+\dfrac{1}{\lambda})$, για κάθε $\lambda>0$.

Είναι $\Pi\geq 4 \Leftrightarrow 2(\lambda+\dfrac{1}{\lambda})\geq 4 \Leftrightarrow \lambda+\dfrac{1}{\lambda}\geq 2 \overset{\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2+1\geq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1\geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2\geq 0$, που ισχύει.

iii. Είναι $\Pi=4 \Leftrightarrow \lambda+\dfrac{1}{\lambda}=2 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Για $\lambda=1$ έχουμε $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ το οποίο έχει διπλή ρίζα την $x=1$,

οπότε $x_1=x_2=1$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

163 Θέμα 4 – 1451

α. Είναι:

- $\alpha=1$, $\beta=-2\lambda$, $\gamma=-(\lambda^2+5)$
- $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot[-(\lambda^2+5)]=\lambda^2+4(\lambda^2+5)=\lambda^2+4\lambda^2+20=5\lambda^2+20$.

β. Επειδή $\Delta=5\lambda^2+20>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε $(x_1-2)(x_2-2)=-4 \Leftrightarrow x_1x_2-2x_1-2x_2+4=-4 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+8=0$, (1)
Από τους τύπους Vieta έχουμε

$x_1+x_2=\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda$ και $x_1x_2=\dfrac{-(\lambda^2+5)}{1}=-\lambda^2-5$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow -\lambda^2-5-2\lambda+8=0 \Leftrightarrow -\lambda^2-2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda-3=0$

Είναι:

- $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$
- $\lambda_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 4}{2}$. Οπότε $\lambda_1=\dfrac{2}{2}=1$ και $\lambda_2=\dfrac{-6}{2}=-3$.

Άρα $\lambda=1$ ή $\lambda=-3$.

164 Θέμα 4 – 1391

α. Είναι:

- $\alpha=\lambda$, $\beta=-(\lambda^2+1)$, $\gamma=\lambda$
- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$.

Οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \neq 0$.

β. Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

γ. Είναι $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\lambda < 0$ και $\Delta \leq 0$. Είναι $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 1$. Άρα $\lambda = -1$.

165 Θέμα 4 – 1462

α. Είναι: • $S = 1 + 2 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$

• $P = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$

β. i. Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α , για κάθε x , που ανήκει εντός των ριζών. Επειδή παίρνει θετικές τιμές εντός των ριζών, συμπεραίνουμε ότι $\alpha < 0$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x-1)(x-2) > 0$, (1).

Είναι $1 < x < 2 \Leftrightarrow x > 1$ και $x < 2 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ και $x - 2 < 0$.

Άρα $(x-1)(x-2) < 0$.

Οπότε από την (1) έχουμε $\alpha < 0$.

ii. Είναι $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 3x + 1 > 0$, (2)

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$, οπότε $x_1 = \dfrac{4}{4} = 1$ και $x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι

η $(2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, \dfrac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

166 Θέμα 4 – 1465

α. Το τριώνυμο έχει: • $\alpha = 3$, $\beta = \kappa$, $\gamma = -4$

• $\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48 > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Οπότε έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3} < 0$, οπότε οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ. Επειδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες έχουμε $\alpha < x_1 < 0 < x_2 < \beta$.

Οπότε $\alpha < 0$, $\beta > 0$ και $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$, αφού οι αριθμοί α , β είναι εκτός των ριζών.

Άρα $\alpha f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$.

x	$-\infty$	α	x_1		x_2	β	$+\infty$
$f(x)$	$+$		0	$-$	0		$+$

167 Θέμα 4 – 14615

α) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι στην μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με

$\alpha = 1 , \beta = -2\lambda , \gamma = \lambda^2 - 1$ και

$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, άρα η διακρίνουσα Δ είναι πάντα θετική, ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ.

β) 1ος τρόπος:

$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \frac{2(\lambda \pm 1)}{2} = \lambda \pm 1$. Ώστε $\rho_1 = \lambda - 1 , \rho_2 = \lambda + 1$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $(x-\lambda)^2 - 1^2 = 0$ και ισοδύναμα έχουμε

$(x-\lambda-1)(x-\lambda+1) = 0$ άρα

$x-\lambda-1=0$ ή $x-\lambda+1=0$. Ώστε $x=\lambda+1$ ή $x=\lambda-1$

Έτσι $\rho_1 = \lambda - 1$, $\rho_2 = \lambda+1$ αφού $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Πρέπει $|\rho_2 - (-\rho_1)| \geq 8 \Leftrightarrow |\rho_1 + \rho_2| \geq 8$. Αν έχουμε βρει τις ρίζες τότε $\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda$.

Χωρίς να βρούμε τις ρίζες, από τύπους Vieta, $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-2\lambda)}{1} = 2\lambda$.

Άρα, πρέπει $|2\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow 2|\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq -2$ ή $\lambda \geq 2$.

δ) Έστω το τριώνυμο $f(x) = 1 \cdot x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ τις ρίζες του οποίου έχουμε βρει στο β) ερώτημα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1 = f(k) < 0$, σχέση που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του $f(x)$

x	$-\infty$	ρ_1		k		ρ_2	$+\infty$
$f(x)$	+			-			+

168 Θέμα 4 – 14924

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει $\Delta = 1 - 4\cdot(-12) = 1 + 48 = 49$ και δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
x^2-x-12	+	0	-	0	+

Δηλαδή

$$x^2 - x - 12 < 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 4) \text{ και}$$

$$x^2 - x - 12 > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty) .$$

β) Είναι $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi + 9 > 12 \Leftrightarrow \frac{\pi+9}{3} > 4$, οπότε με βάση το α) έχουμε ότι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$$

γ) Η παράσταση $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12$ είναι η τιμή του τριωνύμου για $x = |\alpha| + 3$ και για να είναι αρνητική θα πρέπει :

$-3 < |\alpha| + 3 < 4 \Leftrightarrow -6 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 1)$.

169 Θέμα 4 – 14652

α) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow$$
$$x^2 - x > 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ρίζες τις: $x = 0, x = 1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	ο	−	ο	+

Επομένως η (1) αληθεύει για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

β) i. Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε: $0 < 1 < \alpha \overset{\alpha)\,\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau.}{<} \alpha^2$ και

$1 < \alpha$, οπότε $\sqrt{1} < \sqrt{\alpha}$, δηλαδή

$$\sqrt{\alpha} > 1.$$

Επίσης: $\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha$.

Οπότε τελικά: $0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$.

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$
$$\alpha < \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$$

Επίσης:

$$\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2$$

Οπότε τελικά: $\alpha < \dfrac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2$.

170 Θέμα 4 – 14654

α) Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει $\alpha=1, \beta=-3, \gamma=2$ και διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1>0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	−	0	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι θετικό για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και αρνητικό για $x\in(1, 2)$.

β)

i. Δεδομένου ότι $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $(\alpha^2-3\alpha+2)<0$ και $(\beta^2-3\beta+2)>0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(1,2)$ και $\beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, δηλαδή $\alpha>1$ και αφού $\alpha<\beta$ θα είναι $\beta>2$, συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι θετικοί, άρα ομόσημοι.

2η περίπτωση: $(\alpha^2-3\alpha+2)>0$ και $(\beta^2-3\beta+2)<0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $\beta\in(1,2)$ δηλαδή $\beta<2$ και αφού $\alpha<\beta$ Θα είναι $\alpha<1$, συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι αρνητικοί άρα ομόσημοι.

ii. Αφού $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι, έχουμε ότι $(\alpha-1)(\beta-2)>0$, οπότε:

$$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2).$$

171 Θέμα 4 – 14653

α) Είναι $|x-1|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-1\le 3 \Leftrightarrow -2\le x\le 4$ δηλαδή $x\in[-2,4]$.

β) Οι ακέραιες λύσεις στο διάστημα $[-2,4]$ είναι οι : -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με ρίζες -2 και 4 του οποίου το πρόσημο να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Το άθροισμα των ριζών είναι $S=-2+4=2$, το γινόμενο των ριζών είναι $P=-2\cdot 4=-8$, οπότε ένα τριώνυμο είναι το $x^2-S\cdot x+P=x^2-2\cdot x-8$ και αφού θέλουμε το πρόσημο του να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, δηλαδή αρνητικό, έχουμε τελικά ότι η ζητούμενη ανίσωση είναι η $x^2-2x-8\le 0$.

δ) Έστω λοιπόν ένας αριθμός x του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, δηλαδή $x^2-8\le 2x \Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0$. Τότε όπως δείξαμε στο γ) ερώτημα για αυτόν τον αριθμό x θα ισχύει ισοδύναμα ότι $|x-1|\le 3$, δηλαδή η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

172 Θέμα 4 – 1473

α. i. Έχουμε $x^2+2x+3=\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+3-\alpha=0$, (1).
Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=4-4(3-\alpha)=4-12+4\alpha=4\alpha-8=4(\alpha-2)$ και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2$.

ii. Η εξίσωση έχει ρίζα διπλή, όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow 4\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2$.
Η διπλή ρίζα είναι η $x_0=-\dfrac{2}{2\cdot 1}=-1$.

β. i. Είναι $f(x)\ge 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\ge 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι $f(x)\ge 2 \Leftrightarrow f(x)-2\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)-2=(x+1)^2$, οπότε
$\sqrt{f(x)-2}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}\le 2 \Leftrightarrow |x+1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$.

173 Θέμα 4 – 1412

α. Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, αν και μόνο αν $\lambda^2-\lambda\ne 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\ne 0 \Leftrightarrow \lambda\ne 0$ και $\lambda\ne 1$.

β. Για $\lambda\ne 0,1$, η εξίσωση (1) γράφεται $\lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+\lambda-1=0 \overset{:(\lambda-1)}{\Leftrightarrow} \lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$, (2).

γ. Για $\lambda\ne 0,1$ η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=[-(\lambda+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot 1=(\lambda+1)^2-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2>0,$$

οπότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Επειδή η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού παίρνει τη μορφή (2), που έχει ρίζες τις

$$x_{1,2}=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}.$$

Οπότε $x_1=\dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=\dfrac{2\lambda}{2\lambda}=1$ και $x_2=\dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\dfrac{2}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}$.

Άρα $x_1=1$ και $x_2=\dfrac{1}{\lambda}$.

174 Θέμα 4 – 1475

α. Είναι:
- $\alpha=\lambda$, $\beta=-(\lambda^2+1)$, $\gamma=\lambda$
- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\ge 0$, για κάθε $\lambda\ne 0$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\ne 0$.

β. Είναι $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. Αν $\lambda>0$, τότε $P>0$ και $S>0$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

δ. Αν $0<\lambda\ne 1$, τότε $\dfrac{x_1+x_2}{2}-1=\dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda}-1=\dfrac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda}=\dfrac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}>0$, αφού $\lambda\ne 1$, οπότε $(\lambda-1)^2>0$ και $2\lambda>0$. Οπότε $\dfrac{x_1+x_2}{2}>1$.

175 Θέμα 4 – 1397

α. Είναι:
- $\alpha=\lambda$, $\beta=-(\lambda^2+1)$, $\gamma=\lambda$
- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\neq 0$.

β. Είναι: $S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. Επειδή $P=1>0$, το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.
Αφού επιπλέον έχουμε $\lambda>0$, είναι $S>0$, οπότε οι ρίζες είναι θετικές.

δ. Από το διπλανό πίνακα προσήμων του $f(x)$ έχουμε
$f(0)>0$, $f(\kappa)<0$ και $f(\mu)>0$. Οπότε $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)<0$.

x	$-\infty$	0	x_1	κ	x_2	μ	$+\infty$
f(x)	+		0	−	0	+	

176 Θέμα 4 – 1480

α. Η απόσταση είναι $x=400$ km , οπότε θα πληρώσει $y=60+0,20\cdot 400=60+80=140$€ .

β. Το ποσό που πλήρωσε είναι $y=150$, οπότε έχουμε
$150=60+0,2x\Leftrightarrow -0,2x=60-150\Leftrightarrow 0,2x=90\Leftrightarrow 2x=900\Leftrightarrow x=450$ Km.

γ. Η εταιρία Α είναι φθηνότερη, όταν
$$y_A<y_B\Leftrightarrow 60+0,20x<80+0,10x\Leftrightarrow 0,10x<20\Leftrightarrow x<200$$
Οπότε επιλέγουμε την Α για $x\in[0,\,200)$ και την Β για $x>200$.

δ. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 60+0,20x=80+0,10x\Leftrightarrow 0,10x=20\Leftrightarrow x=200$.
Για $x=200$, είναι $f(200)=60+0,2\cdot 200=60+40=100$.
Οπότε το σημείο τομής των C_f , C_g είναι το $K(200,100)$.
Οι συντεταγμένες του Κ εκφράζουν ότι για απόσταση $x=200$ Km το κόστος και στις δύο εταιρείες είναι 100€.

177 Θέμα 4 – 1481

α. Είναι $\Delta=\beta^2-4\cdot 1\cdot\beta^2=\beta^2-4\beta^2=-3\beta^2$.

β. i. Αν $\beta\neq 0$, τότε $\Delta<0$ και αφού είναι $\alpha=1>0$, το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Αν $\beta=0$, τότε $\Delta=0$, οπότε το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και μηδενίζεται για $x=0$.

γ. • Αν $\beta=0$, τότε $\alpha\neq 0$, οπότε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2>0$.
• Αν $\beta\neq 0$, τότε $x^2+\beta x+\beta^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε για $x=\alpha$ έχουμε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$.
Άρα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ που δεν είναι και οι δύο 0 .

178 Θέμα 4 – 1483

α. Είναι:
- $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$ και
- $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 6}{2}$. Οπότε $x=\dfrac{8}{2}=4$ ή $x=\dfrac{-4}{2}=-2$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
x^2-2x-8	+	0	−	0	+

β. Είναι:
- $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}=-\dfrac{8888}{4444}-\dfrac{1}{4444}=-2-\dfrac{1}{4444}<-2$.
- $x^2-2x-8<0$, για κάθε $x<-2$.

Οπότε για $x=\kappa<-2$ έχουμε $\kappa^2-2\kappa-8>0$.

γ. Είναι:
- $\mu^2-2|\mu|-8=|\mu|^2-2|\mu|-8$

- $-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4$, άρα $0 \le |\mu| < 4$
- $x^2 - 2x - 8 < 0$, για κάθε $x \in (-2, 4)$

Οπότε για $x = |\mu| \in (-2, 4)$ έχουμε $|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 2|\mu| - 8 < 0$.

179 Θέμα 4 – 1486

α. Είναι $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = = 48 - 4\lambda$.

β. Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow 4\lambda < 48 \Leftrightarrow \lambda < 12$.

γ. i. Από τους τύπους Vieta, έχουμε: $S = \dfrac{6}{1} = 6 > 0$ και $P = \dfrac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3$.

Επειδή $3 < \lambda < 12$ έχουμε:

- $\lambda < 12 \Rightarrow \Delta > 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
- $\lambda > 3 \Rightarrow \lambda - 3 > 0 \Rightarrow P > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Επιπλέον έχουμε $S > 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες και θετικές ρίζες.

ii. Είναι $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, οπότε $\mu > 0$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $f(\kappa) > 0$ και $f(\mu) < 0$.

Άρα $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$.

x	$-\infty$	κ	x_1	μ	x_2	$+\infty$
f(x)	+		0	−	0	+

180 Θέμα 4 – 1494

α. Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$ και ρίζες τις

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 7}{2}$, οπότε $x_1 = \dfrac{12}{2} = 6$ και $x_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$.

x	$-\infty$	-1		6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$	+	0	−	0	+

Ο αριθμός Κ προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$, όπου $x = -\dfrac{46}{47}$.

Ο αριθμός $-\dfrac{46}{47}$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 6)$, όπου η παράσταση Κ είναι αρνητική.

Άρα $K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\dfrac{46}{47} - 6 < 0$.

β. Είναι $\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 - 5\left(-\dfrac{46}{47}\right) - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 < 0$, για κάθε $x \in (-1, 6)$.

Οπότε $x = -\dfrac{46}{47} \in (-1, 6)$ έχουμε $K < 0$.

γ. Έχουμε • $\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow |\alpha| < 6$, οπότε $|\alpha| \in (-1, 6)$

- $x^2 - 5x - 6 < 0$, για κάθε $x \in (-1, 6)$

Οπότε, για $x = |\alpha| \in (-1, 6)$ έχουμε $|\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \Lambda < 0$.

181 Θέμα 4 – 1500

α. $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) \ge 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda + 28 \ge 0 \Leftrightarrow -4\lambda \ge -64 \Leftrightarrow \lambda \le 16$

β. i. $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-6}{1} = 6$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$

ii. Αν $7 < \lambda < 16$, τότε:

- $\lambda < 16 \Rightarrow \Delta > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
- $\lambda > 7 \Rightarrow \lambda - 7 > 0 \Rightarrow P > 0$, οπότε οι ρίζες είναι ομόσημες.

Επιπλέον είναι $S > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες θετικές.

γ. i. Η $(1) \Leftrightarrow x^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$, (2) .

Η (2) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όταν η εξίσωση $y^2-6y+\lambda-7=0$ έχει δύο άνισες ρίζες θετικές. Από το **β.ii.** ερώτημα πρέπει $7<\lambda<16$.

ii. Είναι $7<3\sqrt{10}<16 \Leftrightarrow 7^2<(3\sqrt{10})^2<16^2 \Leftrightarrow 49<9\cdot 10<256$, που ισχύει.

Άρα για $\lambda=3\sqrt{10}$ η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

182 Θέμα 4 – 1487

α. i. Είναι:
- $\Delta=9^2-4\cdot 1\cdot 18=81-72=9$
- $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{-9\pm 3}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{-6}{2}=-3$ και $x_2=\dfrac{-12}{2}=-6$.

ii. Είναι $|x+3|+|x^2+9x+18|=0 \Leftrightarrow |x+3|=0$ και $|x^2+9x+18|=0 \Leftrightarrow x+3=0$ και $x^2+9x+18=0$ $\Leftrightarrow x=-3$ και $(x=-3$ ή $x=-6) \Leftrightarrow x=-3$

β. i. Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-6		-3	$+\infty$
$x^2+9x+18$	+	0	−	0	+

ii. Είναι $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18 \Leftrightarrow x^2+9x+18=-(x^2+9x+18)$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+18\le 0 \Leftrightarrow x\in[-6,-3]$$

183 Θέμα 4 – 1513

α. Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-2\pm 4}{-2}$, οπότε $x_1=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-6}{-2}=3$.
Το πρόσημο του $f(x)$ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$-x^2+2x+3$	−	0	+	0	−

β. Είναι $-1<2{,}999<3$ και $-1{,}002<-1$. Οπότε $f(2{,}999)>0$ και $f(-1{,}002)<0$.
Άρα $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$.

γ. Έχουμε:
- $-3<\alpha<3 \Rightarrow |\alpha|<3$, άρα $|\alpha|\in(-1,3)$
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-1,3)$

Οπότε για $x=|\alpha|\in(-1,3)$ έχουμε $f(|\alpha|)>0 \Leftrightarrow -|\alpha|^2+2|\alpha|+3>0 \Leftrightarrow -\alpha^2+2|\alpha|+3>0$.

184 Θέμα 4 – 1517

α. Είναι $x^2+1\ge\dfrac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2+2\ge 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0$, (2) .

Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει $\alpha=2>0$, διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\dfrac{5\pm 3}{4}$, οπότε $x_1=\dfrac{8}{4}=2$ και $x_2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2x^2-5x+2$	+	0	−	0	+

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι η $(2)\Leftrightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.

β. i. Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$ έχουμε ότι οι $\kappa-1$, $\lambda-1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$\lambda-1>0$ και $\kappa-1<0 \Leftrightarrow \lambda>1$ και $\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa<1<\lambda$

2η περίπτωση

$\lambda-1<0$ και $\kappa-1>0 \Leftrightarrow \lambda<1$ και $\kappa>1 \Leftrightarrow \lambda<1<\kappa$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ , λ .

ii. Οι κ , λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) , οπότε $\kappa,\lambda\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.

Επειδή το 1 είναι μεταξύ των κ , λ , θα είναι $\kappa\le\frac{1}{2}$ και $\lambda\ge 2$ ή $\lambda\le\frac{1}{2}$ και $\kappa\ge 2$.

► Αν $\kappa \le \frac{1}{2}$ και $\lambda \ge 2$ τότε:

- $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa - \lambda < 0$, οπότε $|\kappa - \lambda| = \lambda - \kappa$
- $-\kappa \ge -\frac{1}{2}$ και $\lambda \ge 2$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε: $\lambda - \kappa \ge 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\kappa - \lambda| \ge \frac{3}{2}$.

► Αν $\lambda \le \frac{1}{2}$ και $\kappa \ge 2$ τότε $-\lambda \ge -\frac{1}{2}$ και $\kappa \ge 2$ τότε $\kappa > \lambda \Rightarrow \kappa - \lambda > 0$, οπότε $|\kappa - \lambda| = \kappa - \lambda$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε: $\kappa - \lambda \ge -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \ge \frac{3}{2}$.

Άρα $|\kappa - \lambda| \ge \frac{3}{2}$.

185 Θέμα 4 – 1518

α. Είναι $|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow \alpha \in (1, 3)$.

β. i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = (\alpha - 2)^2 - 1 = (\alpha - 2 - 1)(\alpha - 2 + 1) = (\alpha - 3)(\alpha - 1) < 0 \text{ , αφού } \alpha \in (1, 3)$$

2^{ος} τρόπος

Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα: $\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 3$.

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 4\alpha + 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta' = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0 \text{ και}$$

ρίζες τις $\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$, οπότε $\alpha_1 = \frac{6}{2} = 3$ και $\alpha_2 = \frac{2}{2} = 1$.

α	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\alpha^2 - 4\alpha + 3$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε
$\alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$, για κάθε $\alpha \in (1, 3)$.

ii. Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$, έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, οπότε

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

186 Θέμα 4 – 1458

α. Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \ge 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

γ. i. Είναι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2$ και $x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 < x_2$ και $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, που ισχύει.

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		x_1	$\frac{x_1+x_2}{2}$	x_2	x_2+1	$+\infty$
$x^2 - x + \lambda - \lambda^2$		+	0	−	0	+	

Είναι $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$, $f(x_2) = 0$ και $f(x_2 + 1) > 0$, οπότε

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$.

187 Θέμα 4 – 1520

α. Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25>0$ και ρίζες τις

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm5}{2}$, οπότε $x_1=\dfrac{4}{2}=2$ και $x_2=\dfrac{-6}{2}=-3$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $x^2+x-6<0 \Leftrightarrow x\in(-3,2)$.

β. Είναι $|x-\frac{1}{2}|>1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}<-1$ ή $x-\frac{1}{2}>1$

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}-1$ ή $x>\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$ ή $x>\frac{3}{2}$.

γ. Είναι $\alpha>\frac{3}{2}$.

i. Έχουμε:
- $\alpha>0$
- $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1 \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} \alpha<-\frac{1}{2}$ ή $\alpha>\frac{3}{2} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha>\frac{3}{2}$
- $E<6 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1)<6 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-6<0 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} -3<\alpha<2$. Άρα $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2\alpha+2(\alpha+1)=4\alpha+2$.

Είναι $\frac{3}{2}<\alpha<2 \overset{\cdot 4}{\Rightarrow} 6<4\alpha<8 \Rightarrow 8<4\alpha+2<10 \Rightarrow 8<\Pi<10$.

188 Θέμα 2 – 14656

α) Είναι:

$$\alpha_6=41+(6-1)\omega \Leftrightarrow 41+5\omega=26 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega=-3.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu=\nu \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=\nu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41+(\nu-1)(-3)=\nu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41-3\nu+3=\nu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 44=4\nu \Leftrightarrow \nu=11.$$

189 Θέμα 2 – 1240

α. Έχουμε:
- $\alpha_2=0 \Leftrightarrow \alpha_1+\omega=0 \Leftrightarrow \alpha_1=-\omega$, (1).
- $\alpha_4=4 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\omega+3\omega=4 \Leftrightarrow \omega=2$

Άρα $\alpha_1=-2$ και $\omega=2$.

β. Είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=-2+(\nu-1)\cdot2=2\nu-4$.

Έστω $\alpha_\nu=98 \Leftrightarrow 2\nu-4=98 \Leftrightarrow \nu=51$.

Άρα ο $51^{\text{ος}}$ όρος είναι ίσος με 98 .

190 Θέμα 2 – 1325

α) Είναι:

$$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (25-1)\omega = \alpha_1 + (12-1)\omega + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 24\omega = 11\omega + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (\nu-1)3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

191 Θέμα 2 – 14574

α) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_3 = 8$, δηλαδή

$\alpha_1 + 2\omega = 8$, οπότε

$2 + 2\omega = 8$ και τελικά

$\omega = 3$.

