ΛΥΣΕΙΣ

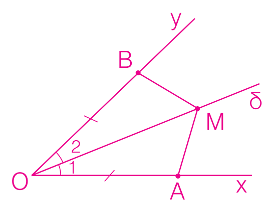
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μπάρλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

1 Θέμα 2 - 1627



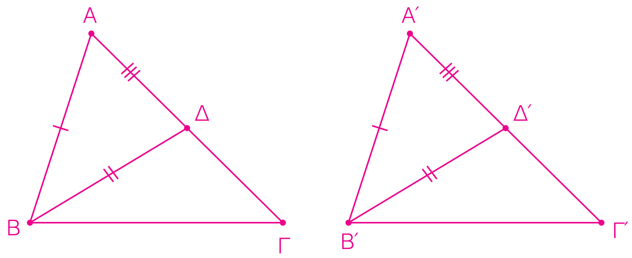
α. Τα τρίγωνα OMA, OMB έχουν:

- $OA = OB$
- OM κοινή
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $MA = MB$.

β. Επειδή τα τρίγωνα OMA, OMB είναι ίσα, προκύπτει $O\hat{M}A = O\hat{M}B$. Οπότε η $O\delta$ είναι η διχοτόμος της $A\hat{M}B$.

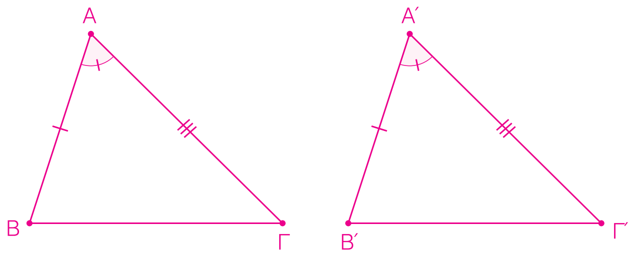
2 Θέμα 2 - 13518



α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και $Α΄Β΄Δ΄$ έχουν:

- $ΒΔ = Β΄Δ΄$
- $ΑΒ = Α΄Β΄$
- $ΑΔ = Α΄Δ΄$, ως μισά των ίσων πλευρών $ΑΓ$ και $Α΄Γ$ αντίστοιχα.

Επομένως, είναι ίσα, (ΠΠΠ), άρα $\hat{Α} = \hat{Α}΄$.