β) Θα πρέπει να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν, ώστε:

$\alpha_\nu = 35$, δηλαδή

$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 35$, οπότε

$2 + (\nu - 1)\cdot 3 = 35$, οπότε

$3\cdot(\nu - 1) = 33$, δηλαδή

$\nu - 1 = 11$ και τελικά

$\nu = 12$.

Επομένως ο $12^{ος}$ όρος της προόδου είναι 35.

192 Θέμα 2 – 1326

α. Είναι $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = \dfrac{\alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} = \dfrac{6\omega}{3\omega} = 2$

β. $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega = 18 \Leftrightarrow 6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$

193 Θέμα 2 – 14512

α) Η εξίσωση $x^2 = 1$ έχει λύσεις τις $x = 1$ ή $x = -1$ ενώ η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις τις $x = 3$ ή $x = -3$.

β) Οι λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, -1, 1, 3.

i. Αφού $3-1=1-(-1)=-1-(-3)=2$ οι αριθμοί -3, -1, 1, 3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά $\omega=2$.

ii. Αφού η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega=2$ και περιέχει τους περιττούς όρους 1 και 3, όλοι οι όροι της προόδου θα είναι περιττοί και επομένως ο 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

194 Θέμα 2 – 13319

α. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ, με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta-\alpha=\gamma-\beta$.Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι

$\frac{x}{2}-(1-x)=2x-1-\frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2}-1+x=\frac{3x}{2}-1$, άρα $\frac{3x}{2}-1=\frac{3x}{2}-1$ που ισχύει.

β. Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2}-1=5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=6 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$.

195 Θέμα 2 – 1245

α. Οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$$x+2+3x+2=2(x+1)^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=4(x+1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)=4(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2=4x+4 \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

β. i. Για $x=1$ οι αριθμοί είναι: 3, 4, 5, οπότε η διαφορά ω είναι $4-3=1$.

ii. Για $x=-1$ οι αριθμοί είναι: 1, 0, -1, οπότε η διαφορά ω είναι $0-1=-1$.

196 Θέμα 2 – 1256

α. Είναι $A+\Gamma=2B \Leftrightarrow 1+x+8=2(x+4) \Leftrightarrow x+9=2x+8 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$.

β. Για $x=1$, έχουμε $A=1$, $B=5$, $\Gamma=9$, οπότε:

i. $\omega=B-A=5-1=4$

ii. $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=1+19\cdot4=1+76=77$

197 Θέμα 2 – 1266

α. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2\beta)^2-4\cdot1(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\frac{2\beta\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\beta\pm4}{2}$.

Οπότε $x_1=\frac{2\beta+4}{2}=\frac{2(\beta+2)}{2}=\beta+2$ και $x_2=\frac{2\beta-4}{2}=\frac{2(\beta-2)}{2}=\beta-2$.

198 Θέμα 2 – 14476

α)

i. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=1$ και η διαφορά της $\omega=\alpha_2-\alpha_1=3-1=2$.

ii. Ο τριακοστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_{30}=\alpha_1+29\omega=1+29\cdot2=1+58=59$.

β) Έχουμε: $S_{30}=\frac{30}{2}\cdot(\alpha_1+\alpha_{30})=15\cdot(1+59)=15\cdot60=900=30^2$.

199 Θέμα 2 – 1249

α. Είναι $\alpha_{10}-\alpha_6=24 \Leftrightarrow \alpha_1+9\omega-(\alpha_1+5\omega)=24 \Leftrightarrow \alpha_1+9\omega-\alpha_1-5\omega=24 \Leftrightarrow 4\omega=24 \Leftrightarrow \omega=6$

β. $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19\cdot 6 = 19 + 114 = 133$

γ. $S_{20} = \frac{20}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10\cdot(19+133) = 1520$

200 Θέμα 2 – 1343

α. Είναι $\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$.

β. $S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77 \Leftrightarrow \nu\cdot[4 + (\nu-1)\cdot 3] = 154 \Leftrightarrow \nu\,(4 + 3\nu - 3) = 154 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0$

Είναι $\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1848 = 1849$ και $\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{-1 \pm 43}{6}$.

Οπότε $\nu_1 = \frac{-1+43}{6} = 7$ και $\nu_2 = \frac{-1-43}{6}$, που απορρίπτεται.

Άρα $\nu = 7$, οπότε πρέπει να πάρουμε τους επτά πρώτους όρους.

201 Θέμα 2 – 1370

α. Οι αριθμοί: 1 , 2 , 3 , … , ν είναι οι ν πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$.

Οπότε $1 + 2 + 3 ... + \nu = S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = \frac{\nu}{2}[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1] = \frac{\nu}{2}(2 + \nu - 1) = \frac{\nu}{2}(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

β. Είναι $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$.

Έχουμε:

- $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) = 1 + 360 = 361$
- $\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2}$. Οπότε $\nu_1 = \frac{18}{2} = 9$ και $\nu_2 = \frac{-20}{2} = -10$, που απορρίπτεται.

Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

202 Θέμα 2 – 14573

α. Είναι $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β. $S_3 = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot[2\alpha_1 + (3-1)\omega] = 33 \Leftrightarrow 3\cdot(2\alpha_1 + 2\cdot 5) = 66$

$\Leftrightarrow 6\alpha_1 + 30 = 66 \Leftrightarrow 6\alpha_1 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

203 Θέμα 2 – 1336

Είναι:

α. $x + 6 + 11x - 6 = 2\cdot(5x + 2) \Leftrightarrow 12x = 10x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Οπότε οι αριθμοί είναι: 8 , 12 , 16 , επομένως $\omega = 12 - 8 = 4$.

β. $S_8 = \frac{8}{2}\cdot[2\alpha_1 + (8-1)\omega] = 4\cdot(2\cdot 0 + 7\cdot 4) = 4\cdot 28 = 112$.

204 Θέμα 2 – 1329

Είναι:

α. $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\cdot 4 = 40$

$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β. $S_\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + (\nu-1)\omega = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(-10) + (\nu-1)\cdot 4 = 0$

$\Leftrightarrow -20 + 4\nu - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow \nu = 6$

205 Θέμα 2 – 1247

α. Οι αριθμοί που παριστάνουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς, αποτελούν αριθμητική πρόοδο με

$\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 + (\nu-1)\cdot 20 = 120 + 20\nu - 20 = 20\nu + 100$.

β. Η τελευταία σειρά έχει: $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\omega = 120 + 9\cdot 20 = 120 + 180 = 300$ καθίσματα.

γ. Το γυμναστήριο έχει $S_{10} = \dfrac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = 5\,(120+300) = 5\cdot 420 = 2100$ καθίσματα.

206 Θέμα 2 – 14597

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα σταθερά τέσσερα καθίσματα.

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12.$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot[2\cdot 12 + (10-1)\cdot 4] = 5\cdot(24+36) = 5\cdot 60 = 300.$

207 Θέμα 4 – 1507

α. Έχουμε:
- $\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega$, (1)
- $\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega = 61 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$.

β. Έστω $\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 333 \Leftrightarrow 4 + (\nu-1)\cdot 3 = 333 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 333 \Leftrightarrow 3\nu = 332$

$\Leftrightarrow \nu = \dfrac{332}{3} \Leftrightarrow \nu = 110\dfrac{2}{3}$, άτοπο, αφού $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Άρα ο αριθμός 333 δεν είναι όρος της προόδου.

γ. Είναι (α_ν): 4 , 7 , 10 , …

Έχουμε $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow 3x = 2y$, (1) . Έστω ότι οι x , y είναι διαδοχικοί όροι της (α_ν) .

Τότε $y = x + \omega$ ή $x = y + \omega \Leftrightarrow y = x + 3$ ή $x = y + 3$.

- Αν $y = x + 3$, τότε η (1) $\Leftrightarrow 3x = 2(x+3) \Leftrightarrow 3x = 2x + 6 \Leftrightarrow x = 6$ που δεν είναι όρος της προόδου, αφού αν

$\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 6 \Leftrightarrow 4 + (\nu-1)\cdot 3 = 6 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{5}{3} \notin \mathbb{N}$.

- Αν $x = y + 3$, τότε η (1) $\Leftrightarrow 3(y+3) = 2y \Leftrightarrow 3y + 9 = 2y \Leftrightarrow y = -9$, που δεν είναι όρος της προόδου, αφού

$\alpha_\nu = -9 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega = -9 \Leftrightarrow 4 + (\nu-1)\cdot 3 = -9 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = -9 \Leftrightarrow 3\nu = -10 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{N}$.

Άρα οι x , y δεν είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) .

208 Θέμα 4 – 1471

α. Είναι $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1$, που είναι περιττός.

β. i. Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16$ και ρίζες τις $\kappa_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, άρα $\kappa_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ και $\kappa_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

Οπότε $\kappa = 3$ ή $\kappa = -1$, που απορρίπτεται.

Για $\kappa = 3$, έχουμε $\omega = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

ii. Έστω $\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow 2 + (\nu-1)\cdot 7 = 1017 \Leftrightarrow 2 + 7\nu - 7 = 1017 \Leftrightarrow 7\nu - 5 = 1017 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = \frac{1022}{7} \Leftrightarrow \nu = 146 .$$

Άρα ο αριθμός 1017 είναι $146^{ος}$ όρος της προόδου.

209 Θέμα 4 – 12945

α. Ισχύουν: $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$, οπότε $\alpha_1 + 2\omega = 8$, (1) και $\alpha_1 + 10\omega = 32$ (2)·

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) βρίσκουμε

$$8\omega = 24 \Rightarrow \omega = 3$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε $\alpha_1 + 6 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2$.

β. Η πρόοδος (β_ν) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = 57 + 2 = 59$ και

$$\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu-1) = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$$

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ. Το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) , οπότε έχουμε: $[2\alpha_1 + (2\nu-1)\cdot 3]\cdot \dfrac{2\nu}{2} = [2\beta_1 + (\nu-1)\cdot 2]\cdot \dfrac{\nu}{2}$, απ' όπου, με αντικατάσταση των πρώτων όρων, παίρνουμε $2\cdot 2 + (2\nu-1)\cdot 3 = 2(57+\nu-1)\cdot \dfrac{1}{2}$.

Η τελευταία ισότητα γράφεται $4 + 6\nu - 3 = 57 + \nu - 1$, απ' όπου προκύπτει ότι $5\nu = 55$, δηλαδή $\nu = 11$, που είναι η ζητούμενη τιμή του ν.

210 Θέμα 4 – 1399

α. Είναι $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$, (1)

Είναι:
- $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 3\cdot(-6) = 49 + 72 = 121$
- $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2\cdot 3} = \dfrac{7 \pm 11}{6}$. Οπότε $x = \dfrac{18}{6} = 3$ ή $x = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Άρα $x = 3$.

β. Είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 2\cdot 9 - 3\cdot 3 - 4 = 5$, οπότε $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 2$.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 3 + (\nu-1)2 = 2\nu + 1$.

Έστω $\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega = 2014 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\,2 = 2014 \Leftrightarrow 3 + 2\nu - 2 = 2014$

$$\Leftrightarrow 2\nu = 2013 \Leftrightarrow \nu = \frac{2013}{2} \text{ , άτοπο αφού } \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα ο αριθμός 2014 , δεν είναι όρος της προόδου.

γ. Είναι $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος S σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 3$ και $\omega = 4$.

Για το πλήθος τους έχουμε:

$\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu-1)\omega = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 31$ $.3 + 4\nu - 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$.

Άρα $S_8 = \dfrac{8}{2}(\beta_1 + \beta_8) = 4\cdot(3 + 31) = 4\cdot 34 = 136$.

211 Θέμα 4 – 1502

α. Έχουμε $x^2 + 5 + 2x + 4 = 2(x^2 + x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 9 = 2x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

β. Αν $x = 3$, οι αριθμοί είναι: 14 , 12 , 10 .

i. Είναι $\omega = 12 - 14 = -2$.

ii. Έχουμε $\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\cdot(-2) = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$.

iii. Είναι $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \ldots + \alpha_{24} = S_{24} - S_{14}$.

Είναι:
- $S_{24} = \dfrac{24}{2}\cdot[2\alpha_1 + (24-1)\omega] = 12\,[2\cdot 20 + 23\cdot(-2)] = 12\,(40-46) = 12\cdot(-6) = -72$
- $S_{14} = \dfrac{14}{2}\cdot[2\alpha_1 + (14-1)\omega] = 7\,[2\cdot 20 + 13\cdot(-2)] = 7\,(40-26) = 7\cdot 14 = 98$

Άρα $S = -72 - 98 = -170$.

212 Θέμα 4 – 1503

Είναι:

α. $\begin{cases}\alpha_3 = 8\\ \alpha_8 = 23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 + (3-1)\omega = 8\\ \alpha_1 + (8-1)\omega = 23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\omega = 8\\ \alpha_1 + 7\omega = 23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 8 - 2\omega\\ 8 - 2\omega + 7\omega = 23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 8 - 2\omega\\ 5\omega = 15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 8 - 2\cdot 3\\ \omega = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_1 = 3\end{cases}$

β. $\alpha_{31} = \alpha_1 + (31-1)\omega = 2 + 30\cdot 3 = 92$.

γ. $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 31)$

Είναι:
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31} = S_{31} = \dfrac{31}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_{31}) = \dfrac{31}{2}(2+92) = \dfrac{31}{2}\cdot 94 = 31\cdot 47 = 1457$
- $1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = = \dfrac{31}{2}\,(1+31) = \dfrac{31}{2}\cdot 32 = 31\cdot 16 = 496$

Άρα $S = 1457 + 496 = 1953$.

213 Θέμα 4 – 13173

α. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή: $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [10 + 3(\nu+1)] - (10 + 3\nu) = 10 + 3\nu + 3 - 10 - 3\nu = 3$

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 10 + 3\cdot 1 = 13$ και η διαφορά $\omega = 3$.

β. Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$14 < \alpha_\nu < 401 \Leftrightarrow 14 < 10 + 3\nu < 401 \Leftrightarrow 4 < 3\nu < 391 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \nu < \frac{391}{3} \Leftrightarrow 1,\overline{3} < \nu < 130,\overline{3}$$

Οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401 , είναι οι $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{130}$ που είναι 129 όροι.

γ. Έχουμε:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{130} = S_{130} - \alpha_1 = \frac{130}{2}(2\alpha_1 + 129\cdot\omega) - \alpha_1 = 65(2\cdot 13 + 129\cdot 3) - 13 = 26832$$

214 Θέμα 4 – 13171

α. Προφανώς $\alpha_1 = S_1 = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 = 5$.

β. Θέτοντας όπου ν το $\nu - 1$, παίρνουμε:

$S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) = 2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ για κάθε $\nu \geq 2$.

γ. Για κάθε $\nu \geq 2$, έχουμε

$\alpha_\nu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1}) =$

$= S_\nu - S_{\nu-1} = 2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 - \nu - 1) = 2\nu^2 + 3\nu - 2\nu^2 + \nu + 1 = 4\nu + 1$

Αλλά $\alpha_1 = 5 = 4\cdot 1 + 1$. Ώστε $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, για κάθε $\nu \geq 1$.

δ. Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \left[4(\nu+1)+1\right] - [4\nu+1] = 4\nu + 4 + 1 - 4\nu - 1 = 4$.

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.

215 Θέμα 4 – 1417

α. Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x^2 + 2(-1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

β. i. Για $\lambda \neq 0$ η (1) είναι η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με $\alpha = \lambda$, $\beta = 2(\lambda-1)$ και $\gamma = \lambda - 2$.

Οπότε $\Delta = [2(\lambda-1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot(\lambda-2) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4 > 0$.

Άρα η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Είναι $x_{1,2} = \dfrac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda + 2 \pm 2}{2\lambda}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{-2\lambda + 2 - 2}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} = -1$ και $x_2 = \dfrac{-2\lambda + 2 + 2}{2\lambda} = \dfrac{-\lambda + 2}{\lambda} = -1 + \dfrac{2}{\lambda}$.

ii. Για $\lambda \neq 0$ είναι $|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \left|-1 + \dfrac{2}{\lambda} + 1\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow 2 > |\lambda| \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$

Άρα $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

216 Θέμα 4 – 14758

α) Στο τέλος του $1^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 5 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $2^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 18 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $3^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 31 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $4^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $5^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του $6^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του $48^{ου}$ μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:

$$\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47\cdot 13 = 616 \text{ αυτοκίνητα.}$$

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu \geq 250 \text{ ,δηλαδή}$$

$$5 + (\nu - 1)13 \geq 250 \text{, οπότε}$$

$$(\nu - 1) \geq \frac{245}{13} \text{, δηλαδή}$$

$$\nu \geq \frac{245}{13} + 1 \text{ και τελικά}$$

$$\nu \geq 19\frac{11}{13}.$$

Οπότε μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο.

217 Θέμα 4 – 14927

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560 .$$

Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910 .$$

Οπότε:

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \text{ και}$$

$$\alpha_1 + 99\omega = 11910 .$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$50\omega = 5350 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 107 .$$

Άρα

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 + 5243 = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 = 1317. \end{aligned}$$

Συνεπώς το κόστος για ν καλεσμένους είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 1317 + (\nu - 1) \cdot 107 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 107\nu + 1210 .$$

β)

i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ είναι το κόστος για ν καλεσμένους. Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους 1210 ευρώ.

ii. Έχουμε:

$$\alpha_1 = 107 \cdot 1 + 1210 .$$

$$\alpha_2 = 107 \cdot 2 + 1210 = \alpha_1 + 107 .$$

$$\alpha_3 = 107 \cdot 3 + 1210 = 107 \cdot (2+1) + 1210 = 107 \cdot 2 + 1210 + 107 = \alpha_2 + 107 \text{, κοκ.}$$

Οπότε κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά 107 ευρώ.

γ) Το κόστος για 80 καλεσμένους θα είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.

218 Θέμα 4 – 14809

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην $5^η$ θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην $12^η$ θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον $23^{ο}$ όρο της προόδου. Είναι:

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22\cdot 7 = 5 + 154 = 159$$

Επομένως, η $23^{η}$ φορά που συναντάμε το γράμμα Β είναι στην $159^{η}$ θέση.

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7\cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την $196^{η}$ θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{η}$ θέση είναι το $4^{ο}$ γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

219 Θέμα 4 – 12764

α. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$.

Είναι $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow 50 = \alpha_1 + 9\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 50 - 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 32$.

Άρα $\alpha_1 = 32$ και $\omega = 2$.

β. Είναι $S_{40} = \dfrac{40}{2}(2\cdot 32 + 39\cdot 2) = 20(64 + 78) = 20\cdot 142 = 2.840$.

γ. Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36, οπότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\omega_1 = 4$.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου είναι 20.

Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2\cdot 32 + 19\cdot 4) = 10(64 + 76) = 10\cdot 140 = 1.400$$

220 Θέμα 4 – 12694

α. Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Είναι $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 255 = 300 + 3\omega \Leftrightarrow \omega = -15$.

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β. Είναι $\alpha_\nu = 45 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 45 \Leftrightarrow 300 + (\nu - 1)(-15) = 45$

$$\Leftrightarrow 300 - 15\nu + 15 = 45 \Leftrightarrow 15\nu = 270 \Leftrightarrow \nu = 18$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{18} = S_{18}$$

Είναι $S_{18} = \dfrac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) = 9(300 + 45) = 9\cdot 345 = 3105$.

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης είναι 3105 δευτερόλεπτα, δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα.

δ. Αν β_ν είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο ν, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Πρέπει να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu \le \alpha_\nu$. Δηλαδή:

Είναι $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 147 + (\nu - 1)3 \le 300 + (\nu - 1)(-15) \Leftrightarrow 144 + 3\nu \le 315 - 15\nu$

$\Leftrightarrow 18\nu \le 171 \Leftrightarrow \nu \le \dfrac{171}{18} \Leftrightarrow \nu \le 9{,}5$

Άρα η μέγιστη τιμή του ν είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

221 Θέμα 4 – 1411

α. Αφού κάθε επόμενη κυψέλη απέχει 3 μέτρα από την προηγούμενη, οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη A, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 3$.
Ο πρώτος όρος εκφράζει πόσο απέχει η 1^η κυψέλη από την αποθήκη Α, ενώ η διαφορά ω, την απόσταση που απέχει κάθε επόμενη κυψέλη από την προηγούμενη.

β. Η απόσταση της $20^{\eta\varsigma}$ κυψέλης από την αποθήκη A είναι: $\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 1 + 19\cdot 3 = 58$ μέτρα.

γ. i. Η ζητούμενη απόσταση είναι το διπλάσιο του αθροίσματος $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, αφού πηγαίνει στην κάθε κυψέλη και γυρνάει στην αποθήκη. Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 4 + 7 = 12$ μέτρα.

Οπότε θα διανύσει $2\cdot 12 = 24$ μέτρα.

ii. Η ζητούμενη απόσταση είναι

$$S = 2\cdot S_{20} = 2\cdot \frac{20}{2}\cdot[2\alpha_1 + (20-1)\cdot\omega] = 20\cdot(2\cdot 1 + 19\cdot 3) = 20(2+57) = 20\cdot 59 = 1180 \text{ μέτρα}$$

222 Θέμα 4 – 1430

α. Οι αριθμοί 3, 7, 11, 15, ... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), διότι κάθε επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο, αφού προσθέσουμε το 4.

β. Η (α_ν) έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$. Οπότε:

$$S_{40} = \frac{40}{2}\cdot[2\alpha_1 + (40-1)\omega] = 20\cdot(2\cdot 3 + 39\cdot 4) = 20(6+156) = 20\cdot 162 = 3240.$$

γ. Έστω $\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 120$

$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \notin \mathbb{N}$$

Άρα ο αριθμός 120 δεν είναι ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ. Είναι $\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 235 \Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow 4\nu = 236$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{236}{4} \Leftrightarrow \nu = 59$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $S = S_{59} - S_{40}$.

Έχουμε:

$$S_{59} = \frac{59}{2}\cdot[2\alpha_1 + (59-1)\omega] = \frac{59}{2}\cdot(2\cdot 3 + 58\cdot 4) = \frac{59}{2}(6+232) = \frac{59}{2}\cdot 238 = 59\cdot 169 = 7021 \text{ και } S_{40} = 3240.$$

Άρα $S = 7021 - 3240 = 3781$.

223 Θέμα 4 – 13089

α. i. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2, με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$$

ii. Η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2, με $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 13 + (\nu-1)\cdot(-2) = 13 - 2\nu + 2 = 15 - 2\nu$$

β. Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε ν μέρες. Τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

δηλαδή :
$$\frac{\left(2\cdot 1+(\nu-1)\cdot 2\right)\cdot\nu}{2}=\frac{\left(2\cdot 13+(\nu-1)\cdot(-2)\right)\cdot\nu}{2}\Leftrightarrow\frac{(2+2\nu-2)\cdot\nu}{2}=\frac{(26-2\nu+2)\cdot\nu}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{2\nu\cdot\nu}{2}=\frac{(28-2\nu)\cdot\nu}{2}.$$
Και αφού $\nu\neq 0$, θα είναι $2\nu=28-2\nu\Leftrightarrow 4\nu=28\Leftrightarrow\nu=7$.

γ. Προφανώς ανεξάρτητα από τον τρόπο που διάβασε το βιβλίο, το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι το $S_7=\frac{\left(2\cdot 1+(7-1)\cdot 2\right)\cdot 7}{2}=49$.

δ. Για κάθε $\nu=1,2,\ldots,7$,
είναι $\beta_{8-\nu}=\beta_1+(8-\nu-1)\cdot(-2)=13-16+2\nu+2=2\nu-1=\alpha_\nu$.

224 Θέμα 4 – 1387

α. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), διότι κάθε επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο αφού του προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.
Ο $1^{ος}$ όρος της προόδου είναι ο $\alpha_1=16$.

Έχουμε $\alpha_7=28\Leftrightarrow\alpha_1+(7-1)\omega=28\Leftrightarrow 16+6\omega=28\Leftrightarrow\omega=2$

β. Είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=16+(\nu-1)\cdot 2=2\nu+14$.

γ. Όλο το θέατρο έχει $S_{20}=\frac{20}{2}\cdot[2\alpha_1+(20-1)\omega]=10\cdot(2\cdot 16+19\cdot 2)=10(32+38)=700$ καθίσματα.

δ. i. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των κενών καθισμάτων αποτελούν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1=6$ και διαφορά $\omega'=3$.

Είναι $\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\omega'=6+(\nu-1)\cdot 3=3\nu+3$.

Έχουμε $\beta_\nu\geq\alpha_\nu\Leftrightarrow 3\nu+3\geq 2\nu+14\Leftrightarrow\nu\geq 11$. Άρα από την 11^{η} σειρά και μετά θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii. Οι θεατές είναι $S=S_{10}-S'_{10}=\frac{10}{2}[2\alpha_1+(10-1)\omega]-\frac{10}{2}[2\beta_1+(10-1)\omega']=5\cdot(2\cdot 16+9\cdot 2)-5\cdot(2\cdot 6+9\cdot 3)=$
$$=5\,(32+18)-5\cdot(12+27)=250-195=55$$

225 Θέμα 4 – 1395

α. Ο $2^{ος}$, ο $3^{ος}$ και ο $4^{ος}$ θα πληρώνουν αντί-στοιχα $3+0,5=3,5$€, $3,5+0,5=4$€ και $4+0,5=4,5$ €.

β. Αν α_ν τα ποσά που θα πληρώσουν οι επιβάτες, τότε αυτά είναι όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=3$ και $\omega=0,5$.

γ. Ο $51^{ος}$ επιβάτης, θα πληρώσει $\alpha_{51}=\alpha_1+(51-1)\omega=3+50\cdot 0,5=3+25=28$€.

δ. Είναι $S_\nu>30\cdot 21\Leftrightarrow\frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]>630\Leftrightarrow\nu\cdot[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5]>1260$
$$\Leftrightarrow\nu\left(6+\frac{\nu-1}{2}\right)>1260\Leftrightarrow\nu\cdot\frac{12+\nu-1}{2}>1260\Leftrightarrow\nu\,(\nu+11)>2520$$
$$\Leftrightarrow\nu^2+11\nu-2520>0\ ,\ (1)$$

Είναι:
- $\Delta=11^2-4\cdot 1\cdot(-2520)=121+10080=10201$
- $\nu_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{10201}}{2\cdot 1}=\frac{-11\pm 101}{2}$. Οπότε $\nu_1=\frac{90}{2}=45$,

$\nu_2=\frac{-112}{26}=-56$

ν	$-\infty$ -56 45 $+\infty$
$\nu^2+11\nu-2520$	+ 0 − 0 +

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1)\Leftrightarrow\nu<-56$ ή $\nu>45\overset{\nu>0}{\Leftrightarrow}\nu>45$.
Άρα θα πρέπει να πουλούσε τουλάχιστον 46 εισιτήρια.

226 Θέμα 4 – 1488

α. Οι μαθητές είναι $x(x-1)$ ή $(x+3)(x-3)-1$.

Είναι $x(x-1)=(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2-x=x^2-9-1 \Leftrightarrow -x=-10 \Leftrightarrow x=10$.

β. Η Α΄ τάξη έχει $10\cdot(10-1)=90$ μαθητές.

γ. Οι μαθητές στις ομάδες εργασίας είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=2$, $\omega=2$ και $S_\nu=90$.

Είναι $S_\nu=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 2]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4+2\nu-2)=90$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(2\nu+2)=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$$

Είναι:
- $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-90)=1+360=361$
- $\nu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 19}{2}$. Οπότε $\nu=9$ ή $\nu=-10$, που απορρίπτεται .

Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες.

227 Θέμα 4 – 13056

α. Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι $T_{10}=\frac{10\cdot 11}{2}=55$.

β. Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu=120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu=120 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2}=120 \Leftrightarrow \nu(\nu+1)=240 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-240=0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=961$ και οι ρίζες της $\nu_1=15$ και $\nu_2=-16$.

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15.
Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός $(T_{15}=120)$.

γ. Έστω T_ν και $T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu+T_{\nu+1}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}=\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+\nu+2)=\frac{1}{2}(\nu+1)\cdot 2(\nu+1)=(\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

228 Θέμα 2 – 1360

Είναι:

α. $\begin{cases}\alpha_3=1\\ \alpha_5=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^{3-1}=1\\ \alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^2=1 & ,\ (1)\\ \alpha_1\cdot\lambda^4=4 & ,\ (2)\end{cases}$

Η $(1) \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{1}{\lambda^2}$, οπότε η (2) γίνεται $\frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda^4=4 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=2$.

Άρα $\alpha_1=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

β. $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1}=\frac{2^{\nu-1}}{2^2}=2^{\nu-1-2}=2^{\nu-3}$.

229 Θέμα 2 – 12763

α. Για να αποτελούν οι $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε

$$\alpha_2=\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}=\frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{3}{2}\ ,\ \text{άτοπο}$$

Άρα η α_ν δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Είναι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, οπότε η α_ν αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda=\sqrt{2}$.

Έχουμε $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}\Leftrightarrow \alpha_\nu=2\cdot(\sqrt{2})^{\nu-1}$.

230 Θέμα 2 – 12787

α. Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot(-6)=25>0$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες που είναι $x_{1,2}=\frac{1\pm5}{2}$, οπότε $x_1=\frac{6}{2}=3$ και $x_2=\frac{-4}{2}=-2$.

β. Οι αριθμοί $\kappa-2$, κ , $2\kappa+3$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ με $\kappa>0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, όταν

$$\kappa^2=(2\kappa+3)(\kappa-2)\Leftrightarrow\kappa^2=2\kappa^2-4\kappa-6+3\kappa\Leftrightarrow\kappa^2-\kappa-6=0$$

$$\Leftrightarrow\kappa=3 \text{ ή } \kappa=-2 \text{ , που απορρίπτεται}$$

Άρα $\kappa=3$.

231 Θέμα 2 – 1242

Είναι:

α. $(2x+1)^2=x(5x+4)\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=5x^2+4x\Leftrightarrow -x^2=-1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

β. i. Για $x=1$ οι αριθμοί είναι 1 , 3 , 9 , οπότε $\lambda=\frac{3}{1}=3$.

ii. Για $x=-1$ οι αριθμοί είναι: -1 , -1 , -1 , οπότε $\lambda=\frac{-1}{-1}=1$.

232 Θέμα 2 – 1257

α. Είναι $2x=4-x+2\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$.

β. Είναι $x^2=(4-x)\cdot2\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

Έχουμε:
- $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36$
- $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm6}{2}$

Οπότε $x=-4$ ή $x=2$.

γ. Από τα **α.** , **β.** ερωτήματα έχουμε $x=2$.
Για $x=2$ οι αριθμοί είναι: 2 , 2 , 2 και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\omega=0$ και γεωμετρικής με $\lambda=1$.

233 Θέμα 2 – 1265

α. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5\beta)^2-4\cdot2\cdot2\beta^2=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2>0$, για κάθε $\beta>0$ και ρίζες τις: $x_{1,2}=\frac{5\beta\pm\sqrt{9\beta^2}}{4}=\frac{5\beta\pm3\beta}{4}$. Οπότε $x_1=\frac{5\beta+3\beta}{4}=2\beta$ και $x_2=\frac{5\beta-3\beta}{4}=\frac{\beta}{2}$.

β. Οι αριθμοί x_1, β , x_2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν
$\beta^2=x_1x_2\Leftrightarrow\beta^2=2\beta\cdot\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\beta^2=\beta^2$, που ισχύει.

234 Θέμα 2 – 1311

α. Έχουμε $(2\kappa)^2=(\kappa-2)(7\kappa+4)\Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8\Leftrightarrow -3\kappa^2+10\kappa+8=0\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$.

Είναι $\Delta=(-10)^2-4\cdot 3\cdot(-8)=100+96=196>0$ και $\kappa_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{196}}{6}=\dfrac{10\pm 14}{6}$.

Οπότε $\kappa_1=\dfrac{10+14}{6}=4$ και $\kappa_2=\dfrac{10-14}{6}=-\dfrac{2}{3}$, που απορρίπτεται, αφού $\kappa\in\mathbb{N}$.

Άρα $\kappa=4$ και οι αριθμοί είναι 2 , 8 , 32 , οπότε ο λόγος είναι $\lambda=\dfrac{8}{2}=4$.

β. i. Είναι $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda=4\alpha_1$, $\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=\alpha_1\cdot\lambda^4=\alpha_1\cdot 4^4=256\alpha_1$, $\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^{4-1}=\alpha_1\cdot\lambda^3=\alpha_1\cdot 4^3=64\alpha_1$.

ii. $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)\Leftrightarrow 4\alpha_1+256\alpha_1=4(\alpha_1+64\alpha_1)\Leftrightarrow 260\alpha_1=260\alpha_1$, που ισχύει.

235 Θέμα 2 – 1321

α. Οι δοσμένοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) , αν και μόνο αν

$(2-x)^2=(x+4)(6-x)\Leftrightarrow 4-4x+x^2=6x-x^2+24-4x\Leftrightarrow 2x^2-6x-20=0\Leftrightarrow x^2-3x-10=0$

Είναι:
- $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49$
- $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 7}{2}$

Οπότε $x=5$ ή $x=-2$.

β. i. Για $x=5$, οι αριθμοί είναι: 9 , -3 , 1 .

Οπότε ο λόγος είναι $\lambda=-\dfrac{3}{9}=-\dfrac{1}{3}$.

ii. Είναι $\alpha_4=6-x\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^{4-1}=6-5\Leftrightarrow\alpha_1\cdot(-\dfrac{1}{3})^3=1\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)=1\Leftrightarrow-\dfrac{\alpha_1}{27}=1\Leftrightarrow\alpha_1=-27$.

236 Θέμα 2 – 1339

α. Είναι $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27\Leftrightarrow\dfrac{\alpha_1\cdot\lambda^{5-1}}{\alpha_1\cdot\lambda}=27\Leftrightarrow\lambda^3=3^3\Leftrightarrow\lambda=3$.

β. Έχουμε $S_4=200\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=200\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\dfrac{3^4-1}{3-1}=200\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\dfrac{81-1}{2}=200\Leftrightarrow 40\alpha_1=200\Leftrightarrow\alpha_1=5$

237 Θέμα 4 – 1499

α. Είναι $2x=2+8\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=5$. Τότε οι αριθμοί είναι 2 , 5 , 8 . Η διαφορά είναι $\omega=5-2=3$.

β. Είναι $x^2=2\cdot 8\Leftrightarrow x^2=16\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=4$. Τότε οι αριθμοί είναι 2 , 4 , 8 . Ο λόγος είναι $\lambda=\dfrac{4}{2}=2$.

γ. i. Είναι $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]=\dfrac{\nu}{2}\cdot[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3]=\dfrac{\nu}{2}(4+3\nu-3)=\dfrac{\nu}{2}(3\nu+1)=\dfrac{3\nu^2+\nu}{2}$

ii. Είναι $2(S_\nu+24)=\beta_7\Leftrightarrow 2\cdot(\dfrac{3\nu^2+\nu}{2}+24)=\beta_1\cdot\lambda^{7-1}\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=2\cdot 2^6\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=128$

$\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0$.

Είναι $\Delta=1^2-4\cdot 3\cdot(-80)=1+960=961>0$ και $\nu_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{961}}{6}=\dfrac{-1\pm 31}{6}$.

Οπότε $\nu_1=\dfrac{-1+31}{6}=5$ και $\nu_2=\dfrac{-1-31}{6}=-\dfrac{16}{3}\notin\mathbb{N}^*$ που απορρίπτεται. Άρα $\nu=5$.

238 Θέμα 4 – 1519

α. Έχουμε:
- $\alpha_3=4\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^{3-1}=4\Leftrightarrow\alpha_1=\dfrac{4}{\lambda^2}$, (1)
- $\alpha_5=16\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^4=16\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\dfrac{4}{\lambda^2}\cdot\lambda^4=16\Leftrightarrow\lambda^2=4\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda=2$

Άρα $\alpha_1=\dfrac{4}{2^2}=1$.

β. Είναι $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\dfrac{\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\dfrac{1}{\alpha_\nu}}=\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}=\dfrac{\alpha_\nu}{\lambda\cdot\alpha_\nu}=\dfrac{1}{\lambda}$.

Άρα η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι $\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_1}=1$ και $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$, οπότε:

- $S'_{10}=\beta_1\cdot\dfrac{(\lambda')^{10}-1}{\lambda'-1}=1\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}-1}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{10}}-1}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{2\,(1-2^{10})}{2^{10}}=-\dfrac{1-2^{10}}{2^9}=\dfrac{1}{2^9}\cdot(2^{10}-1)$

- $S_{10}=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=1\cdot\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1$.

Άρα $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}\cdot S_{10}$.

239 Θέμα 4 – 12731

α. Για να είναι οι αριθμοί $\dfrac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa\cdot\lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει

$\kappa^2=\dfrac{\kappa}{\lambda}\cdot(\kappa\cdot\lambda)\Leftrightarrow\kappa^2=\dfrac{\kappa\cdot\kappa\cdot\lambda}{\lambda}\Leftrightarrow\kappa^2=\kappa^2$, που ισχύει.

β. Οι αριθμοί $\dfrac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa\cdot\lambda$ έχουν άθροισμα:

$\dfrac{\kappa}{\lambda}+\kappa+\kappa\cdot\lambda=\dfrac{\kappa+\kappa\lambda+\kappa\lambda^2}{\lambda}=\dfrac{\kappa\cdot(1+\lambda+\lambda^2)}{\lambda}=\dfrac{\kappa}{\lambda}\cdot(1+\lambda+\lambda^2)$

Είναι $\dfrac{\kappa}{\lambda}\neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2+\lambda+1\neq 0$.

Το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$$

Άρα $\lambda^2+\lambda+1\neq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

γ. Για την εξίσωση $x^2+10x+16=0$ έχουμε:

- $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{16}{1}=16$, οπότε $\dfrac{\kappa}{\lambda}\cdot(\kappa\cdot\lambda)=16\Leftrightarrow\kappa^2=16\Leftrightarrow|\kappa|=4\Leftrightarrow\kappa=4$, αφού $\kappa>0$

- $S=x_1+x_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}=\dfrac{-10}{1}=-10$, οπότε

$$\frac{4}{\lambda}+4\lambda=-10\Leftrightarrow 4+4\lambda^2=-10\lambda\Leftrightarrow 4+4\lambda^2+10\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda^2+5\lambda+2=0$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-5\pm3}{4}$. Άρα $\lambda=-2$ ή $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, που είναι δεκτές.

Για $\lambda=-2$ οι αριθμοί είναι $-2,\,4,\,-8$, ενώ για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8,\,4,\,-2$.

240 Θέμα 4 – 12998

α. i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$ δηλαδή:

$81 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} + \dfrac{81\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, επομένως $\dfrac{81}{54} = \sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\dfrac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$\left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{27^2\cdot 3}{4} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3})^{14} \Leftrightarrow \dfrac{3^6\cdot 3}{4} = \dfrac{1}{4}\cdot 3^7$, το οποίο ισχύει.

β. Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda = \dfrac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{2}} = \sqrt{3}$.

Ο ν–οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \alpha_1(\sqrt{3})^{\nu-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ έχουμε ότι $\alpha_1\cdot(\sqrt{3})^{7-1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7$,οπότε

$\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^{7-6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_\nu = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{3})^{\nu-1} = \dfrac{(\sqrt{3})^\nu}{2}$.

γ. Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}^{10}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$$

241 Θέμα 4 – 1498

α. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\cdot\beta$.

Επειδή οι: α, Ε, β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, έχουμε $E^2 = \alpha\cdot\beta$, οπότε:

$E^2 = E \Leftrightarrow E^2 - E = 0 \Leftrightarrow E\,(E-1) = 0 \overset{E>0}{\Leftrightarrow} E = 1$.

β. i. Έχουμε $S = \alpha + \beta = 10$ και $P = \alpha\cdot\beta = E = 1$.

Άρα η εξίσωση είναι $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$.

ii. Τα μήκη α , β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 10x + 1 = 0$, που έχει

$\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 100 - 4 = 96 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{10\pm\sqrt{96}}{2} = \dfrac{10\pm\sqrt{16\cdot 6}}{2} = \dfrac{10\pm 4\sqrt{6}}{2} = 5\pm 2\sqrt{6}$.

Άρα ($\alpha = 5+2\sqrt{6}$ και $\beta = 5-2\sqrt{6}$) ή ($\alpha = 5-2\sqrt{6}$ και $\beta = 5+2\sqrt{6}$) .

242 Θέμα 4 – 14645

α)

i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2, \text{δηλαδή}$$
$$\delta^2 = 2x^2, \text{άρα}$$
$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{2x^2} \text{ και επειδή } \delta, x > 0 \text{ προκύπτει ότι:}$$
$$\delta = \sqrt{2}x.$$

ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενό του έχει πλευρά $\sqrt{2}x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $\left(\sqrt{2}x\right)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$.

Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Ισχύει ότι

$$\alpha_4 = 8, \text{άρα}$$
$$\alpha^2 2^{4-1} = 8, \text{δηλαδή}$$
$$\alpha^2 \cdot 8 = 8, \text{οπότε}$$
$$\alpha^2 = 1$$

και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\alpha = 1$.

γ) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2 - 1} = 2^\nu - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδών των αρχικών τετραγώνων ίσο με $255\ \tau.\mu$ πρέπει να ισχύει:

$$S_\nu = 255 \text{ ή ισοδύναμα}$$
$$2^\nu - 1 = 255, \text{δηλαδή}$$
$$2^\nu = 256.$$

Αλλά $256 = 2^8$. Άρα, $2^\nu = 2^8$, οπότε $\nu = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

243 Θέμα 4 – 1394

α. Αν α_ν το πλήθος των βακτηρίων μετά από ν ώρες, τότε η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 102.400$ και $\lambda = \frac{1}{2}$. Μετά από 6 ώρες θα υπάρχουν $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^{6-1} = 102.400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{102.400}{64} = 3.200$ βακτήρια.

β. i. Οι όροι της ακολουθίας (β_ν) αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, αφού κάθε επόμενος όρος προκύπτει από τον προηγούμενο, αφού τον πολλαπλασιάσουμε με το 3. Είναι $\beta_1 = 3.200 \cdot 3 = 9.600$ και $\lambda = 3$.

ii. Είναι $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9.600 \cdot 3^{\nu-1}$

iii. Τα βακτήρια που θα υπάρχουν μετά από 3 ώρες είναι $\beta_3 = 9.600 \cdot 3^{3-1} = 9.600 \cdot 9 = 86.400$.

244 Θέμα 4 – 1435

α. i. Οι αριθμοί που εκφράζουν τα ποσά κατάθεσης, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$. Οπότε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$.

ii. Οι αριθμοί που εκφράζουν τα ποσά κατάθεσης, αποτελούν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 100$ και διαφορά $\omega = 10$, οπότε: $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega = 100 + (\nu-1)\cdot 10 = 10\nu + 90$

iii. Είναι $A_\nu = S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$.

iv. Είναι $B_\nu = S_\nu = \dfrac{\nu}{2} \cdot [2\beta_1 + (\nu-1)\omega] = \dfrac{\nu}{2}[2\cdot 100 + (\nu-1)\cdot 10] = \dfrac{\nu}{2}(10\nu + 190) = 5\nu^2 + 95\nu$.

β. i. Είναι $A_6 = 2^6 - 1 = 63$ € και $B_6 = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 = 750$ € .

ii. Είναι $A_{12} = S_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$ € και $B_{12} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 = 1860$ € .

Άρα με το πρόγραμμα Α θα έχουμε μεγαλύτερο ποσό.

245 Θέμα 2 – 12908

α. Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β .

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β .

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β .

β. i. Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

iii. Είναι $f(1) = f(2) = 2$.

246 Θέμα 2 – 12997

α. Η αντιστοίχιση $f: A \to B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο Β , καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Α σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου Β.

β. Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α , δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

247 Θέμα 2 – 14781

α) Η αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y . Η αντιστοίχιση $y \to x$ δεν είναι συνάρτηση, γιατί $0 \to -2$ και $0 \to 3$, δηλαδή μια τιμή του y αντιστοιχεί σε δυο τιμές του x.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{-2, -1, 0, \dfrac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το

$B = \left\{-6, -4, 0, -\dfrac{25}{4}\right\}$.

248 Θέμα 2 – 14728

α) Είναι: $-1 < 0$, άρα: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

Είναι: $1 > 0$, άρα: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

β) Αφού $x \geq 0$ τότε: $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.

Επομένως: $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και $x \geq 0$.

Άρα $x \geq 1$.

249 Θέμα 2 – 14681

α) Επειδή $3 > 0$, είναι: $f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Αφού $-3 < 0$, είναι $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = x^2 - 1$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Δεκτή τιμή $x = -3 < 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = 2x + 2$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Δεκτή τιμή αφού $x = 3 > 0$.

Επομένως η $f(x) = 8$ ισχύει για $x = -3$ και $x = 3$.

250 Θέμα 2 – 14224

α) Έχουμε: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \dfrac{x+1}{x}$.

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$\mathrm{A} = 0$, δηλαδή

$\dfrac{x+1}{x} = 0$, που συμβαίνει όταν

$x+1=0$, δηλαδή όταν

$x=-1$.

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2, πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$x=1$, που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το x.

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

251 Θέμα 2 – 14649

α) Για $x \geq -1$ είναι $x+1 \geq 0$, οπότε $|x+1|+2 = x+1+2 = x+3$.

Για $x < -1$ είναι $x+1 < 0$, οπότε $|x+1|+2 = -(x+1)+2 = -x-1+2 = 1-x$.

Άρα, τελικά $K = \begin{cases} x+3, & αν\ x \geq -1 \\ 1-x, & αν\ x < -1 \end{cases}$.

β)

i. Είναι $|x-2| = 4 \Leftrightarrow \{x-2 = 4$ ή $x-2 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 6$ ή $x = -2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6+3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1-(-2) = 1+2 = 3$.

252 Θέμα 2 – 13031

Έχουμε:
- $G(2) = \dfrac{2\cdot 2+3}{2-4} = \dfrac{4+3}{-2} = -\dfrac{7}{2}$,
- $G(0) = \dfrac{2\cdot 0+3}{0-4} = -\dfrac{3}{4}$,
- $G(-\frac{1}{2}) = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{-\frac{1}{2}-4} = \dfrac{-1+3}{-\frac{9}{2}} = \dfrac{2}{-\frac{9}{2}} = -\dfrac{4}{9}$.

β. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x = 4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ. Αναζητούμε την τιμή του $x \neq 4$ για την οποία:

$$G(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-4} = 3 \Leftrightarrow 2x+3 = 3(x-4) \Leftrightarrow 2x+3 = 3x-12 \Leftrightarrow x = 15$$

253 Θέμα 2 – 1255

α. Πρέπει $x^2 - x - 6 \neq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x - 6$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1+24 = 25 > 0$ και ρίζες τις: $x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \dfrac{1\pm 5}{2}$. Άρα $x_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2$.

Οπότε πρέπει $x \neq 3$ και $x \neq -2$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{3, -2\}$.

β. Είναι:
- $f(2) = \dfrac{2+2}{2^2-2-6} = \dfrac{4}{4-2-6} = \dfrac{4}{-4} = -1$
- $f(4) = \dfrac{4+2}{4^2-4-6} = \dfrac{6}{16-4-6} = \dfrac{6}{6} = 1$

Άρα $f(2)+f(4) = -1+1 = 0$.

254 Θέμα 2 – 12765

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = [2, +\infty)$.

β. Από τους αριθμούς: $-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 6$, ισχύει ότι $6 \in A$, οπότε είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης. Είναι $f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$.

Επειδή $-1<2$ και $\frac{\sqrt{2}}{2}<2$, έχουμε ότι $-1\notin A$ και $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin A$.

Άρα για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

255 Θέμα 2 – 13032

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x+5\geq 0$ δηλαδή όταν $x\geq -5$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g=[-5\,,+\infty)$.

β. $f(-1)=1-3\cdot(-1)=1+3=4$ και $g(11)=\sqrt{11+5}=\sqrt{16}=4$.

Άρα $f(-1)=g(11)$.

γ. Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία:

$f(x)=g(4)\Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{4+5}\Leftrightarrow 1-3x=3\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

256 Θέμα 2 – 1244

α. Είναι:
- $f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2$.
- $f(3)=3-1=2$.

Άρα $f(-1)=f(3)$.

β.
- Αν $x<0$, τότε $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$, που είναι δεκτή.
- Αν $x\geq 0$, τότε $f(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή.

Άρα $x=-2$ ή $x=1$.

257 Θέμα 2 – 1283

α. Είναι:
- $f(-5)=8+5=13$
- $f(4)=2\cdot 4+5=13$

Άρα $f(-5)=f(4)$.

β.
- Αν $x<0$, τότε $f(x)=9\Leftrightarrow 8-x=9\Leftrightarrow x=-1$, που είναι δεκτή.
- Αν $x\geq 0$, τότε $f(x)=9\Leftrightarrow 2x+5=9\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$, που είναι δεκτή.

Άρα $x=-1$ ή $x=2$.

258 Θέμα 2 – 13026

α. $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$, $f(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

β. Αν *x* ρητός, τότε $f(x)=2x$,0 οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(2x)^2=4x-1$, δηλαδή $4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow(2x-1)^2=0$.

Έτσι, $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

259 Θέμα 2 – 1385

α. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα: $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$ και ρίζες τις:

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}$, οπότε $x_1=\frac{6}{2}=3$ και $x_2=\frac{4}{2}=2$.

Οπότε $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

β. i. Πρέπει $x^2-5x+6\neq 0\Leftrightarrow(x-2)\,(x-3)\neq 0\Leftrightarrow(x-2\neq 0$ και $x-3\neq 0)\Leftrightarrow(x\neq 2$ και $x\neq 3)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{2,\,3\}$.

ii. Για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$

260 Θέμα 2 – 1354

α. Πρέπει $x^2-1 \neq 0$. Είναι $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Οπότε πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

β. Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot3=25-24=1>0$ και

ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm1}{4}$, οπότε $x_1=1$, $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)(x-\dfrac{3}{2})=(x-1)(2x-3)$.

γ. Για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

261 Θέμα 2 – 1295

α. Πρέπει $x-4\neq0 \Leftrightarrow x\neq4$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{4\}$.

Για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}=\dfrac{x(x^2-16)}{x-4}=\dfrac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x^2+4x$

β. Για $x\in A$, έχουμε $f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0$.

Είναι:
- $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-32)=16+128=144$
- $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm12}{2}$

Οπότε $x=\dfrac{-16}{2}=-8$ ή $x=\dfrac{8}{2}=4$, που απορρίπτεται, αφού $4\notin A$.

Άρα $x=-8$.

262 Θέμα 2 – 1297

α. Είναι:
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2}=\dfrac{5}{2}$
- $f(1)=1+\dfrac{1}{1}=1+1=2$
- $f(2)=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

Οπότε $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\dfrac{5}{2}+2-\dfrac{5}{2}=2$.

β. Για $x\neq0$ είναι $f(x)=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$.

Είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0$ και $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm3}{4}$. Άρα $x=2$ ή $x=\dfrac{1}{2}$.

263 Θέμα 2 – 1263

α. Η απόσταση του αυτοκινήτου μετά από $x=25$ λεπτά , είναι $y=35+0{,}8\cdot25=35+20=55$ χιλιόμετρα.

β. Όταν η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α είναι $y=75$, έχουμε

$$35+0{,}8x=75 \Leftrightarrow 0{,}8x=40 \Leftrightarrow 8x=400 \Leftrightarrow x=50\text{ λεπτά}$$

264 Θέμα 2 – 1278

α. Σε βάθος $x = 30$ χιλιομέτρων η θερμοκρασία είναι $T = 15 + 25 \cdot 30 = 15 + 750 = 765\ ^{o}C$.

β. Η θερμοκρασία είναι $T = 290$, όταν $15 + 25x = 290 \Leftrightarrow 25x = 275 \Leftrightarrow x = 11$ km .

γ. Είναι $T > 440 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow 25x > 415 \Leftrightarrow x > 17$ km .

265 Θέμα 4 – 13313

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq \pm 1$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

β. Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

Είναι

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^6 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 1$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

γ. Είναι $f(x) = \dfrac{x^7 - x}{x^3 - x} = \dfrac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

δ. Είναι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$, $\omega = -2$.

- Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A.
- Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A.

266 Θέμα 4 – 1437

α. Πρέπει $|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq -3$ και $x \neq 3$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

β. Θέτουμε $|x| = y$, οπότε $x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6 = y^2 - 5y + 6$

Είναι:
- $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$
- $y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$. Οπότε $y_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ και $y_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

Επομένως $x^2 - 5|x| + 6 = y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3) = (|x| - 3)(|x| - 2)$.

Για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \dfrac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \dfrac{(|x| - 2)(|x| - 3)}{|x| - 3} = |x| - 2$.

γ. Για $x \in A$, έχουμε: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$.

Θέτουμε $|x| = \omega$, (2) και έχουμε: $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$

Είναι:
- $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$
- $\omega_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

Οπότε $\omega=\frac{6}{2}=3$ ή $\omega=\frac{2}{2}=1$

- Αν $\omega=3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=3$ που απορρίπτονται
- Αν $\omega=1 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Άρα $x=-3$ ή $x=-1$ ή $x=1$.

267 Θέμα 4 – 13114

α. Είναι

$$f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}=\frac{|x-1|-3|1-x|+2|x-2|}{2}=$$
$$=\frac{|x-1|-3|x-1|+2|x-2|}{2}=\frac{2|x-2|-2|x-1|}{2}=$$
$$=\frac{2(|x-2|-|x-1|)}{2}=|x-2|-|x-1|=d(x\,,2)-d(x\,,1)$$

β. Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow d(x\,,2)-d(x\,,1)=0 \Leftrightarrow d(x\,,2)=d(x\,,1)$.

Αν M το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία A και B και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος AB.

Άρα $x=\frac{3}{2}$.

γ. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-2|=|x-1|=0 \Leftrightarrow x-2=x-1$ ή $x-2=-x+1 \Leftrightarrow 0x=1$ ή $x=\frac{3}{2}$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x=\frac{3}{2}$.

268 Θέμα 4 – 1441

α. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Έχουμε $f(2)=g(2) \Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5 \Leftrightarrow 4-8+\alpha=2\alpha-5 \Leftrightarrow \alpha-4=2\alpha-5 \Leftrightarrow -\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=1$.

β. i. Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-4x+1=1\cdot x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

Είναι:
- $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$
- $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}$. Οπότε $x=2$ ή $x=3$.

ii. Είναι $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\,2]\cup[3,+\infty)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Έχουμε $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$
$\Leftrightarrow x\in(-\infty,\,2]\cup[3,+\infty)$

269 Θέμα 4 – 1457

α. Είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow 2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$.

γ. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $x^2-x+\lambda-\lambda^2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Δηλαδή $\alpha=1>0$, που ισχύει και

$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2\leq 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2=0 \Leftrightarrow 1-2\lambda=0 \Leftrightarrow -2\lambda=-1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$ (αφού είναι $\Delta\leq 0$).

Άρα $\lambda=\frac{1}{2}$.

270 Θέμα 4 – 1389

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \ (1) \quad \text{και} \quad 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \ (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x + 1)(x - 2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.

Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, **g(α) < 0**. Επίσης όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, το $(\alpha + 3) \in (2, 4) \cup (4, 5)$, οπότε **g(α + 3) > 0.**

Άρα $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$.

271 Θέμα 4 – 14375

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = (-\mu)^2 - 4.1.(-2) = \mu^2 + 8 > 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$f(-2) = 4 + 2\mu - 2 = 2\mu + 2, \quad f(1) = 1 - \mu - 1 = -\mu - 1$$

$$f(3) = 9 - 3\mu - 2 = 7 - 3\mu.$$

Οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές όταν το x παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος των ριζών και αρνητικές όταν το x παίρνει τιμές εντός των ριζών. Άρα, για να βρίσκονται τα $x = -2$ και $x = 3$ εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ το $x = 1$ εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\left(f(1)\right)^2 = f(-2)\cdot f(3) \Leftrightarrow$$
$$(-\mu-1)^2 = (2\mu+2)\cdot(7-3\mu) \Leftrightarrow$$
$$(\mu+1)^2 - 2(\mu+1)\cdot(7-3\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu+1)\cdot(\mu+1-14+6\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu+1)\cdot(7\mu-13) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } 7\mu - 13 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } \mu = \frac{13}{7}.$$

Άρα $\mu = \frac{13}{7}$ αφού $\mu \in \left(-1, \frac{7}{3}\right)$.

i. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι:

$f(-2) = \frac{26}{7} + 2 = \frac{40}{7}$, $f(1) = -\frac{13}{7} - 1 = -\frac{20}{7}$ και $f(3) = 7 - \frac{39}{7} = \frac{10}{7}$.

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}$.

272 Θέμα 4 – 14759

α) Έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \alpha^2 - 36 \Leftrightarrow$$
$$3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow$$
$$9\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(9\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta) + (\beta^2 + 12\beta + 36) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0,$$

που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha+\beta)^2 + (\beta+6)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν : $3\alpha + \beta = 0$ και $\beta + 6 = 0$.

Άρα $\beta = -6$ και $\alpha = 2$.

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 2x - 12$ είναι: $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4\cdot 13$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow$$
$$x_1 = -1 + \sqrt{13} \text{ και } x_2 = -1 - \sqrt{13}.$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6},$$

αφού $x_1+x_2=-2$ και $x_1\cdot x_2=-12$.

Εναλλακτικά:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{-1+\sqrt{13}}+\frac{1}{-1-\sqrt{13}}=$$

$$\frac{-1-\sqrt{13}-1+\sqrt{13}}{(-1-\sqrt{13})\cdot(-1+\sqrt{13})}=$$

$$\frac{-2}{1-13}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6}$$

273 Θέμα 4 – 1400

α. Είναι $K(0)=12,5\cdot 0+120=120$.

Άρα, αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα 120 € .

β. Οι αριθμοί $12,5$ και $15,5$ εκφράζουν αντίστοιχα τις τιμές κόστους και πώλησης για κάθε μπλουζάκι.

γ. Είναι $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 12,5\cdot x+120=15,5x\Leftrightarrow 12,5x-15,5x=-120\Leftrightarrow -3x=-120\Leftrightarrow x=40$.

Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια.

δ. Είναι:
- $K(60)=12,5\cdot 60+120=870$ €
- $E(60)=15,5\cdot 60=930$ €

Επειδή $E(60)>K(60)$ έχουν κέρδος.

274 Θέμα 4 – 13170

α) Αν καταθέσουμε στην τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, τότε στο τέλος του 1ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι $x+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x=x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Στο τέλος του 2ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι

$x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$.

β)

i. Αφού ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β, άρα $15000-y$ θα είναι το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Α. Σύμφωνα με το α) ερώτημα το ποσό που θα υπάρχει στην τράπεζα Β μετά από δύο έτη θα είναι $y\left(1+\frac{3}{100}\right)^2=y\cdot 1{,}03^2$, ενώ το αντίστοιχο ποσό στην τράπεζα Α θα είναι

$(15000-y)\left(1+\frac{2}{100}\right)^2=(15000-y)\cdot 1{,}02^2$.

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει $y\cdot 1{,}03^2+(15000-y)\cdot 1{,}02^2=15811$. Έτσι, θα έχουμε: $y\cdot 1{,}03^2-y\cdot 1{,}02^2+15000\cdot 1{,}02^2=15811\Leftrightarrow$

$y\cdot(1{,}03^2-1{,}02^2)=15811-15000\cdot 1{,}02^2$

ii. Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$y(1{,}03 - 1{,}02)(1{,}03 + 1{,}02) = 15811 - 15000 \cdot 1{,}0404 \Leftrightarrow$

$y \cdot 0{,}01 \cdot 2{,}05 = 15811 - 15606 \Leftrightarrow y = \frac{205}{0{,}01 \cdot 2{,}05} = \frac{2050000}{205} = 10000.$

Άρα το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β ήταν 10000 €, ενώ στην τράπεζα Α είναι 5000 €.

275 Θέμα 4 – 12689

α. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο το οποίο είναι $Y_1(0) = 150$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β. Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5) = 150 + 50 \cdot 5 = 400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ. Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το $10^{ο}$ λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα $[10, 20]$.

Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστέφει στο ελικοδρόμιο. Είναι:

- $Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2$ λεπτά
- $Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16$ λεπτά

δ. i. Είναι $Y_1(t+1) - Y_1(t) = [150 + 50(t+1)] - (150 + 50t) = 50$ μέτρα, οπότε όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, κάθε λεπτό μέχρι το $5^{ο}$ λεπτό της κίνησής του, το ύψος του αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα.

ii. Είναι $Y_2(t+1) - Y_2(t) = [650 - 25(t+1)] - (650 - 25t) = -25$ μέτρα, οπότε όταν επιστρέφει το ελικόπτερο, κάθε λεπτό από το $10^{ο}$ μέχρι το $20^{ο}$ λεπτό της κίνησής του, το ύψος του μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα.

276 Θέμα 4 – 1418

α. Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι:
- τύπου Α είναι $E_A = d^2 cm^2$ και
- τύπου Β είναι $E_B = (d+1)^2 cm^2$.

β. i. Το εμβαδόν της επιφάνειας είναι $E = 200E_A$ ή $E = 128E_B$

Οπότε $200E_A = 128E_B \Leftrightarrow 25E_A = 16E_B \Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2$

$25d^2 = 16\,(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600$ και

ρίζες τις $d_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 9} = \frac{32 \pm 40}{18}$.

Οπότε $d = \frac{72}{18} = 4$ ή $d = \frac{-8}{18} = -\frac{4}{9} < 0$, που απορρίπτεται.

Άρα $d = 4$.

ii. Το εμβαδόν E που καλύπτουν τα πλακάκια είναι $E = 200d^2 = 200 \cdot 4^2 = 3200cm^2$.

277 Θέμα 4 – 1420

α. Οι διαστάσεις του σκιασμένου ορθογωνίου είναι $x - 2$ και $x - 4$, οπότε το εμβαδόν της περιοχής εκτύπωσης είναι $E(x) = (x-2)(x-4)$ (1) .

β. Είναι $E(x) = 35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 - 35 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Έχουμε:

- $\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-27) = 36+108 = 144 > 0$
- $x_{1,2} = \dfrac{6\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1} = \dfrac{6\pm 12}{2}$. Οπότε $x = \dfrac{18}{2} = 9$ ή $x = \dfrac{-6}{2} = -3$, που απορρίπτεται.

Άρα $x = 9$.

γ. Είναι $x^2 - 6x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$, (1) .

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 16$ έχει

- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-16) = 36+64 = 100 > 0$
- $x_{1,2} = \dfrac{6\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1} = \dfrac{6\pm 10}{2}$, οπότε $x = \dfrac{16}{2} = 8$ ή $x = \dfrac{-4}{2} = -2$

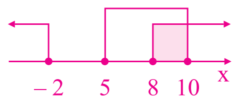
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty)$.

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$		+	0	−	0	+	

Επιπλέον έχουμε $5 \leq x \leq 10$.

Άρα $x \in [8, 10]$.



278 Θέμα 4 – 1421

α. Οι διαστάσεις του ορθογώνιου εκτύπωσης είναι $x-2$ και $x-4$.

Οπότε η περιοχή εκτύπωσης έχει εμβαδόν $E = (x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$.

β. Είναι $E = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$

Είναι:
- $\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-16) = 36+64 = 100$
- $x_{1,2} = \dfrac{6\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1} = \dfrac{6\pm 10}{2}$. Οπότε $x = 8$ ή $x = -2$, που απορρίπτεται.

Άρα $x = 8$ cm .

γ. Είναι $E \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \leq 0$, (1) .

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει:

- $\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-27) = 36+108 = 144$
- $x_{1,2} = \dfrac{6\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1} = \dfrac{6\pm 12}{2}$. Οπότε $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ και $x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$.

x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
$x^2 - 6x - 27$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η (1) $\Leftrightarrow$ $-3 \leq x \leq 9$.

Έχουμε επιπλέον $5 \leq x \leq 10$, οπότε $5 \leq x \leq 9$.

279 Θέμα 4 – 1422

α. Είναι $F = 1{,}8C + 32$ και $K = C + 273$.

β. Έχουμε $F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow -1{,}8C = 32 - F \Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32 \Leftrightarrow C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$.

Άρα $K = \dfrac{F-32}{1{,}8} + 273$.

γ. Έχουμε

$$278 \leq K \leq 283 \Leftrightarrow 278 \leq \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \leq 283 \Leftrightarrow 278 - 273 \leq \frac{F-32}{1{,}8} \leq 283 - 273$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq \frac{F-32}{1{,}8} \leq 10 \Leftrightarrow 9 \leq F - 32 \leq 18 \Leftrightarrow 41 \leq F \leq 50 .$$

280 Θέμα 4 – 1467

α. Το ποσό που θα πληρώσει κάποιος αν καταναλώσει

i. x = 0 κυβικά νερού είναι $f(0)=12$ €

ii. x = 10 κυβικά νερού είναι $f(10)=12+0,5\cdot 10=17$ €.

iii. x = 50 κυβικά νερού είναι $f(50)=0,7\cdot 50+6=41$ €

β. Αν οι κάτοικοι κατανάλωσαν x κυβικά νερού ο καθένας, τότε έχουμε $f(x)>g(x)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x\in[0,30]$, τότε $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 12+0,5x>12+0,6x \Leftrightarrow 0,5x>0,6x\Leftrightarrow -0,1x>0\Leftrightarrow 0,1x<0$

  $\Leftrightarrow x<0$, άτοπο.

- Αν $x>30$, τότε $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 0,7x+6>12+0,6x \Leftrightarrow 0,1x>6 \Leftrightarrow x>60$.

Άρα καθένας από τους κατοίκους των πόλεων Α και Β κατανάλωσε περισσότερα από $60m^3$ νερού.

281 Θέμα 4 – 1484

α. Για να κερδίσει η χελώνα, θα πρέπει $S_X(t)>S_\Lambda(t)\Leftrightarrow 600+40t>10t^2 \Leftrightarrow -10t^2+40t+600>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2-4t-60<0\ ,\ (1)$$

Το τριώνυμο $t^2-4t-60$ έχει:

- $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-60)=16+240=256>0$

- $t_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{256}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 16}{2}$, οπότε $t=\dfrac{20}{2}=10$ ή $t=\dfrac{-12}{6}=-6$

t	$-\infty$	-6		10	$+\infty$
$t^2-4t-60$	+	0	−	0	+

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Οπότε η (1) έχουμε $\Leftrightarrow t\in(-6,10)$.

Επειδή επιπλέον $t\geq 0$, έχουμε $0\leq t<10\Leftrightarrow 0\leq 40t<400 \Leftrightarrow 600+0\leq 600+40t<600+400$

$$\Leftrightarrow 600\leq S_\Lambda(t)<1000$$

Άρα, το τέρμα Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο.

β. i. Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$S_x(t)=S_\Lambda(t)\Leftrightarrow 600+40t=10t^2 \Leftrightarrow 10t^2-40t-600=0 \Leftrightarrow t^2-4t-60=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} t=10$ min

ii. Είναι $S_\Lambda(12)=10\cdot 12^2=10\cdot 144=1440$ μέτρα

$S_x(12)=600+40\cdot 12=600+480=1080$ μέτρα

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας. Η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$S=S_\Lambda(12)-S_X(12)=1440-1080=360$ m.

iii. Είναι $S_\Lambda(t)=2250\Leftrightarrow 10t^2=2250\Leftrightarrow t^2=225 \Leftrightarrow t^2=15^2\overset{t>0}{\Leftrightarrow} t=15$ min.

282 Θέμα 4 – 1495

α. Έχουμε $x+y=10\Leftrightarrow y=10-x$. Είναι $x>0$ και $y>0\Leftrightarrow 10-x>0\Leftrightarrow x<10$, άρα $x\in(0,10)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x)=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}x(10-x)=\dfrac{1}{2}(10x-x^2)=\dfrac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0,10)$.

β. Είναι $E(x)\leq\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(-x^2+10x)\leq\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow -x^2+10x\leq 25\Leftrightarrow x^2-10x+25\geq 0\Leftrightarrow(x-5)^2\geq 0$, που ισχύει.

γ. Είναι $E(x)\leq\dfrac{25}{2}\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}(x-5)^2=0\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$, οπότε $y=10-5=5$.

Άρα το $E(x)$ γίνεται μέγιστο, όταν $x=y=5$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

283 Θέμα 4 – 1497

α. Πρέπει $x>0$ και $(MZ)>0\Leftrightarrow 3-x>0\Leftrightarrow x<3$. Άρα $0<x<3$.

Είναι $E=(ΑΘΜΚ)+(ΜΖΓΗ)=x^2+(3-x)^2=x^2+9-6x+x^2=2x^2-6x+9,\quad x\in(0,3)$.

β. Είναι $E\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-6x+9\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 4x^2-12x+18\geq 9\Leftrightarrow 4x^2-12x+9\geq 0\Leftrightarrow (2x-3)^2\geq 0$, που ισχύει.

γ. Είναι $E=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (2x-3)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Για $x=\frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του ΑΒ, οπότε το Μ είναι το μέσο του ΑΓ .

284 Θέμα 4 – 1501

α. Είναι $y=38,5$, οπότε $38,5=0,43x-26\Leftrightarrow 0,43x=38,5+26\Leftrightarrow 0,43x=64,5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 43x=6450\Leftrightarrow x=\frac{6450}{43}\Leftrightarrow x=150\,\text{cm}$.

β. Για $y=42,8$ και $x=164$ η σχέση $y=0,45x-31$ γίνεται
$42,8=0,45\cdot 164-31\Leftrightarrow 42,8=73,8-31\Leftrightarrow 42,8=42,8$, που ισχύει.
Άρα το μηραίο οστό και τα οστά του χεριού προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ. Αν ένας άνδρας και μία γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ιδίου μήκους, τότε:
$0,43x-26=0,45x-31\Leftrightarrow \Leftrightarrow -0,02x-=-5\Leftrightarrow 2x=500\Leftrightarrow x=250\,\text{cm}$.

Άρα, δεν μπορεί να συμβεί διότι έχει υπάρξει άντρας με ύψος 2,72 m , αλλά δεν έχει καταγραφεί γυναίκα με ύψος μεγαλύτερο από 2,48 m.

285 Θέμα 4 – 1409

α. 'Εστω ότι ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα για x λεπτά.
Έχουμε $9\cdot 32+12\cdot x=360\Leftrightarrow 288+12x=360\Leftrightarrow 12x=72\Leftrightarrow x=6$.

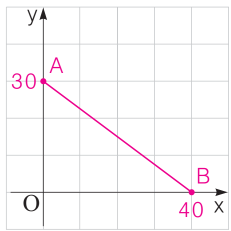
β. i. Έστω y ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα.

Έχουμε $9x+12y=360\Leftrightarrow 12y=360-9x\Leftrightarrow y=\frac{360}{12}-\frac{9}{12}x\Leftrightarrow y=30-\frac{3}{4}x$.

Άρα $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

ii. Είναι $x\geq 0$ και $f(x)\geq 0\Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x\geq 0\Leftrightarrow 120-3x\geq 0\Leftrightarrow -3x\geq -120\Leftrightarrow x\leq 40$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=[0,40]$.



γ. • Για $x=0$, είναι $f(0)=30$.

• $f(x)=0\Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow 120-3x=0\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι το τμήμα ΑΒ με Α(0, 30) και Β(40, 0) .

Για να κάψει ο αθλητής 360 θερμίδες το σημείο Α δείχνει ότι, αν δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά, ενώ το Β , ότι αν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 40 λεπτά.

286 Θέμα 4 – 1505

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:

$$E_1=15\cdot 25=375\ m^2$$

Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις 15 + 2x, 25 + 2x και εμβαδόν:

$$E_2=(15+2x)(25+2x)=$$
$$=375+30x+50x+4x^2=$$
$$=4x^2+80x+375$$

Το εμβαδόν της ζώνης είναι:

$$E = E_2 - E_1 =$$
$$= 4x^2 + 80x + 375 - 375 =$$
$$= 4x^2 + 80x,\ x > 0$$

β) Ισχύει ότι:

$$E = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5$ m.

γ) Είναι:

$$E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		5		$+\infty$
$x^2 + 20x - 125$			$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (0, 5)$$

287 Θέμα 4 – 1506

α. Αν x και y οι διαστάσεις του ορθογώνιου, τότε $\Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow 40 = 2x + 2y \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$
Επειδή $y > 0$ έχουμε $20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$. Άρα $0 < x < 20$.

β. Είναι $E(x) = x \cdot y = x(20 - x) = 20x - x^2$.

γ. Είναι $E(x) \le 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \le 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 \ge 0$, που ισχύει.

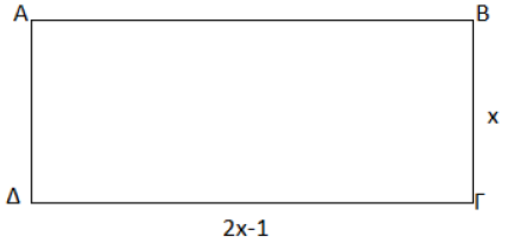
δ. Επειδή $E(x) \le 100$ και το ίσον ισχύει για $x = 10$, η μέγιστη τιμή του $E(x)$ είναι 100 .

Για $x = 10$, είναι $y = 20 - 10 = 10$.

Άρα από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

288 Θέμα 4 – 14702

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μακέτα του πάρκου



α) Για τη περίμετρο της μακέτας έχουμε:

$$\Pi(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} + 2(2\mathrm{x} - 1) = 6\mathrm{x} - 2 \ , \text{ με } x > \frac{1}{2}$$

Και για το εμβαδόν της:

$$\mathrm{E}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}(2\mathrm{x} - 1) = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \text{ με } x > \frac{1}{2}.$$

β) Στη περίφραξη του πάρκου εμπλέκεται η περίμετρος που δίνεται από τον τύπο

$\Pi(\mathrm{x}) = 6\mathrm{x} - 2$. Αρκεί $\Pi(\mathrm{x}) \leq 8$ ή $6\mathrm{x} - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 6x \leq 10 \Leftrightarrow \mathrm{x} \leq \frac{5}{3}$.

και για το 2x-1 προκύπτει $2 \cdot \mathrm{x} \leq 2 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}$.

Επειδή οι διαστάσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές με $x > \frac{1}{2}$, οι τιμές τους κυμαίνονται :

$$\frac{1}{2} < \mathrm{x} \leq \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad 0 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}.$$

γ) Το εμβαδόν της μακέτας δίνεται από το τύπο $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$.

Αρκεί $\mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq 1$ ή $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \leq 1$ τότε $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 \leq 0$ (1).

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης (1) μηδενίζεται για $\mathrm{x}_1 = 1$ και $\mathrm{x}_2 = -\frac{1}{2}$ και

επειδή το α=2 >0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα πρόσημών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό

για $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $\mathrm{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Επειδή $x > \frac{1}{2}$ τότε $\mathrm{x} \in (\frac{1}{2}, 1]$.

289 Θέμα 4 – 14629

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x, τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι 100 – x . Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100 - \mathrm{x})$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x)=x-\frac{1}{3}(100-x)=\frac{3x-(100-x)}{3}=\frac{4x-100}{3}=\frac{4}{3}(x-25)$$

όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) Είναι:

$$E(x)=88\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)=88\Leftrightarrow\frac{x-25}{3}=22\Leftrightarrow x-25=66\Leftrightarrow x=91$$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50.

Τότε έχουμε:

$$E(x)=50\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)=50\Leftrightarrow 4x-100=150\Leftrightarrow 4x=250\Leftrightarrow x=\frac{125}{2}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50.

Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν $E(x)>50$. Είναι:

$$E(x)>50\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)>50\Leftrightarrow 4x-100>150\Leftrightarrow 4x>250\Leftrightarrow x>\frac{125}{2}=62,5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1)+E(x_2)=140\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x_1-25)+\frac{4}{3}(x_1-25)=140\Leftrightarrow 4x_1-100+4x_2-100=420$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1+x_2)=620\Leftrightarrow x_1+x_2=155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες $200-155=45$ ερωτήσεις.

290 Θέμα 2 – 14306

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $1-x\geq 0$, δηλαδή όταν $x\leq 1$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f=(-\infty,1]$.

β) Για $x=-24<1$ η τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f(-24)=\frac{\sqrt{1-(-24)}}{5}+3=\frac{\sqrt{25}}{5}+3=1+3=4.$$

γ) Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $f(1)=\frac{\sqrt{1-1}}{5}+3=0+3=3.$

Άρα το σημείο (1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

291 Θέμα 2 – 1358

α. Είναι:
- $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-15=1-2-15=-16$
- $f(0)=0^2+2\cdot 0-15=0+0-15=-15$
- $f(1)=1^2+2\cdot 1-15=1+2-15=-12$

Οπότε $f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$.

β. Είναι $f(0)=-15$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-15)$. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0$.

Είναι:
- $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 8}{2}$, οπότε $x=\dfrac{6}{2}=3$ ή $x=\dfrac{-10}{2}=-5$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(3, 0)$ και $\Gamma(-5, 0)$.

292 Θέμα 2 – 12686

α. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

β. Είναι: $f(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=4$, άρα το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0, 0)$.

293 Θέμα 2 – 1345

α. Πρέπει $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{3\}$.

β. Για κάθε $x\neq 3$, έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2$.

γ. Είναι:
- $f(0)=-2$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-2)$ και τον $x'x$ στο $B(2, 0)$.

294 Θέμα 4 – 1510

α. Το μηνιαίο κόστος, αν γεμίζει ν τόνερ είναι $K(\nu)=15\nu+6500$.

β. Τα μηνιαία έσοδα από την πώληση ν τόνερ είναι $E(\nu)=25\nu$

γ. i. Έστω $P(\nu)$ το κέρδος της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ. Είναι

$$P(\nu)=E(\nu)-K(\nu)=25\nu-15\nu-6500=10\nu-6500$$

Πρέπει $P(\nu)\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu\geq 6500 \Leftrightarrow \nu\geq 650$.

ii. Πρέπει $P(\nu)\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu\geq 7000 \Leftrightarrow \nu\geq 700$.

295 Θέμα 2 – 14072

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x-2\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x\neq 2.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Το σημείο $M(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, γιατί

$$f(1)=\frac{1-4}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3\,.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,2)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(-2,0)$, αφού

για $x=0$, έχουμε: $f(0)=\dfrac{0-4}{0-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$ και

για $y=f(x)=0$, έχουμε: $0=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, οπότε

$x^2-4=0$, δηλαδή

$(x+2)(x-2)=0$, οπότε

$x+2=0$ ή $x-2=0$ και τελικά

$x=-2$ (δεκτή) ή $x=2$ (απορρίπτεται).

296 Θέμα 2 – 14596

α) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης παραγοντοποιούμε το τριώνυμο x^2-2x-3.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-2x-3 είναι: $\Delta=4-4\cdot(-3)=16$

και οι ρίζες:.

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}\Leftrightarrow x_1=3 \text{ και } x_2=-1.$$

Άρα: $x^2-2x-3=(x+1)\cdot(x-3)$.

Επομένως έχουμε : $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+1}=x-3$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(1,-4)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή θα πρέπει $f(1)=-4$.

Είναι $f(1)=-2\neq -4$. Άρα το σημείο $A(1,-4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

297 Θέμα 2 – 13322

α. Η συνάρτηση ορίζεται, όταν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, γιατί $x^2+2\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g=[1\,,+\infty]$.

β. • Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1)=\dfrac{1}{1+2}+\sqrt{1-1}=\dfrac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x=-2$, διότι $-2\notin A_g$.

• Για $x=2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2)=\dfrac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\dfrac{2}{6}+\sqrt{1}=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

298 Θέμα 2 – 12680

α. Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

β. Έχουμε: $f(4)=\dfrac{3}{\sqrt{4}-1}=3$, άρα το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Το $x=-1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Άρα το σημείο N δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

299 Θέμα 2 – 1259

α. Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{1,-1\}$.

β. Αρκεί $f(\alpha)=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2-1}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2-1=8 \Leftrightarrow \alpha^2=9 \Leftrightarrow \alpha^2=3^2 \Leftrightarrow \alpha=3$ ή $\alpha=-3$.

300 Θέμα 2 – 14603

α) Έχουμε:

$f(-1)=2(-1)-5=-7$,

$f(3)=2\cdot 3-5=1$ και

$f(5)=5^2=25$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0)=0$.

Όμως $f(0)=2\cdot 0-5=-5\neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Για τον $y'y$ άξονα είναι $x=0$ και $f(0)=2\cdot 0-5=-5$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0,-5)$.

301 Θέμα 2 – 1241

α. Είναι $\begin{cases} f(1)=6 \\ f(-1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 1+\beta=6 \\ \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ -\alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ 2\beta=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+5=6 \\ \beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=5 \end{cases}$.

β. Για $\alpha=1$ και $\beta=5$, έχουμε $f(x)=x+5$.

Είναι $f(0)=5$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,5)$ και τον $x'x$ στο $B(-5,0)$.

302 Θέμα 2 – 14628

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4)=3$.

Με $x=4$ έχουμε: $f(4)=\frac{4^2-4}{4}=\frac{16-4}{4}=\frac{12}{4}=3$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,3)$

β) Ισχύει:

$$f(-4)=\frac{(-4)^2-4}{-4}=\frac{16-4}{-4}=-\frac{12}{4}=-3$$

οπότε και το σημείο $B(-4,-3)$ είναι πάνω στην C_f.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=3$.

Με $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=3\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x}=3\Leftrightarrow x^2-4=3x\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4. Επιπλέον, $f(-1)=3$ και $f(4)=3$,

οπότε τα αντίστοιχα σημεία της C_f έχουν τεταγμένη $y=3$.

Επομένως, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία είναι το $A(4,3)$ και το $\Gamma(-1,3)$.

303 Θέμα 2 – 1299

α. Είναι $A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$.

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και η g το $B=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\neq 0$, έχουμε

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{3}{x}=x^2-x+3\Leftrightarrow 3=x^3-x^2+3x\Leftrightarrow x^3-x^2+3x-3=0\Leftrightarrow$$

$$\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)(x^2+3)=0\overset{x^2+3\neq 0}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1$$

Είναι $f(1)=\frac{3}{1}=3$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $M(1,3)$.

304 Θέμα 2 – 1301

α. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.
Είναι $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f(-1)=-1$.
Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$, $A(1,1)$ και $B(-1,-1)$.

β. Επειδή τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,-1)$, έχουν αντίθετες ομώνυμες συντεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς το O.

305 Θέμα 4 – 14562

α) Είναι:

$$x^2>x\Leftrightarrow$$
$$x^2-x>0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $x^2-x=x(x-1)$ έχει ρίζες τις: $x=0, x=1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως η (1) αληθεύει για $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

β) i. Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε: $0<1<\alpha \overset{\alpha)\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau.}{<} \alpha^2$ και

$1<\alpha$, οπότε $\sqrt{1}<\sqrt{\alpha}$, δηλαδή

$$\sqrt{\alpha}>1.$$

Επίσης: $\alpha<\alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha^2} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha}<\alpha$.

Οπότε τελικά: $0<1<\sqrt{\alpha}<\alpha<\alpha^2$.

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha<\alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$
$$\alpha<\frac{\alpha^2+\alpha}{2}$$

Επίσης:

$$\alpha<\alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2+\alpha}{2}<\alpha^2$$

Οπότε τελικά: $\alpha<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}<\alpha^2$.

306 Θέμα 4 – 1393

α. Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Είναι $g(-1)=-1+1=0$.

Οπότε το $A(-1,0)$.

β. Είναι $f(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0$, (2).

Η (2) έχει $\Delta=2^2-4\cdot 1(2-\alpha)=4-8+4\alpha=4\alpha-4=4(\alpha-1)$.

- Αν $\alpha>1$, τότε $\Delta>0$, άρα η (2) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

- Αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$, άρα η (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

307 Θέμα 4 – 12941

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $3-|x|\neq 0$.

Είναι

$$3-|x|=0 \Leftrightarrow -|x|=-3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x\in(-\infty\,,-3)\cup(-3\,,3)\cup(3\,,+\infty)$.

β. Για $x\in(-\infty\,,-3)\cup(-3\,,3)\cup(3\,,+\infty)$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\frac{9-x^2}{3-|x|}=\frac{3^2-|x|^2}{3-|x|}=\frac{(3+|x|)(3-|x|)}{3-|x|}=3+|x|$$

γ. • Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 3+|x|=0 \Leftrightarrow |x|=-3$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα η γραφική παράσταση C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

- Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ πρέπει να βρούμε το $f(0)$.

Ισχύει $f(0)=3+|0|=3$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0\,,3)$.

δ. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

Η εξίσωση $g(x)=f(x) \Leftrightarrow -x^2+3=3+|x| \Leftrightarrow -|x|^2+3-3-|x|=0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|=0$.

Επειδή $|x|^2\geq 0$ και $|x|\geq 0$, ισχύει $|x|^2+|x|=0 \Leftrightarrow x=0$.
Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το $(0\,,3)$.

308 Θέμα 4 – 14459

α) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε x^2+1, οπότε $\frac{1}{x^2+1}>0$, δηλαδή $f(x)>0$, η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δυο λύσεις και να τις προσδιορίσουμε.

Είναι:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=\alpha \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+1=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{\alpha}-1,\ (1)$$

και επειδή $0<\alpha<1$, έχουμε $\frac{1}{\alpha}>1$ οπότε $\frac{1}{\alpha}-1>0$.

Επομένως η (1) έχει δυο (αντίθετες) λύσεις τις $x_1=\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$ και $x_2=-\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$ που είναι και οι τετμημένες των κοινών σημείων τους.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leq\frac{1}{2},\text{ ή αρκεί, }\frac{|x|}{x^2+1}\leq\frac{1}{2},\text{ ή αρκεί, }2|x|\leq x^2+1$$

που ισχύει, αφού από την προφανή ανισότητα $(|x|-1)^2\geq 0$ και την ισότητα $|x|^2=x^2$ έπεται ότι $x^2+1\geq 2|x|$.

309 Θέμα 4 – 14810

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, οπότε ισχύει: $f(0)=10$. Άρα $\kappa=10$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)<0$. Το τριώνυμο $x^2-7x+10$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5. Επιπλέον ο συντελεστής του όρου x^2 είναι ίσος με τη μονάδα, οπότε το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2-7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x για όλες τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$.

γ) Τα σημεία Α, Β της C_f βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x, οπότε ισχύει $2<\alpha<\beta<5$.

i. Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$5\alpha<2\alpha+3\beta \quad \text{και} \quad 2\alpha+3\beta<5\beta$$

Η πρώτη γράφεται $3\alpha<3\beta$ και ισχύει, αφού $\alpha<\beta$ και η δεύτερη γράφεται $2\alpha<2\beta$ και επίσης ισχύει για τον ίδιο λόγο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $2<\alpha<x_o<\beta<5$, οπότε ο αριθμός x_o περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου $x^2-7x+10$. Επομένως, $f(x_o)<0$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη x_o βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

310 Θέμα 4 – 14760

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί : $x^2-x-12>0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-x-12 είναι: $\Delta=1+48=49$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm7}{2} \Leftrightarrow x_1=-3 \text{ και } x_2=4.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
x^2-x-12		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g=(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$.

β) Είναι:

$$g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot(x^2-16)=\frac{1}{x^2-x-12}\cdot(x^2-16)=\frac{x^2-16}{x^2-x-12}=\frac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x+3)\cdot(x-4)}=\frac{x+4}{x+3}$$ για

κάθε x στο πεδίο ορισμού της A_g.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και του άξονα $x'x$.

Έχουμε:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3}=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4.$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-4,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$, πρέπει να θέσουμε στον τύπο της g όπου $x=0$. Αυτό όμως δε μπορεί να συμβεί γιατί το $x=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

Άρα δεν υπάρχει σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$.

311 Θέμα 4 – 14225

α) Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και άρα $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει ρίζες τις 1 και 4, οπότε είναι $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ και επομένως:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-1)}{x-1}=(x-2)\cdot(x-4)=x^2-6x+8,\ x\in A.$$

γ) Έχουμε:

$$f(x)\leq 3 \Leftrightarrow x^2-6x+8\leq 3 \Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0.$$

x	$-\infty$ 1 5 $+\infty$
x^2-6x+5	+ 0 − 0 +

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-6x+5 φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και η ανίσωση $x^2-6x+5\leq 0$ αληθεύει για $x\in[1,5]$. Όμως $x\neq 1$, οπότε $x\in(1,5]$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x)=f(x)\Leftrightarrow x^4-6x-4=x^2-6x+8\Leftrightarrow x^4-x^2-12=0,$$

η οποία θέτοντας $x^2=\omega$ γίνεται

$\omega^2-\omega-12=0$ με ρίζες $\omega=-3$ (απορρίπτεται) και $\omega=4$ (δεκτή).

Άρα $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για $x=-2$ έχουμε $f(-2)=(-2)^2-6(-2)+8=4+12+8=24$

και για $x=2$ έχουμε $f(2)=2^2-6\cdot 2+8=4-12+8=0$.

Τελικά τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι $B(-2,24)$ και $\Gamma(2,0)$.

312 Θέμα 4 – 14185

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x^3-2x^2+x\neq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2x+1\right)\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\neq 0 \\ \text{και} \\ x\neq 1\end{matrix}\right\}.$$

Άρα $A=\mathbb{R}-\{1,0\}$.

β) Έχουμε $f(x)=\dfrac{x}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{x}{x(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,0\}$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=1 \\ \text{ή} \\ x-1=-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=0\ \text{απορ}\end{matrix}\right\}.$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $x=2$.

δ) Αναζητούμε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}-\{1,0\}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x)>1\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)^2}>1\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2<1\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{1}\Leftrightarrow$$

$$|x-1|<1\Leftrightarrow -1<x-1<1\Leftrightarrow 0<x<2$$

και επειδή $x\neq 1$, έχουμε τελικά ότι $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

313 Θέμα 2 – 1305

α. Το πεδίο ορισμού A της f είναι το σύνολο με στοιχεία τις τετμημένες των σημείων της C_f .
Άρα $A=[-3,8]$.

β.

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$ και τον $x'x$ στα σημεία $B(-3,0)$, $\Gamma(6,0)$.

δ. Η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές όταν η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, οπότε $x\in(-3,6)$.

314 Θέμα 2 – 12910

Είναι:

α. $A=[-10,5)$ και $f(A)=[-3,5]$.

β. $f(-2)=5$, $f(0)=3$, $f(3)=0$

γ. $f(x)=0\Leftrightarrow x=-7$ ή $x=3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$).

δ. $f(x)<0\Leftrightarrow x\in[-10,-7)\cup(3,5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον $x'x$).

315 Θέμα 4 – 14745

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3,-2] \cup [0,2]$.

β) Καθώς $|g(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2$, ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως 2. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3,3]$.

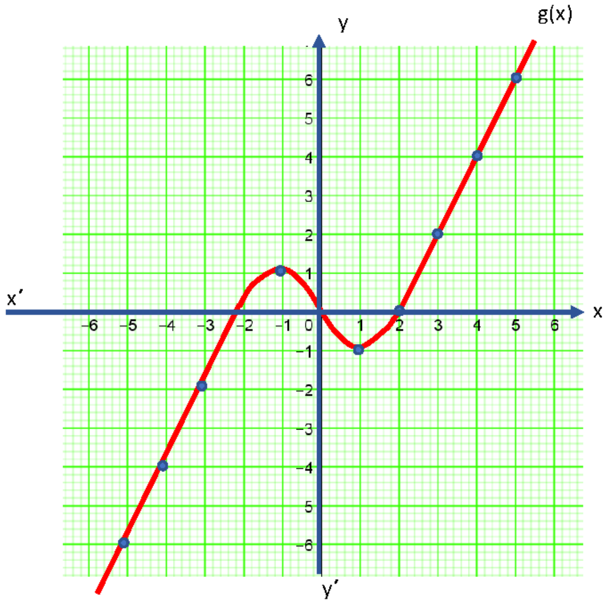
γ)

i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3. Βοηθητικά, σχεδιάζουμε την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{4}{5}$, της οποίας όλα τα σημεία έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ (αυτή η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) και παρατηρούμε ότι έχει 3 κοινά σημεία με την γραφική παράσταση.

Ανάλογα, η εξίσωση $g(x) = -1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k, ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = k$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση. Αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές του k	Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$
$k < -1$ ή $k > 1$	1
$k = -1$ ή $k = 1$	2
$-1 < k < 1$	3



316 Θέμα 4 – 14665

α) Οι τετμημένες των σημείων Α,Β είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ ισοδύναμα $x^2=x^3$, δηλαδή $x^2-x^3=0$, οπότε $x^2(1-x)=0$ και άρα $x=0$ ή $x=1$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ οπότε $\text{Α}(0,0)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\text{Β}(1,1)$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των Α και Β, η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f, πράγμα που σημαίνει ότι $x^3<x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x^2>0$ και $0<x<1$ οπότε $x\cdot x^2<1\cdot x^2$ δηλαδή $x^3<x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x^3<x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού ισοδύναμα $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3<\pi<4$ είναι $3-3<\pi-3<4-3$ δηλαδή $0<\pi-3<1$ οπότε με βάση το β) ερώτημα είναι $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

ii. Είναι

$$\begin{aligned}&(\pi-3)^3<(\pi-3)^2\Leftrightarrow\\&\pi^3-9\pi^2+27\pi-27<\pi^2-6\pi+9\Leftrightarrow\\&\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0\end{aligned}$$

317 Θέμα 4 – 14190

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, αφού $f(x)$ είναι οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f. Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$, άρα το τριώνυμο θα γίνεται ομόσημο του $\alpha=1>0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή πάντα θετικό. Ώστε $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(-\alpha-1)=f(\alpha)$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha\neq-\frac{1}{2}$. Πράγματι: $f(-\alpha-1)=(-\alpha-1)^2+(-\alpha-1)+1=\alpha^2+2\alpha+1-\alpha=\alpha^2+\alpha+1=f(\alpha)$.

γ) Έστω $M(\beta,f(\beta))$ και Α, Δ οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε είναι $A(\beta,0)$ και $\Delta(0,f(\beta))$. Η περίμετρος Ρ του ορθογωνίου ΟΑΜΔ θα είναι:

$P=2\beta+2f(\beta)=2[\beta+f(\beta)]=2(\beta+\beta^2+\beta+1)=2(\beta^2+2\beta+1)=$
$2(\beta+1)^2=\left[\sqrt{2}(\beta+1)\right]^2$.

318 Θέμα 4 – 14925

α) Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y=x$ με τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$, οπότε οι τετμημένες των A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο Β είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο Α στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς $\mathrm{A}(1,f(1))$ δηλαδή $\mathrm{A}(1,1)$ και $\mathrm{B}(-1,f(-1))$ δηλαδή $\mathrm{B}(-1,-1)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A,B έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$, δηλαδή το $\mathrm{O}(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

β) Αφού $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f, είναι $x\neq 0$ και $f(x)=y$ δηλαδή $y=\frac{1}{x}$ (1).

Το συμμετρικό του Μ ως προς το Ο(0,0) είναι το $\mathrm{M}'(-x,-y)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f, πρέπει και αρκεί $f(-x)=-y$ ισοδύναμα $-y=-\frac{1}{x}$ ισοδύναμα $y=\frac{1}{x}$ που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας το O.

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$(\mathrm{AB})\le(\mathrm{MM}')\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}\le\sqrt{(x+x)^2+(\frac{1}{x}+\frac{1}{x})^2}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{8}\le\sqrt{4x^2+\frac{4}{x^2}}\Leftrightarrow$$
$$8\le 4x^2+\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow$$
$$2\le x^2+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$
$$0\le x^2+\frac{1}{x^2}-2\Leftrightarrow$$
$$0\le\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

που ισχύει για κάθε $x\neq 0$.

Τέλος, $(\mathrm{AB})=(\mathrm{MM}')\Leftrightarrow 0=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{x}\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}x=\pm 1$

που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία Μ, Μ΄ ταυτίζονται με τα σημεία Α , Β.

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση ΑΒ είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το (0,0).

319 Θέμα 4 – 14307

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^4=2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1$ οπότε $x=1$ ή $x=-1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=1$ οπότε $\mathrm{A}(-1,1)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0)=2$, οπότε $\Gamma(0,2)$.

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x\in(-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^4<2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2<0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2<0$. Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$ και $\alpha=1>0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2<\omega<1$ και άρα $-2<x^2<1$ Όμως η ανίσωση $-2<x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, οπότε πρέπει και αρκεί $x^2<1\Leftrightarrow |x|^2<1\Leftrightarrow |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.

320 Θέμα 4 – 14926

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow |x|=2-x^2\Leftrightarrow x^2+|x|-2=0\Leftrightarrow |x|^2+|x|-2=0$.

Θέτουμε $|x|=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Για $\omega=-2$ έχουμε $|x|=-2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega=1$ έχουμε $|x|=1$ οπότε $x=1$ ή $x=-1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=1$ οπότε $\mathrm{A}(-1,1)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x)<g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g,για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x\in(-1,1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα: $f(x)<g(x)\Leftrightarrow|x|<2-x^2\Leftrightarrow x^2+|x|-2<0\Leftrightarrow|x|^2+|x|-2<0$.

Θέτουμε $|x|=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2<0$. Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2<\omega<1$, δηλαδή $-2<|x|<1$.

Όμως η ανίσωση $-2<|x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x, οπότε πρέπει και αρκεί $|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi) ερώτημα.

321 Θέμα 4 – 13557

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, ισοδύναμα $x^2=x$, δηλαδή $x^2-x=0$, οπότε $x(x-1)=0$ και τελικά $x=0$ ή $x=1$.

Επειδή το σημείο A είναι πιο αριστερά από το σημείο B, η τετμημένη του A είναι 0 και η τετμημένη του B είναι 1.

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$, οπότε $\mathrm{A}(0,0)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$, οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

β)

i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g, για τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της g που είναι μεταξύ των A,B, δηλαδή για $0<x<1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2<x$. Η ανίσωση $x^2<x$ ισοδύναμα γίνεται $x^2-x<0$ που είναι μία ανίσωση 2ου βαθμού και η λύση της βασίζεται στο πρόσημο του τριωνύμου x^2-x, που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

Συνεπώς πράγματι $x^2<x$ για $0<x<1$.

Σημείωση: Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x^2<x$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$ αφού ισοδύναμα $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. Συνεπώς το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού δεν είναι πάντα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

γ) Αφού $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\frac{\alpha}{\beta}$ με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$. Συνεπώς $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{\beta}<1$ οπότε, $\frac{|\alpha|}{|\beta|}<1$ και ισοδύναμα $|\alpha|<|\beta|$.

322 Θέμα 4 – 14961

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\mathrm{A}(\omega,0)$, $\mathrm{B}(\phi,0)$, οπότε ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ με $\omega<0<\phi$ αφού το σημείο Ο(0,0) είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ δηλαδή της $x^2-x-1=0$ έχουμε ότι $\omega+\phi=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-1}{1}=1$.

ii. Αφού ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ δηλαδή της $x^2-x-1=0$ έχουμε ότι $\omega\cdot\phi=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1}{1}=-1$.

β) Είναι $(\mathrm{OB})=|\phi|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(\mathrm{OA})=|\omega|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(\mathrm{OB})>(\mathrm{OA})$.

Εναλλακτικά, είναι $(\mathrm{OB})=|\phi|=\phi$ αφού $\phi>0$ και $(\mathrm{OA})=|\omega|=-\omega$ αφού $\omega<0$.

Είναι $(\mathrm{OB})>(\mathrm{OA})\Leftrightarrow\phi>-\omega\Leftrightarrow\phi+\omega>0\Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta-\frac{1}{\beta}>1$ και εφόσον $\beta>0$ έχουμε ισοδύναμα $\beta^2-1>\beta \Leftrightarrow \beta^2-\beta-1>0$. Το τριώνυμο x^2-x-1 έχει ρίζες ω,ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha=1$, για $x<\omega$ ή $x>\phi$. Συνεπώς $\beta<\omega$ ή $\beta>\phi$. Όμως $\beta>0$, οπότε $\beta>\phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2-\beta-1>0 \Leftrightarrow f(\beta)>0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα xx', είναι αυτά που είναι δεξιά του Β ή αριστερά του Α. Συνεπώς $\beta<\omega$ ή $\beta>\phi$. Όμως $\beta>0$, οπότε $\beta>\phi$.

δ) Είναι $f(\frac{5}{3})=\frac{25}{9}-\frac{5}{3}-1=\frac{1}{9}>0$ και επειδή $\frac{5}{3}>0$ έχουμε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{15}>1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

323 Θέμα 4 – 13027

α. Οι συντεταγμένες του σημείου Μ θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y=g(x)$, άρα θα ισχύει $g(\frac{3\beta}{2})=-3-\frac{\beta}{2}$, οπότε $\frac{3\beta}{2}+\beta=-3-\frac{\beta}{2}$ άρα $\frac{3\beta}{2}+\frac{\beta}{2}+\beta=-3$.

Ώστε $3\beta=-3$, έτσι $\beta=-1$.

β. Για $\beta=-1$

i. Είναι $f(x)=x^2-1$.

Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y=f(x)=0$, άρα $x^2-1=0$ οπότε $x^2=1$.

Τελικά $x=1$, $x=-1$.

Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1,0)$ και $B(-1,0)$. Επίσης $f(0)=0^2-1=-1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,-1)$.

ii. Θέλουμε να ισχύει

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-1<x-1 \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

iii. Θέλουμε να ισχύει $f(x)-2kg(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση $x^2-1-2k(x-1)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$x^2-2kx+(2k-1)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=1>0$, για να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η ανισότητα, πρέπει και αρκεί να ισχύει $\Delta\leq 0$ δηλαδή $(-2k)^2-4\cdot 1\cdot(2k-1)\leq 0$ άρα πρέπει και αρκεί $4k^2-8k+4\leq 0$ ή ισοδύναμα αν διαιρέσουμε κάθε όρο με το 4, πρέπει $k^2-2k+1\leq 0$ δηλαδή $(k-1)^2\leq 0$ σχέση η οποία αληθεύει μόνο για $k=1$.

324 Θέμα 4 – 13030

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2-4x-5\geq 0$ με $x\in\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4(-5)=36>0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1=5$ και $x_2=-1$.

Το $\alpha=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2-4x-5\geq 0$ αληθεύει για $x\leq -1$ και $x\geq 5$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=(-\infty\,,-1]\cup[5\,,+\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g=\mathbb{R}$.

β. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$, στο $A_f\cap A_g$ και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-4x-5}=|x+3|\Leftrightarrow x^2-4x-5=|x+3|^2\Leftrightarrow x^2-4x-5=x^2+6x+9\Leftrightarrow -10x=14\Leftrightarrow x=\frac{-7}{5}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $\left(\frac{-7}{5}\,,\frac{8}{5}\right)$.

γ. Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$$\sqrt{x^2-4x-5}<|x+3|\Leftrightarrow x^2-4x-5<|x+3|^2\Leftrightarrow -10x<14\Leftrightarrow x=\frac{-7}{5}$$

Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x\in A_f$ προκύπτει ότι $x\in\left(\frac{-7}{5}\,,-1\right]\cup[5\,,+\infty)$.

325 Θέμα 4 – 1454

α. Για να έχει η f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, πρέπει $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$ πρέπει $\Delta\leq 0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\leq 0\Leftrightarrow\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 1$.

β. i. Είναι $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1$

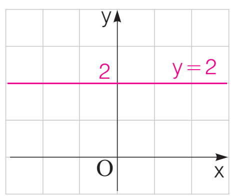
Για $\alpha=1$, είναι $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}=|x-\frac{1}{2}|$.

ii. Είναι $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|x-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ή $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$.

326 Θέμα 4 – 1444

α. Είναι $f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Οπότε για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

β. Για $\lambda=-1$, έχουμε $f(x)=0x^2-0x+2=2$.
Η γραφική παράσταση της f έχει εξίσωση $y=2$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$.



γ. Έχουμε $f(2)=0\Leftrightarrow(\lambda+1)\,2^2-(\lambda+1)\,2+2=0\Leftrightarrow 4\,(\lambda+1)-2\,(\lambda+1)+2=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda-2+2=0\Leftrightarrow 2\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=-2$.
Για $\lambda=-2$ είναι $f(x)=(-2+1)\,x^2-(-2+1)\,x+2=-x^2+x+2$.
Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0$
Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1-8=9$
- $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}$. Οπότε $x=2$ ή $x=-1$.

Άρα η γραφική παράσταση τέμνει τον $x'x$ και στο σημείο $\Gamma(-1, 0)$.

δ. Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=2x^2-2x+2$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=4-16=-12<0$ και $\alpha=1>0$

Οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

327 Θέμα 4 – 1524

α. Πρέπει $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2}$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

β. Είναι $f(x)=\frac{4x^2-2\alpha x-6x+3\alpha}{2x-3}=\frac{2x(2x-\alpha)-3(2x-\alpha)}{2x-3}=\frac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha$, $x\in A$

γ. Είναι $f(1)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 1-\alpha=-1 \Leftrightarrow 2-\alpha=-1 \Leftrightarrow -\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=3$.

δ. Είναι $f(0)=-\alpha$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow 0=2x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$. Πρέπει $x\neq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\neq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\neq 3$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -\alpha)$ και τον $x'x$ στο $B\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha\neq 3$.

Αν $\alpha=3$, τότε δεν τέμνει τον $x'x$.

328 Θέμα 4 – 1446

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$, (1) δεν έχει καμία πραγματική ρίζα. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β. Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης: $f(x)<2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$.

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα: $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9>0$ και ρίζες τις:

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}$, οπότε $x=\frac{4}{2}=2$ ή $x=\frac{-2}{2}=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.
Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x\in(-1, 2)$.

γ. Είναι $|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow -2<2x<4 \Leftrightarrow -1<x<2$.

Από το ερώτημα **β.** έχουμε ότι το σημείο $M(x, y)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

329 Θέμα 4 – 1470

α. Για $\alpha=1$, έχουμε $g(x)=x+1$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Για $x=0$, έχουμε $f(0)=1$ και για $x=1$, $f(1)=2$. Οπότε τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$.

β. Οι C_f , C_g τέμνονται σε δύο σημεία, όταν η εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$, (1) έχει δύο ρίζες. Δηλαδή $\Delta>0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow 1-4+4\alpha>0 \Leftrightarrow 4\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha>\frac{3}{4}$.

γ. Για $\alpha>1>\frac{3}{4}$ η (1) έχει δύο ρίζες και οι τετμημένες x_1, x_2 των σημείων τομής των C_f, C_g είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Επειδή $P=x_1x_2=1-\alpha<0$, έχουμε ότι οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

330 Θέμα 4 – 1408

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ (1) έχει μία τουλάχιστον λύση.

Η (1) $\Leftrightarrow x^2=\lambda x+(1-\lambda)\Leftrightarrow x^2-\lambda x+\lambda-1=0$.

Είναι $\Delta=(-\lambda)^2-4(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$.

Οπότε η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση.

β. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο όταν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία μόνο λύση.

Δηλαδή $\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2=0\Leftrightarrow\lambda=2$.

Για $\lambda=2$ η (1) $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Είναι $f(1)=1^2=1$, άρα το κοινό σημείο είναι $A(1, 1)$.

γ. Για $\lambda\neq 0,2$, είναι $x_1+x_2=\lambda$, οπότε $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2\Leftrightarrow\lambda^2=|\lambda|+2\Leftrightarrow|\lambda|^2-|\lambda|-2=0$, (1).

Θέτουμε $|\lambda|=y$, οπότε η (1) $\Leftrightarrow y^2-y-2=0$.

Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$
- $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 3}{2}$. Οπότε $y=\dfrac{4}{2}=2$ ή $y=\dfrac{-2}{2}=-1$.

- Αν $y=2\Leftrightarrow$ $|\lambda|=2\Leftrightarrow\lambda=-2$ ή $\lambda=2$, που απορρίπτεται (αφού $\lambda\neq 2$).
- Αν $y=-1\Leftrightarrow|\lambda|=-1$, αδύνατη.

Άρα $\lambda=-2$.

331 Θέμα 4 – 1398

α. Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$.

Άρα η C_g τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(-3, 0)$.

β. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow 4x+2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x σε κάποια από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x . Είναι $f(0)=2$, $g(0)=-9$, οπότε $f(0)\neq g(0)$. Άρα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο στον άξονα y΄y .

δ. Έστω $h(x)=\alpha x+\beta$. Η C_g τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $(0,-9)$ ή $(0, 3)$.

Πρέπει και η C_h να διέρχεται από το σημείο $\Delta(0,3)$, άρα $h(0)=3\Leftrightarrow\beta=3$, οπότε $h(x)=\alpha x+3$. Η C_h τέμνει τον x΄x στο $(3, 0)$, οπότε $h(3)=0\Leftrightarrow\alpha\cdot 3+3=0\Leftrightarrow\alpha=-1$.

Άρα $h(x)=-x+3$.

332 Θέμα 4 – 1433

α. Είναι $f(1)=\alpha\cdot 1-\alpha+2=2$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του α .

β. i. Είναι $f(1)=g(1)\Leftrightarrow 2=1^2-\alpha+3\Leftrightarrow 2=4-\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.

ii. Για $\alpha=2$, είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-2+2=x^2-2+3$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Οπότε οι C_f, C_g τέμνονται μόνο στο σημείο με τετμημένη $x=1$.

Άρα δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής των C_f και C_g .

γ. Οι C_f και C_g έχουν δύο κοινά σημεία, όταν η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0 \text{ έχει δύο λύσεις.}$$

Δηλαδή $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2-4>0\Leftrightarrow\alpha^2>4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}>\sqrt{4}\Leftrightarrow|\alpha|>2\Leftrightarrow\alpha<-2$ ή $\alpha>2$.

333 Θέμα 4 – 1485

α. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει $f(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-1|^2>2^2 \Leftrightarrow |x-1|>2 \Leftrightarrow x-1>2$ ή $x-1<-2 \Leftrightarrow x>3$ ή $x<-1$.

β. Επειδή $g(x)=|x-1|+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2-4=|x-1|+2 \Leftrightarrow |x-1|^2-|x-1|-6=0$ (1) .

Θέτουμε $|x-1|=y$, $y\geq 0$ και η (1) γίνεται $y^2-y-6=0$.

Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$
- $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 5}{2}$. Οπότε $y=3$ ή $y=-2$ που απορρίπτεται .

Άρα $y=3$, οπότε $|x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=3$ ή $x-1=-3 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$.

Είναι $f(4)=(4-1)^2-4=5$ και $f(-2)=(-2-1)^2-4=5$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι: $A(4, 5)$ και $B(-2, 5)$.

334 Θέμα 4 – 14477

α. Είναι $\varepsilon(5)\simeq 100$ χιλιάδες € και $\delta(5)\simeq 75$ χιλιάδες € .

β. i. Είναι:
- $\delta(x)=\alpha x+\beta$ με $\delta(0)=100 \Leftrightarrow \beta=100$ και $\delta(10)=50 \Leftrightarrow \alpha\cdot 10+100=50 \Leftrightarrow 10\alpha=-50 \Leftrightarrow \alpha=-5$,
  οπότε $\delta(x)=-5x+100$.
- $\varepsilon(x)=\alpha x+\beta$ με $\varepsilon(0)=50 \Leftrightarrow \beta=50$ και $\varepsilon(10)=150 \Leftrightarrow \alpha\cdot 10+50=150 \Leftrightarrow 10\alpha=100 \Leftrightarrow \alpha=10$,
  οπότε $\varepsilon(x)=10x+50$.

Για $x=5$ είναι $\varepsilon(5)=10\cdot 5+50=100$ και $\delta(5)=-5\cdot 5+100=75$

Άρα οι εκτιμήσεις ήταν σωστές

ii. Είναι $\delta(x)=\varepsilon(x) \Leftrightarrow -5x+100=10x+50 \Leftrightarrow -15x=-50 \Leftrightarrow x=\dfrac{50}{15} \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x\simeq 3{,}33$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(3{,}33,\ 83{,}3)$, που σημαίνει, ότι στο σημείο αυτό το κέρδος της επιχείρησης είναι 0 .

335 Θέμα 4 – 1386

α. Το εκτιμούμενο σημείο τομής είναι το $(100, 500)$ που σημαίνει ότι, αν πουλήσει 100 λίτρα δεν έχει ζημιά, αλλά ούτε και κέρδος.

β. Τα αρχικά έξοδα της εταιρείας είναι $K(0)=200$ € .

γ. Πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα , ώστε τα έσοδα και τα έξοδα να είναι ίσα.

δ. • Αν $K(x)=\alpha x+\beta$, $x\geq 0$ έχουμε $K(0)=200 \Leftrightarrow \beta=200$ και
$K(200)=800 \Leftrightarrow \alpha\cdot 200+200=800 \Leftrightarrow 200\alpha=600 \Leftrightarrow \alpha=3$.
Άρα $K(x)=3x+200$, $x\geq 0$.

• Αν $E(x)=\alpha x+\beta$, $x\geq 0$ έχουμε $E(0)=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και
$E(200)=1000 \Leftrightarrow \alpha\cdot 200+0=1000 \Leftrightarrow 200\alpha=1000 \Leftrightarrow \alpha=5$.

Άρα $E(x)=5x$, $x\geq 0$.

Είναι $E(x)\geq K(x) \Leftrightarrow 5x\geq 3x+200 \Leftrightarrow x\geq 100$.

Άρα πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα για μην έχει ζημιά.

336 Θέμα 4 – 1490

α. Είναι $f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (1) .

Οι λύσεις τις εξίσωσης (1) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g .

Δηλαδή $x = -1$, $x = 0$ και $x = 1$.

β. Είναι $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$.

γ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g .

Άρα $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

δ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

Δηλαδή η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τη C_g .

Άρα $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

337 Θέμα 2 – 14575

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

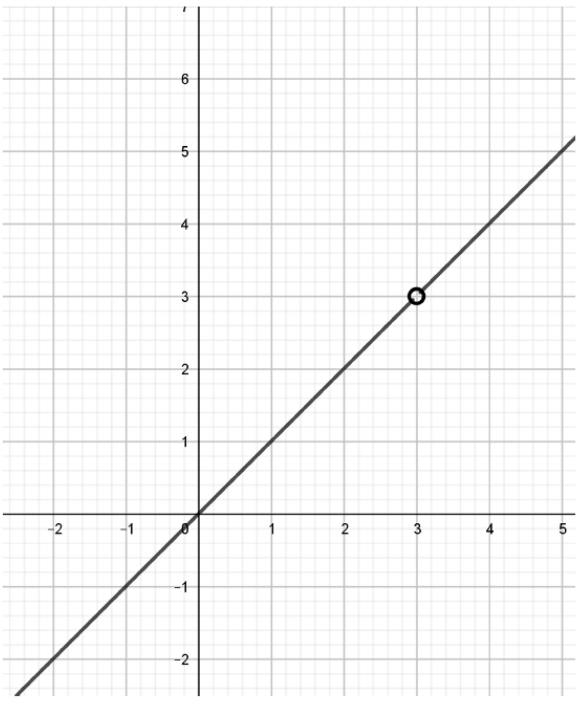
$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \neq 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

β) Έχουμε: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x-3} = \dfrac{x(x-3)}{(x-3)} = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας.

Από την ευθεία θα εξαιρεθεί το σημείο $(3,3)$, διότι $3 \notin A$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



338 Θέμα 2 – 12913

α) Τα τριώνυμο x^2+2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1\\ \dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$

και παραγοντοποιείται ως εξής : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

β)

i. Πρέπει $x-1\neq0$ δηλαδή $x\neq1$ οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Από το α) ερώτημα δείξαμε ότι $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ οπότε $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)}=x+3$ για κάθε $x\in\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{1\}$.

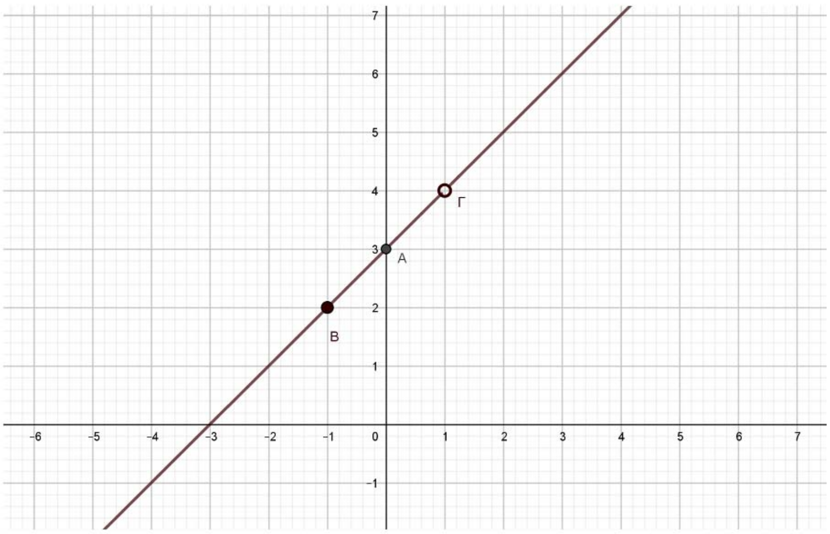
iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x+3$ από την οποία θα εξαιρέσουμε το σημείο που έχει τετμημένη 1, αφού το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Για $x=0$ έχουμε $y=0+3$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{A}(0,3)$.

Για $x=-1$ έχουμε $y=-1+3=2$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{B}(-1,2)$.

Για $x=1$ έχουμε $y=1+3=4$ οπότε το σημείο της ευθείας $y=x+3$ που θα εξαιρέσουμε είναι το $\Gamma(1,4)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



339 Θέμα 2 – 13033

α. i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha<0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega<0$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β. Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

- Για το σημείο Α: $-\frac{1}{2}\cdot 6+4=-3+4=1$, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.
- Για το σημείο Β: $-\frac{1}{2}\cdot(-2)+4=1+4=5\neq 3$, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.
- Για το σημείο Γ: $-\frac{1}{2}\cdot 8+4=-4+4=0$, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ. Θα πρέπει: $5=-\frac{1}{2}\cdot k+4 \Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}\cdot k \Leftrightarrow 2=-k \Leftrightarrow k=-2$.

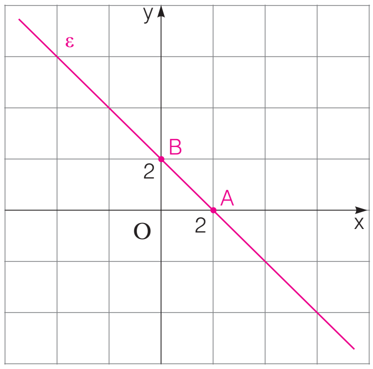
340 Θέμα 2 – 13400

α. Η ευθεία $\varepsilon: y=-x+2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=-1<0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β. • Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της, όπου $y=0$. Δηλαδή $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2\,,0)$.

• Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x=0$ και βρίσκουμε $y=2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0\,,2)$.

γ. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία Α και Β που βρήκαμε στο ερώτημα **β.** , τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο διπλανό σχήμα.



341 Θέμα 2 – 12630

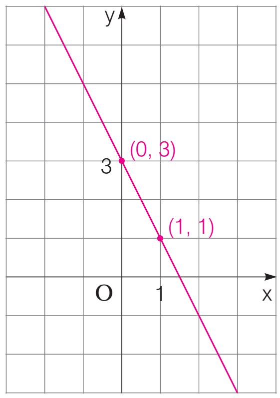
α. • Η ευθεία έχει κλίση $\alpha=-2$, οπότε η εξίσωσή της γίνεται $y=-2x+\beta$.

• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο (1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή: $1=-2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=3$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y=-2x+3$.

β. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3), αφού για $x=0$ βρίσκουμε:

$$y=-2\cdot 0+3=3$$

γ. Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.



342 Θέμα 2 – 14641

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\alpha=\varepsilon\varphi 45^o=1$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$. Από το ερώτημα α) γνωρίζουμε ότι $\alpha=1$. Άρα, $\varepsilon: y=x+\beta$. Επίσης, η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0{,}3)$ οπότε, $\beta=3$. Άρα, η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=x+3$.

γ) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο για το οποίο

$$y=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(-3{,}0)$.

343 Θέμα 2 – 13471

α) Το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι, έχουμε: $2\lambda-3=1$, οπότε $2\lambda=4$, άρα $\lambda=2$.

β) Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας που είναι η ε: $y = 2x - 3$.

Με $x = -1$ έχουμε: $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$, οπότε το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία ε.

Εξετάζουμε αν το Γ είναι πάνω στην ε.

Με $x = 27$ έχουμε: $y = 2 \cdot 27 - 3 = 54 - 3 = 51 \neq 50$, οπότε το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ευθεία ε.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα Α και Β.

344 Θέμα 2 – 13178

α. Η κλίση της ευθείας ΟΜ είναι $\alpha = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{4}{3}x$.

β. i. Το σημείο Ν ανήκει στην ευθεία ΟΜ οπότε οι συντεταγμένες του Ν επαληθεύουν την εξίσωση της ΟΜ, δηλαδή ισχύει ότι: $\lambda = \frac{4}{3} \cdot (-3) \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ii. Τα σημεία $M(3\,,4)$ και $N(-3\,,-4)$ έχουν αντίθετες συντεταγμένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

345 Θέμα 2 – 12856

α. i. Είναι $\varepsilon // \delta$, οπότε $\alpha = -3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha = -3 < 0$.

β. Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -3x + 5$. Για $y = 0$ έχουμε $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

Άρα, το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $y = 5$.

Άρα, το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, 5)$.

346 Θέμα 2 – 12730

α. • Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o, οπότε $\alpha = \varepsilon\varphi 45^o$, άρα η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \beta$.

• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$, οπότε $3 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

β. • Οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες, οπότε $\lambda = 1$ και $\kappa \neq 3$. Άρα η ευθεία είναι $y = x + \kappa$, $\kappa \neq 3$.

• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2, 0)$, οπότε $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -2$, δεκτή.

Άρα $\lambda = 1$ και $\kappa = 2$.

347 Θέμα 2 – 12684

α. Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

Για $x = 0$ είναι $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$, οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

β. Είναι $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$ οπότε $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ είναι $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{1}{2}$.

γ. Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$, οπότε

$$1=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+\beta \Leftrightarrow 1=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x-1$.

Για $x=0$ είναι $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$ οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-1)$.

Για $y=0$ έχουμε $0=-\frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2=-x \Leftrightarrow x=-2$.

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2,0)$.

348 Θέμα 2 – 12631

α. Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1=\frac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2=\frac{3}{4}$.

β. Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $1=\frac{3}{4}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow 1=3+\beta \Leftrightarrow \beta=-2$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x-2$.

γ. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$, αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y=\frac{3}{4}\cdot 0-2=-2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{8}{3},0)$, αφού για $y=0$ έχουμε: $0=\frac{3}{4}x-2 \Leftrightarrow 2=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 8=3x \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$

349 Θέμα 2 – 13054

α. i. Με $\alpha=1$ οι ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1: y=7x-4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y=-x+4$$

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_1=7>0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2=-1<0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β. Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει

$3\alpha+4=3-4\alpha \Leftrightarrow 7\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{7}$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha=-\frac{1}{7}$.

350 Θέμα 2 – 12939

α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται:

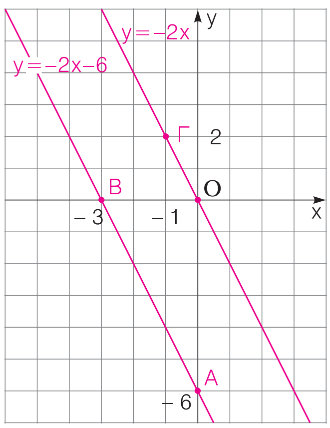
- από το σημείο $A(0,-6)$, οπότε $-6=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow -6=\beta$, άρα $\varepsilon_1: y=\alpha x-6$.
- από το σημείο $B(-3,0)$, έχουμε $0=\alpha\cdot(-3)-6 \Leftrightarrow 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

Άρα $\varepsilon_1: y=-2x-6$.

β. Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\alpha x$.

Είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα $\alpha=-2$, $\varepsilon_2: y=-2x$.

γ. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0,-6)$ και $B(-3,0)$. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $\Gamma(-1,2)$.



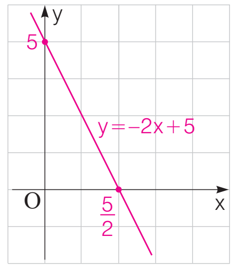
Οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

351 Θέμα 2 – 1294

α. Έχουμε $f(0)=5 \Leftrightarrow \beta=5$, οπότε $f(x)=\alpha x+5$. Είναι $f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-2$.
Άρα $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

β. Είναι $f(x)=-2x+5$. Έχουμε $f(0)=5$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow -2x=-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο $A(0, 5)$ και τον x΄x στο $B(\dfrac{5}{2}, 0)$.

γ. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $\varepsilon: y=-2x+5$ και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



352 Θέμα 2 – 13318

α. • $f(0)=-0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

• $f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$.

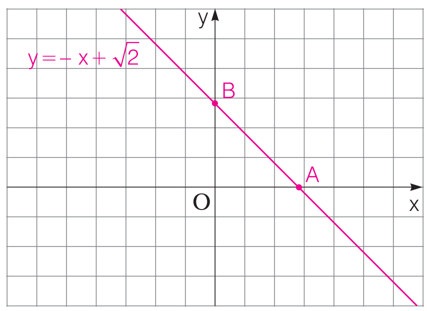
• $f(-\sqrt{2})=-(-\sqrt{2})+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

• $\left[f(-\sqrt{2})\right]^2=(2\sqrt{2})^2=2^2\cdot(\sqrt{2})^2=4\cdot 2=8$.

β. Για $x=0$, έχουμε βρει από το **α.** ερώτημα $y=f(0)=\sqrt{2}$, ενώ για $y=0$ παίρνουμε $0=-x+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$, δηλαδή $f(\sqrt{2})=0$, τιμή που βρέθηκε στο **α.** ερώτημα.

Έτσι, βρήκαμε τα σημεία $B(0\,,\sqrt{2})$ και $A(\sqrt{2}\,,0)$, τα οποία είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες y′y και x′x αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $y=f(x)=\alpha x+\beta$ με $x\in\mathbb{R}$, $(\alpha\cdot\beta\neq 0)$ οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.



353 Θέμα 4 – 13367

α. Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha=\omega^2-6\omega+8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=36-32=4$

και οι ρίζες: $\omega_{1,2}\dfrac{6\pm 2}{2} \Leftrightarrow \omega_1=4$ και $\omega_2=2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

ω	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\omega^2-6\omega+8$		+	0	−	0	+	

• Αν $\omega\in(-\infty\,,2)\cup(4\,,+\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα x′x είναι οξεία.

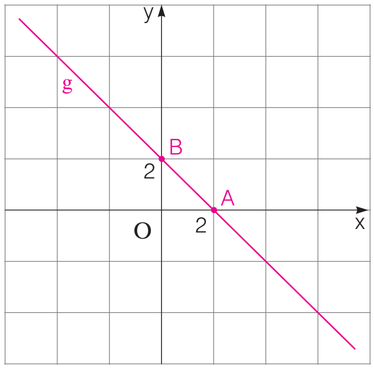
• Αν $\omega\in(2\,,4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης *α* είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα x′x είναι αμβλεία.

• Αν $\omega=2$ ή $\omega=4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία *ε* σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα x′x, είναι δηλαδή παράλληλη στον x′x.

β. i. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα x′x πρέπει $\omega\in(2\,,4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος, τότε $\omega=3$.

ii. Για $\omega=3$ είναι $\varepsilon: y=-x+2$.

- Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y=0$. Δηλαδή $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2\,,0)$.
- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x=0$ και βρίσκουμε $y=2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0\,,2)$.



γ. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία Α και Β που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο διπλανό σχήμα.

354 Θέμα 4 – 1403

α. Πρέπει $9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-9<0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{9} \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-3,3)$.

β. Είναι $f(0)=\dfrac{2}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B(0,\dfrac{2}{3})$ και τον $x'x$ στο $A(-2,0)$.

γ. Έστω $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Έχουμε $\dfrac{2}{3}=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{2}{3}$, οπότε $y=\alpha x+\dfrac{2}{3}$ και

$0=\alpha\cdot(-2)+\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -2\alpha+\dfrac{2}{3}=0 \Leftrightarrow -6\alpha+2=0 \Leftrightarrow -6\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{3}$.

Άρα $\varepsilon: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

355 Θέμα 4 – 13298

α. Αφού τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B=y_A$ και $y_B=x_A$.

β. Η κλίση της ευθείας *ε* που διέρχεται από τα σημεία Α , Β δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

η οποία για τα $x_B=y_A$ και $y_B=x_A$, όπως προκύπτει από το ερώτημα α. γίνεται:

$$\alpha=\frac{x_A-y_A}{y_A-x_A}=-1$$

γ. i. Από τη σχέση $y_A=x_B$ για $y_A=\kappa^2-3\kappa+1$ και $x_B=\kappa-2$ έχουμε:

$\kappa^2-3\kappa+1=\kappa-2 \Leftrightarrow \kappa^2-4\kappa+3=0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4>0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες: $\kappa_1=1$ και $\kappa_2=3$.

Επειδή τα σημεία Α και Β ανήκουν στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο πρέπει $y_A>0$ και $x_B>0$.

- Για $\kappa_1=1$ έχουμε $y_A=x_B=-1<0$, απορρίπτεται.
- Για $\kappa_2=3$ έχουμε $y_A=x_B=1<0$, δεκτή.

Άρα $\kappa=3$.
Οπότε, τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(4\,,1)$ και $(1\,,4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και κλίση $\alpha=-1$, άρα $y=-x+\beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο Α που για $\kappa=3$ έχει συντεταγμένες $(4\,,1)$, θα ισχύει:

$$1=-4+\beta \Leftrightarrow \beta=5$$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y=-x+5$.

356 Θέμα 4 – 1523

α. Πρέπει $|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow -x\neq -2 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

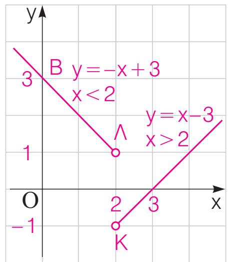
β. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει:

- $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 1}{2}$. Οπότε $x=\dfrac{6}{2}=3$ ή $x=\dfrac{4}{2}=2$.

Άρα $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Είναι $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{|x-2|}$, $x\in A$.

- Αν $x>2$, τότε $|x-2|=x-2$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}=x-3$.
- Αν $x<2$, τότε $|x-2|=-(x-2)$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}=-(x-3)=-x+3$.



Άρα $f(x)=\begin{cases} x-3 & , \text{ αν } x>2 \\ -x+3, & \text{ αν } x<2 \end{cases}$

γ. Η γραφική παράσταση της f είναι οι ημιευθείες $K A$, ΛB εκτός τα K και Λ . Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(3,\, 0)$ και τον $y'y$ στο $B(0,\, 3)$.

δ. • Αν $x>2$, τότε $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$. Οπότε $x\in(2,\, 3]$.

• Αν $x<2$, τότε $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow -x+3\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$. Οπότε η ανίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x\in(2,\, 3]$.

357 Θέμα 4 – 13473

α) $A=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x-3|+|x-1|$.

β) i. Από $1\leq x\leq 3$ έχουμε $|x-3|=-x+3$ και $|x-1|=x-1$,

τότε A= -x+3+x-1=2.

ii. -x+3-x+1=2⇔-2x+4=2⇔ $x=1$.

γ) i. Για την f(x)=3-x για $1\leq x\leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

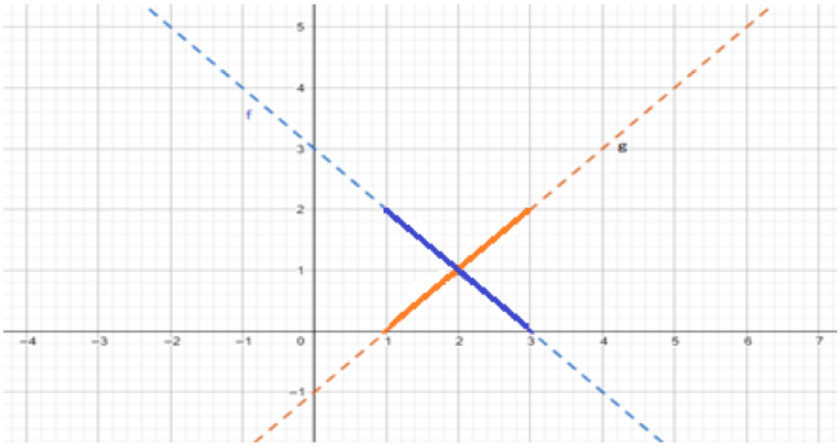
x	y
1	2
3	0

Ομοίως για την g(x)=x-1 για $1\leq x\leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

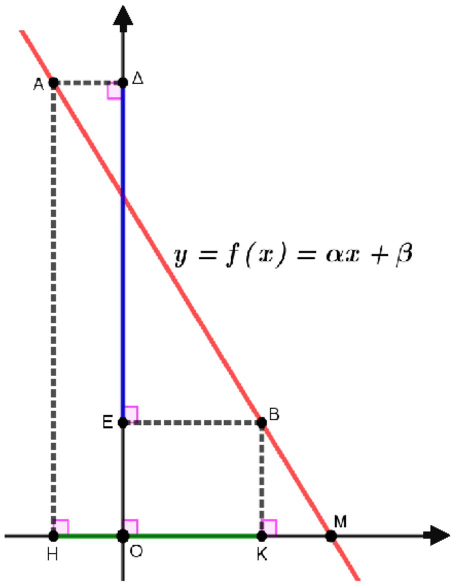
x	y
1	0
3	2

358 Θέμα 4 – 14556

Επομένως, στο ίδιο σύστημα αξόνων, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



ii. Από την γραφική παράσταση του ερωτήματος γ) i παρατηρούμε πως $|f(x) - g(x)|=2$ έχουμε για x=1 ή x=3.



α) Έστω $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία του σχήματος. Αφού (ΗΚ)=6 θα είναι $x_2 - x_1 = 6$ και (ΔΕ)=9, άρα $f(x_1) - f(x_2) = 9$, οπότε $\alpha x_1 + \beta - (\alpha x_2 + \beta) = 9$, δηλαδή $\alpha(x_1 - x_2) = 9$, έτσι $\alpha(-6) = 9$. Ώστε $\alpha = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$.

β) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $M(6, f(6))$. Αφού είναι σημείο του άξονα x΄x, θα είναι $f(6) = 0$, άρα $-\frac{3}{2} \cdot 6 + \beta = 0$, άρα $\beta = 9$.

γ) Αφού είναι (ΟΚ)=4, τότε και η τετμημένη του σημείου Β θα είναι επίσης 4. Άρα η τεταγμένη του σημείου Β θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 9 = 3$. Οπότε έχουμε $E(0, 3)$, καθώς τα σημεία Ε και Β έχουν την ίδια τεταγμένη. Αφού οι ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση $-\frac{3}{2}$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας (δ) θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 3$.

359 Θέμα 4 – 13507

α) Για $p=0$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=6x-3,$$

της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διότι είναι συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha=6$ και $\beta=-3$.

Για $p=2$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=2x^2+4x+2=2\left(x^2+2x+1\right)=2\left(x+1\right)^2.$$

β)

i. Για $p=0$ η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Για $p=2$ η γραφική παράσταση της f έχει επίσης ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το $\left(-1,0\right)$.

ii. Για να έχει η γραφική παράσταση της f με τον $x'x$ άξονα ένα κοινό σημείο,

- πρέπει $p=0$, όπως δείξαμε παραπάνω και για
- $p\neq 0$, πρέπει η εξίσωση $px^2+\left(6-p\right)x+\left(\frac{5}{2}p-3\right)=0$ να έχει μια διπλή ρίζα, που συμβαίνει όταν:

$$\begin{aligned}
&\Delta=0\Leftrightarrow\\
&\left(6-p\right)^2-4p\left(\frac{5}{2}p-3\right)=0\Leftrightarrow\\
&36-12p+p^2-10p^2+12p=0\Leftrightarrow\\
&36-9p^2=0\Leftrightarrow\\
&p^2=\frac{36}{9}\Leftrightarrow p^2=4\Leftrightarrow\\
&p=\pm 2.
\end{aligned}$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει με τον $x'x$ άξονα ένα κοινό σημείο (εκτός από τις τιμές $p=0$ και $p=2$) και για $p=-2$.

γ) Για $p\neq 0$, η γραφική παράσταση της f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα, όταν η εξίσωση $px^2+\left(6-p\right)x+\left(\frac{5}{2}p-3\right)=0$ έχει δυο ρίζες άνισες, που συμβαίνει όταν:

$$\begin{aligned}
&\Delta>0\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}\\
&36-9p^2>0\Leftrightarrow\\
&4-p^2>0\overset{\left(\substack{\text{πίνακας}\\ \text{προσήμου}}\right)}{\Leftrightarrow}\\
&-2<p<2.
\end{aligned}$$

Τελικά, για $p\in(-2,0)\cup(0,2)$ η γραφική παράσταση της f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα.

360 Θέμα 4 – 14184

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$1+(x+2)x \neq 0$, δηλαδή

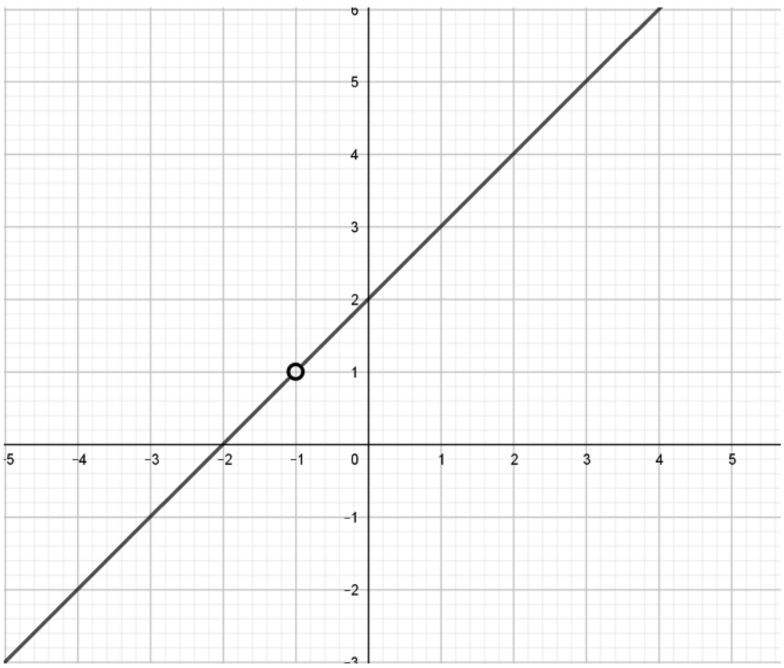
$x^2+2x+1 \neq 0$, οπότε

$(x+1)^2 \neq 0$ και τελικά

$x \neq -1$.

Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

β) Έχουμε: $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x} = \dfrac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2} = x+2$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία με εξίσωση $y = x+2$ και $x \neq -1$.



γ)

i. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της εξίσωσης: $x+2 = x^2$, για $x \neq -1$.

Έχουμε λοιπόν $x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ που είναι εξίσωση 2^ου^ βαθμού με ρίζες που έχουν άθροισμα $-\dfrac{-1}{1} = 1$ και γινόμενο $\dfrac{-2}{1} = -2$. Άρα $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$ (απορρίπτεται).

Άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, το $(2,4)$, αφού $f(2) = g(2) = 4$.

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x οι οποίες είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$x+2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0.$$

Η ανίσωση είναι 2^ου^ βαθμού με $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$, οπότε αληθεύει για $x \in (-1, 2)$.

361 Θέμα 4 – 12788

α. Είναι: $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2=3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=4+4=8$

β. Ένα σημείο $M\big(x, f(x)\big)$ της γραφικής παράστασης της f, βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=4$ όταν ισχύει

$$f(x)<4 \Leftrightarrow (x-1)^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1,3)$ είναι οι: 0, 1, 2 και επειδή $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0,1)$, $B(1,0)$, $\Gamma(2,1)$.

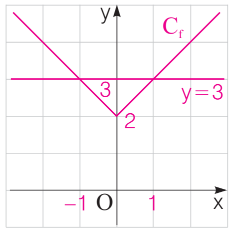
γ. Είναι $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2=(\beta-1)^2 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2-(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-1+\beta-1)(\alpha-1-\beta+1)=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-2)(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-2=0$ ή $\alpha=\beta$, που απορρίπτεται

Οπότε $\alpha+\beta=2$.

362 Θέμα 4 – 1447

α. Είναι $f(0)=0+2=2$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$.



β. i. Οι εκτιμούμενες συντεταγμένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=3$ είναι $(-1,3)$ και $(1,3)$.

ii. Επειδή τα σημεία $(-1,3)$ και $(1,3)$ έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

γ. i. Από τη C_f έχουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, όταν $\alpha>2$.

ii. Έχουμε $\alpha>2$.

- Για $x<0$, είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=-(\alpha-2)<0$, δεκτή.
- Για $x\geq 0$, είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+2=\alpha \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=\alpha-2>0$, δεκτή.

Άρα τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ είναι τα $\big(-(\alpha-2),\alpha\big)$ και $(\alpha-2,\alpha)$ τα οποία έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες. Οπότε είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

363 Θέμα 4 – 1514

α. i. Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

ii. Οι εκτιμούμενες τιμές του x είναι: $x\in(1,3)$.

β. Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=-1$ ή $x-2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

Έχουμε $f(x)<g(x) \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3 \Leftrightarrow x\in(1,3)$.

γ. Πρέπει $\begin{cases}1-f(x)\geq 0\\ f(x)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-|x-2|\geq 0\\ |x-2|\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x-2|\leq 1\\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[1,3]\\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,2)\cup(2,3]$.

364 Θέμα 4 – 12914

α. i. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y=c$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι για να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f πρέπει $c\geq 1$.

ii. Για να έχει κοινά σημεία η ευθεία $\varepsilon: y=c$ με τη γραφική παράσταση της f, πρέπει η εξίσωση $|x-2|+1=c \Leftrightarrow |x-2|=c-1$ να έχει λύση. Επειδή είναι $|x-2|\geq 0$, αρκεί $c-1\geq 0 \Leftrightarrow c\geq 1$.

β. Για $c\geq 1$ είναι $|x-2|=c-1 \Leftrightarrow x-2=c-1$ ή $x-2=-(c-1) \Leftrightarrow x=c+1$ ή $x=3-c$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3-c,c)$ και $B(c+1,c)$.

γ. i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB)\leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2.

Άρα $1\leq c\leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι

$$(AB)=|c+1-(3-c)|=|2c-2|$$

Άρα $(AB)\le 2 \Leftrightarrow |2c-2|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 2c-2\le 2 \Leftrightarrow -1\le c-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le c\le 2$.

Από το ερώτημα **α.** πρέπει $c\ge 1$, οπότε $1\le c\le 2$.

365 Θέμα 4 – 12681

α. Είναι $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2) \Leftrightarrow f(x)=|x-3|+4-|2(3-x)|-2 \Leftrightarrow f(x)=|x-3|-2|3-x|+2$

$$\Leftrightarrow f(x)=2-|x-3|$$

β.
- Αν $x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3$ είναι $|x-3|=x-3$, οπότε $f(x)=2-(x-3)=2-x+3=5-x$.
- Αν $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$ είναι $|x-3|=3-x$, οπότε $f(x)=2-(3-x)=2-3+x=x-1$.

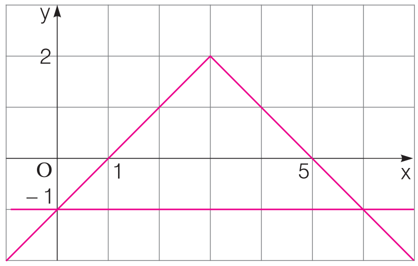
Άρα $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x<3 \\ 5-x, & \text{αν } x\ge 3 \end{cases}$

Για $x\ge 3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=5-x$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(3, 2)$ και $(5, 0)$.

Για $x<3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=x-1$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(0, -1)$ και $(1, 0)$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ. i. Αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y=-1$ έχουμε το διπλανό σχήμα.



Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y=-1$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι $0<x<6$.

ii. Είναι $2-|x-3|>-1 \Leftrightarrow -|x-3|>-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|<3 \Leftrightarrow -3<x-3<3 \Leftrightarrow 0<x<6$.

366 Θέμα 4 – 1468

α. Οι ζητούμενες συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g ειναι $(1, 1)$ και $(4, 2)$.

β. Είναι $f(x)=\begin{cases} x-2 \;\;, & \text{αν } x\ge 2 \\ -x+2, & \text{αν } x<2 \end{cases}$

- Αν $x<2$, τότε $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x+2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow -3x+6=x+2 \Leftrightarrow -4x=-4 \Leftrightarrow x=1$
- Αν $x\ge 2$, τότε $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x-2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x-6=x+2 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$.

Είναι $f(1)=1$ και $f(4)=2$. Οπότε τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι τα σημεία $(1, 1)$ και $(4, 2)$.

γ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι: $x\in(-\infty, 1)\cup(4, +\infty)$.

δ. Πρέπει $3|2-x|-(x+2)\ge 0 \Leftrightarrow |x-2|\ge\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow f(x)\ge g(x) \overset{\gamma.}{\Leftrightarrow} x\in(-\infty, 1]\cup[4, +\infty)$.

367 Θέμα 4 – 12944

α. Είναι $A=2+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=4-\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+2=4-1=3$.

β. Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\ne 0$ έχουμε:

$$(f(x))^2-(g(x))^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)=2x\cdot\frac{2}{x}=4$$

γ. Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι: $f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x^2+1=\alpha x \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$.

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2\ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}\ge\sqrt{4} \Leftrightarrow |\alpha|\ge 2$.

368 Θέμα 4 – 12682

α. Η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν

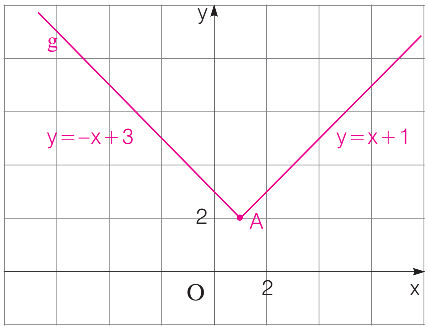
$$f(x)<0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2<0 \Leftrightarrow -(x-1)^2<-1 \Leftrightarrow (x-1)^2>1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}>1 \Leftrightarrow |x-1|>1 \Leftrightarrow x-1<-1 \text{ ή } x-1>1$$
$$\Leftrightarrow x<0 \text{ ή } x>2$$

Άρα $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

β. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$, τότε $|x-1|=x-1$, οπότε $g(x)=x-1+2=x+1$.
- Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, οπότε $g(x)=-x+1+2=-x+3$.

Άρα $g(x)=\begin{cases} x+1 \ , & x\ge 1 \\ -x+3, & x<1 \end{cases}$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

- από το τμήμα της ευθείας $y=x+1$, όταν $x\ge 1$
- από το τμήμα της ευθείας $y=-x+3$, όταν $x<1$

Η γραφική παράσταση C_g φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. Η C_f είναι κάτω από τη C_g όταν $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-(x-1)^2-|x-1|-2<0 \Leftrightarrow -|x-1|^2-|x-1|-1 \Leftrightarrow |x-1|^2+|x-1|+1>1$, (1)

Αν θέσουμε $|x-1|=\omega$ τότε η $(1)\Leftrightarrow \omega^2+\omega+1>0$, που ισχύει, αφού είναι τριώνυμο του ω, με $\alpha=-1<0$ και διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4(-1)(-1)=1-4=-3<0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)-g(x)<0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

369 Θέμα 4 – 1449

α. Τα ζητούμενα κοινά σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξισώσης

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

β. Έχουμε: • $f(1)=1^2-2\cdot 1=1-2=-1$ • $f(4)=4^2-2\cdot 4=16-8=8$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι $A(1,-1)$ και $B(4,8)$.

Τα ζητούμενα διαστήματα είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-2x<3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow x\in(1,4)$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι, για $\alpha<-1$ είναι $f(x)>\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1-\alpha \Leftrightarrow (x-1)^2+(-\alpha-1)>0$, που ισχύει.

370 Θέμα 4 – 12942

α. Αφού το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη C_f ισχύει $f(1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2$.

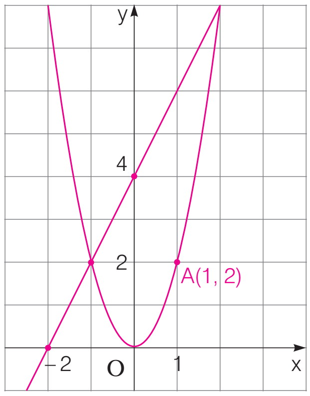
β. i. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ έχει κλίση λ , άρα $\lambda=2$.

Επίσης, το σημείο $B(1,6)$ ανήκει στην ευθεία, άρα $6=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=4$.

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y=2x+4$.

ii. Για $y=0$ έχουμε $0=2x+4 \Leftrightarrow x=-2$ άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο $(-2\,,0)$.

Επίσης, για $x=0$ είναι $y=2\cdot 0+4 \Leftrightarrow y=4$,άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο $(0\,,4)$.



Τοποθετούμε τα παραπάνω σημεία στο σχήμα και χαράσσουμε την ευθεία ε.

γ. i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x\in(-1\,,2)$.

ii. Είναι $f(x)<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες: $x_1=2$ και $x_2=-1$.

Και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Άρα $x\in(-1\,,2)$.

371 Θέμα 4 – 13314

α. Η συνάρτηση *f* έχει πεδίο ορισμού το R. Τα σημεία Α , Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α , β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ = 13 και ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Επειδή το σημείο Α βρίσκεται αριστερά του Β στον άξονα $x'x$ είναι $\alpha<\beta$ και επειδή προφανώς $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β. Είναι $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}-3=2-\sqrt{2}-3=-1-\sqrt{2}<0$, οπότε $f(\sqrt{2})<0$.

γ. Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β. ερώτημα ότι $f(\sqrt{2})<0$, θα πρέπει $\sqrt{2}\in\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, δηλαδή $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ. Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma\,,\delta)$ στον $x'x$ έχει εξίσωση $y=\delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y=\delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν.

Είναι $\Delta=0 \Leftrightarrow (-1)^2-4(-3-\delta)=0 \Leftrightarrow 1+12+4\delta=0 \Leftrightarrow \delta=-\dfrac{13}{4}$.

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης

$f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$, οπότε $\gamma=-\dfrac{-1}{2\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$.

372 Θέμα 4 – 13120

α. Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+16\lambda^2>0$ που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β. Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$ είναι $P=-4\lambda^2<0$, αφού $\lambda\neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda\neq 0$.

γ. Το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4,-4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$f(4)=-4 \Leftrightarrow 16-4(\lambda-1)-4\lambda^2=-4 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-3$.

δ. Για $\lambda=-1$, $f(x)=x^2+2x-4$. Πρέπει $f(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0$

Το τριώνυμο έχει: $\Delta=20$

και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$

Αφού $\alpha=1>0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		+	0	−	0	+	

Άρα $f(x)<0$ για $x\in(-1-\sqrt{5}\,,-1+\sqrt{5})$.

373 Θέμα 4 – 12628

α. • Το σημείο Ζ έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση x_1 της εξίσωσης $f(x)=0$ η οποία γράφεται $x^2-x-1=0$ με διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=1+4=5$ και

$x_1=\dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\cdot 1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$. Άρα $Z\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\right)$.

- Το σημείο Α έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $g(0)=3-0=3$, έτσι $A(0,3)$.
- Τα σημεία Β και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-x-1=3-x\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-2$$

Το σημείο Β βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.

Οι τεταγμένες των σημείων Β και Γ θα είναι:

$f(-2)=g(-2)=3-(-2)=5$ και $f(2)=g(2)=3-2=1$ αντίστοιχα.

Άρα $B(-2,5)$, $\Gamma(2,1)$.

β. Πρέπει $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^2-x-1>3-x\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow x^2>2^2\Leftrightarrow |x|>|2|\Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$.

Άρα $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|f(\alpha)-(-g(\alpha))|\geq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$$|f(\alpha)+g(\alpha)|\geq 1\Leftrightarrow|\alpha^2-\alpha-1+3-\alpha|\geq 1\Leftrightarrow|\alpha^2-2\alpha+2|\geq 1\ ,\ (1)$$

Έτσι η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$|(\alpha-1)^2+1|\geq 1\Leftrightarrow(\alpha-1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow(\alpha-1)^2\geq 0\ , \text{ που ισχύει για κάθε } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Το τριώνυμο $\alpha^2-2\alpha+2$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4<0$, οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του α^2 δηλαδή του 1, άρα πάντα θετικό για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Οπότε $|\alpha^2-2\alpha+2|=\alpha^2-2\alpha+2$.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα $\alpha^2-2\alpha+2\geq 1\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

374 Θέμα 4 – 13479

α. Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$f(x)=|3x-12|-|2x-8|-3|x^2-16|=$

$=3|x-4|-|x-4|-3|(x-4)(x+4)|$

$=|x-4|-3|x-4|\cdot|x+4|=$

Είναι $|x|\le 4 \Leftrightarrow -4\le x\le 4 \Rightarrow x-4\le 0$ και $x+4\ge 0$.

Άρα: $f(x)=-(x-4)+3(x-4)(x+4)=-x+4+3(x^2-16)=3x^2-x-44$

β. i. • Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή $3x^2-x-44=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta=1+4\cdot 3\cdot 44=529$ και οι ρίζες:

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{529}}{6}=\dfrac{1\pm 23}{6}$. Δηλαδή $x_1=\dfrac{24}{6}=4$ και $x_2=\dfrac{-22}{6}=-\dfrac{11}{3}$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4\,,4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4\,,0)$ και $B(-\dfrac{11}{3}\,,0)$.

• Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x=0$ και βρίσκουμε $y=f(0)=-44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0\,,-44)$.

ii. Αφού το σημείο $M(\mu+1\,,-20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει:

$\mu+1\in[-4\,,4]$ και $f(\mu+1)=-20$.

Είναι: $f(\mu+1)=-20 \Leftrightarrow 3(\mu+1)^2-\mu-1-44=-20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\mu^2+6\mu+3-\mu-45+20=0 \Leftrightarrow 3\mu^2+5\mu-22=0$

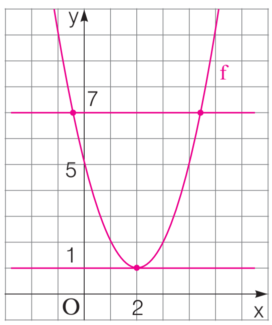
Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=25-4\cdot 3\cdot(-22)=289$ και οι ρίζες:

$\mu_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{289}}{2\cdot 3}=\dfrac{-5\pm 17}{6}$. Δηλαδή $\mu_1=\dfrac{12}{6}=2$ και $\mu_2=\dfrac{-22}{6}=-\dfrac{11}{3}$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu=2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu+1\in[-4\,,4]$.

375 Θέμα 4 – 13091

α. Η ευθεία $y=7$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0\,,7)$ και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.



Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=7$ είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=7$. Είναι

$f(x)=7 \Leftrightarrow x^2-4x+5-7=0 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=24>0$ που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y=7$ ακριβώς δύο κοινά σημεία.

β. i. Η ευθεία $y=\lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0\,,\lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\lambda$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1)$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας. Συγκεκριμένα :

- αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta < 0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.

γ. Αφού η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda > 1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda > 1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4.$$

376 Θέμα 4 – 13168

α. i. Ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 0 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ αρκεί:

$f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0$, η οποία γράφεται $(x + \lambda)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(-1) = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0,$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$x_{1,2} = \dfrac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 + 1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1}$. Άρα $x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}$ και $x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2 + 1} < \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1},\, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1},\, 0\right)$.

γ. Η απόσταση των A και B είναι:

$(AB)=|x_2-x_1|=|-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}-(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1})|=|2\sqrt{\lambda^2+1}|$.

Οπότε:

$$(AB)\geq 2 \Leftrightarrow |2\sqrt{\lambda^2+1}|\geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2+1\geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2\geq 0 \text{ , που ισχύει.}$$

377 Θέμα 4 – 12921

α. Το τριώνυμο έχει $\Delta=4\kappa^2+8>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β. Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2|\kappa|x-2=2x-\kappa^2 \Leftrightarrow x^2-2(|\kappa|+1)x+\kappa^2-2=0$$

Είναι $\Delta=4(|\kappa|+1)^2-4(\kappa^2-2)=4(2|\kappa|+3)>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

γ. Για $\kappa=-3$ είναι $f(x)=x^2-6x-2$ και $y=2x-9$.

Οπότε $f(x)=y \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$, η οποία έχει

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 7=64-28=36$$

και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{8\pm 6}{2}$.

Άρα $x_1=1$ και $x_2=7$.

Τα σημεία τομής είναι $A(1,-7)$ και $B(7,5)$.

δ. Είναι $(AB)=\sqrt{(1-7)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{36+144}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$.

378 Θέμα 4 – 13055

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(2+x)=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+4x+4-4x-8+5=x^2+1$$

και

$$f(2-x)=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2-4x+4+4x-8+5=x^2+1$$

οπότε $f(2+x)=f(2-x)$.

β. Με $x=1{,}52$ η ισότητα του ερωτήματος α. δίνει

$$f(2+1{,}52)=f(2-1{,}52)\text{, οπότε } f(3{,}52)-f(0{,}48)=0 \quad (1)$$

ενώ με $x=1{,}48$ δίνει

$$f(2+1{,}48)=f(2-1{,}48)\text{, οπότε } f(3{,}48)-f(0{,}52)=0 \quad (2)$$

Με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$A=f(3{,}52)-f(0{,}52)+f(3{,}48)-f(0{,}48)=f(3{,}52)-f(0{,}48)+f(3{,}48)-f(0{,}52)=0$$

γ. Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2x+\beta$. Με $x=-5$ έχουμε:

$$f(x)=2x-5 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2x-5 \Leftrightarrow x^2-6x+10=0$$

που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta=36-40=-4<0$.

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία όταν $\beta=-5$.

δ. Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία, $y=2x+\beta$, μόνο όταν η εξίσωση $f(x)=2x+\beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Είναι:

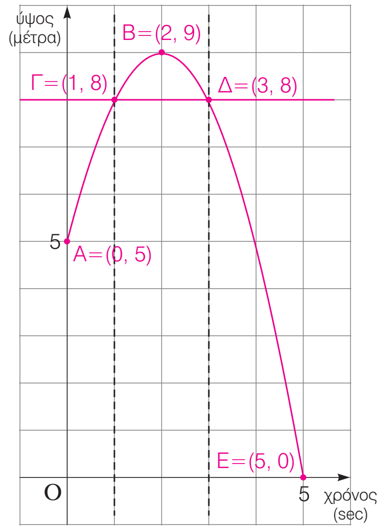
$$f(x)=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-4x+5=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-6x+5-\beta=0$$

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση μόνο όταν η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι μη αρνητική.

Είναι: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36-4(5-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow 9-5+\beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -4$

οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta=-4$.

379 Θέμα 2 – 12729



α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο $A(0, 5)$. Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο $B(2, 9)$. Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2=2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία $y=8$ που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων βρίσκουμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία $\Gamma(1, 8)$ και $\Delta(3, 8)$. Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3=1$ sec και $t_4=3$ sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ και το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το Ε . Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5=5$ sec.

380 Θέμα 4 – 13454

α. Από τη γραφική παράσταση της f, φαίνεται ότι $f(0)=3$, άρα $\alpha\cdot 0^2-4\cdot 0+\gamma=3$, οπότε $\gamma=3$.

β. Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$\alpha^2-3=-(5-3\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$ και οι ρίζες της:

$\alpha_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 1}{2}$. Βρίσκουμε $\alpha_1=2$ και $\alpha_2=1$.

Επειδή το σημείο Α ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha^2-3<0$.

- Για $\alpha=2$ είναι $2^2-3=1>0$ άρα η λύση $\alpha=2$ απορρίπτεται.
- Για $\alpha=1$ είναι $1^2-3=-2<0$ άρα η λύση $\alpha=1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι: $f(x)=x^4-4x^2+3$

γ. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4-4x^2+3=0$ η οποία για $x^2=w>0$ γίνεται $w^2-4w+3=0 \Leftrightarrow w=1$ ή $w=3$. Άρα

- $x^2=1 \Leftrightarrow \{x=1 \text{ ή } x=-1\}$,
- $x^2=3 \Leftrightarrow \{x=\sqrt{3} \text{ ή } x=-\sqrt{3}\}$.

δ. Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3}<x<-1 \text{ ή } 1<x<\sqrt{3}$$

381 Θέμα 4 – 13090

α. Αφού το σημείο $M(x , y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι $y=f(x)=\dfrac{16}{x}>0$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι $B(x\,,\,0)$ και του σημείου $A(0\,,\,\frac{16}{x})$.

Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει εμβαδόν $(OAMB)=(OA)\cdot(OB)=\frac{16}{x}\cdot x=16$ τετραγωνικές μονάδες και περίμετρο

$\Pi(x)=2(OA)+2(OB)=2\cdot\frac{16}{x}+2\cdot x=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$.

β. Αναζητούμε τις τιμές του $x>0$ για τις οποίες

$$\Pi(x)=20 \Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}=20 \Leftrightarrow 2x^2+32=20x \Leftrightarrow 2x^2-20x+32=0 \Leftrightarrow x^2-10x+16=0$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x=2$ ή $x=8$.

- Για $x=2$ είναι $y=\frac{16}{2}=8$ οπότε $M_1(2\,,\,8)$.
- Για $x=8$ είναι $y=\frac{16}{8}=2$ οπότε $M_2(8\,,\,2)$.

γ. i. Το τετράπλευρο $OAM'B$ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $(OA)=(OB)$ δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x}=x \Leftrightarrow x^2=16$ και επειδή $x>0$ έχουμε ότι $x=4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$, δηλαδή ισοδύναμα

$2x+\frac{32}{x}\geq 16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2+32\geq 16x \Leftrightarrow 2x^2+32-16x\geq 0 \Leftrightarrow x^2+16-8x\geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο $OAM'B$.

382 Θέμα 4 – 12728

α. Για $x=0$, έχουμε: $y+\frac{1}{2}\cdot 0=4 \Leftrightarrow y=4$

Για $y=0$, έχουμε: $0+\frac{1}{2}x=4 \Leftrightarrow x=8$

Άρα η ευθεία τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $\Delta(0,4)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $E(8,0)$.

β. Το Γ είναι σημείο του ΔΕ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων $\Delta(0,4)$ και $E(8,0)$. Δηλαδή:

$$0\leq t\leq 8$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y+\frac{1}{2}x=4$, οπότε:

$$y_\Gamma+\frac{1}{2}t=4 \Leftrightarrow y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t$$

γ. Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση:

$$E=\frac{(O\Delta+B\Gamma)OB}{2}$$

όπου: $O\Delta=y_\Delta=4$, $B\Gamma=4-\frac{1}{2}t$ και $OB=x_\Gamma=t$.

Οπότε $E(t)=\dfrac{\left(4+4-\frac{1}{2}t\right)t}{2}=\dfrac{8t-\frac{1}{2}t^2}{2}=\dfrac{8t}{2}-\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{2}=4t-\frac{1}{4}t^2$, με $t\in[0,8]$.

δ. Είναι $E(t)=9,75 \Leftrightarrow 4t-\frac{1}{4}t^2=9,75 \Leftrightarrow 16t-t^2=39 \Leftrightarrow t^2-16t+39=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-13)=0$

$\Leftrightarrow t=3$ ή $t=13$, που απορρίπτεται

Άρα $t=3$, οπότε $y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t=4-\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{5}{2}$, δηλαδή $\Gamma(3, \frac{5}{2})$.

383 Θέμα 4 – 12834

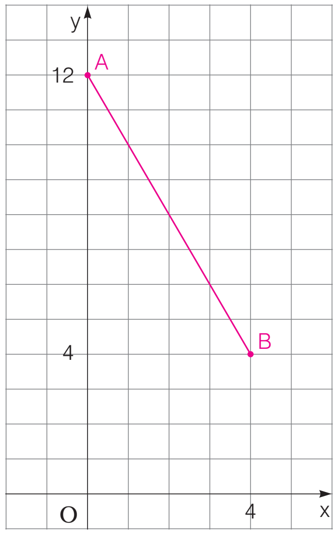
α. Για το εμβαδόν (ΑΔΕ) ισχύει:

$$(\mathrm{A\Delta E})=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-(\mathrm{ABE})-(\mathrm{\Gamma\Delta E})=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{\Gamma\Delta}}{2}\cdot \mathrm{A\Delta}-\frac{\mathrm{AB}\cdot \mathrm{EZ}}{2}-\frac{\mathrm{\Delta\Gamma}\cdot \mathrm{EH}}{2}$$

$$=\frac{2+6}{2}\cdot 4-\frac{2(4-x)}{2}-\frac{6x}{2}=16-(4-x)-3x=16-4+x-3x$$

Οπότε $f(x)=-2x+12$.

Τα μήκη ΕΗ και ΕΖ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x\ge 0$ και $4-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 4$, άρα $x\in[0, 4]$.



β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x+12$ με $x\in[0, 4]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αφού $f(0)=-2\cdot 0+12=12$ και $f(4)=-2\cdot 4+12=-8+12=4$.

γ. $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+\ldots+f\left(\frac{64}{16}\right)=$

$=(-2\cdot\frac{1}{16}+12)+(-2\cdot\frac{2}{16}+12)+\ldots+(-2\cdot\frac{64}{16}+12)$

$=-\frac{2}{16}(1+2+3+\ldots+64)+12\cdot 64$

$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{64(64+1)}{2}+12\cdot 64=-4\cdot 65+12\cdot 64$

$=(-4+12)\cdot 65-12=8\cdot 65-12=520-12=508$

Χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

αφού πρόκειται για άθροισμα ν διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=1$, $\omega=1$, $\alpha_\nu=\nu$, οπότε από τον γνωστό τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ παίρνουμε

$S_\nu=\frac{\nu}{2}(1+\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

384 Θέμα 4 – 1496

α. i. Είναι $f(x)=0,6x+1$, οπότε ο πίνακας γίνεται

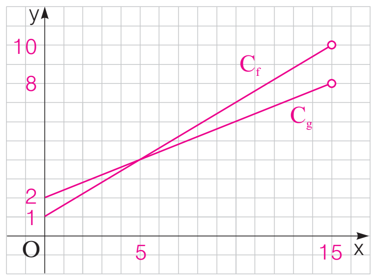
x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii. Είναι $g(x)=0,4x+2$, οπότε ο πίνακας γίνεται

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. Το πεδίο ορισμού των f και g είναι το $A=[0, 15)$ και $f(x)=0,6x+1$, $g(x)=0,4x+2$.

γ. Αν η απόσταση είναι $x \in [0, 5)$ συμφέρει η "RED", ενώ για $x \in (5, 15)$ συμφέρει η "YELLOW", διότι στο διάστημα $[0, 5)$ η C_f είναι κάτω από τη C_g , ενώ στο $(5, 15)$ η C_g είναι κάτω από τη C_f .



δ. Αν ο πελάτης Β διανύσει x χιλιόμετρα, τότε ο πελάτης Α θα διανύσει $x+3$ χιλιόμετρα. Επομένως ο πελάτης Β θα πληρώσει:

$B=1+0,6x$ και ο πελάτης Α θα πληρώσει

$A=1+0,6\,(x+3)=1+0,6x+0,6\cdot 3=B+1,8$

Τελικά ο πελάτης Α θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη Β.

385 Θέμα 4 – 1479

α. $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

β. $x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ ή $x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$

γ. Το ζητούμενο τριώνυμο αποκλείεται να έχει ρίζες τις -1 και $-\sqrt{2}$. Το τριώνυμο $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 , $\sqrt{2}$ και έχει θετική τιμή για κάθε $x<0$.

386 Θέμα 4 – 1410

α. Η σφαίρα βρίσκεται στο έδαφος, όταν $y=0$.

Για $y=0$, έχουμε $0=60t-5t^2 \Leftrightarrow 5t^2-60t=0 \Leftrightarrow 5t(t-12)=0 \Leftrightarrow t=0$ ή $t=12$.

Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από 12 sec.

β. Για $y=175$, έχουμε $175=60t-5t^2 \Leftrightarrow 5t^2-60t+175=0 \Leftrightarrow t^2-12t+35=0$.

Η εξίσωση έχει:
- $\Delta=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 35=144-140=4$
- $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\dfrac{12\pm 2}{2}$. Οπότε $t=5$ ή $t=7$.

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175m$ τις χρονικές στιγμές $t_1=5sec$ και $t_2=7$ sec .

γ. Είναι $y>100 \Leftrightarrow 60t-5t^2>100 \Leftrightarrow 5t^2-60t+100<0 \Leftrightarrow t^2-12t+20<0$, (1) .

Είναι:
- $\Delta=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 20=144-80=64$
- $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{12\pm 8}{2}$. Οπότε $t=10$ ή $t=2$.

t	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$t^2-12t+20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow t\in(2, 10)$.

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m στο χρονικό διάστημα μεταξύ των 2 sec και 10 sec.

387 Θέμα 4 – 12999

α. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u . Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι

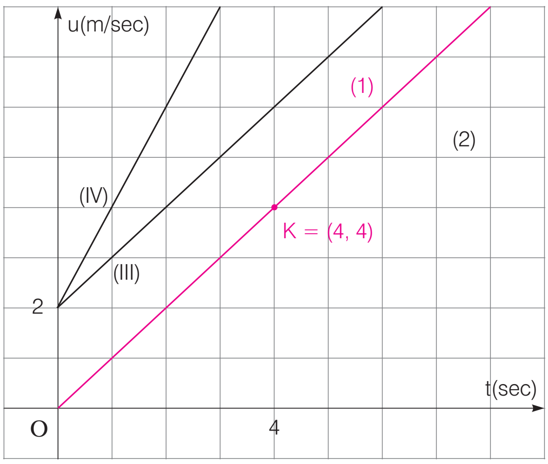
$t\in[0, +\infty)$.

β. i. Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του ταχύτητα θα είναι 0m/sec , άρα αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (Ι).

Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (ΙΙ).

ii. Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4sec το όχημα της γραμμής (ΙΙ) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή $t=4sec$ τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (Ι) κινείται ταχύτερα.

iii. Η επιτάχυνση α αποτελεί την κλίση της ευθείας (ΙΙΙ), η οποία θα περιγράφει την ταχύτητα ως προς το χρόνο του οχήματος Γ, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec. Για να έχει σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, θα πρέπει η ευθεία (ΙΙΙ) να μην τέμνεται με την ευθεία (Ι) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο Λ(0 , 2), θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτής της ευθείας (Ι). Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο ευθείες: η (ΙΙΙ) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.



388 Θέμα 4 – 14320

α) Η θερμοκρασία στις 6 το πρωί, προκύπτει για $x=0$ και είναι ίση με $f(0)=4$.

Η θερμοκρασία στις 12 το μεσημέρι, προκύπτει για $x=6$ και είναι ίση με $f(6)=2\cdot 6+4=16$.

Η θερμοκρασία στις 5 το απόγευμα, προκύπτει για $x=11$ και είναι ίση με $f(11)=25-11=14$.

β) i. Η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή και ίση με 16 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην $6^{η}$ και την $9^{η}$ ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή στο διάστημα από τις 12 έως τις 3 το μεσημέρι.

ii. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $x\in[0,6]$ τότε: $f(x)>14 \Leftrightarrow 2x+4>14 \Leftrightarrow x>5$
- Αν $x\in(6,9]$ τότε: $f(x)=16>14$
- Αν $x\in[9,12]$ τότε: $f(x)>14 \Leftrightarrow 25-x>14 \Leftrightarrow x<11$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην $5^{η}$ και $11^{η}$ ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή από τις 11 το πρωί μέχρι τις 5 το απόγευμα.

γ) Η γραφική παράσταση C_f της f αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα.

- Το πρώτο τμήμα ΑΒ έχει άκρα τα σημεία $A(0,4)$ και $B(6,16)$
- Το δεύτερο τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα το Β και το $Γ(9, f(9))$ δηλαδή το $Γ(9,16)$
- Το τρίτο τμήμα ΓΔ έχει άκρα το σημείο Γ και το $Δ(12, f(12))$ δηλαδή το $Δ(12,13)$

Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.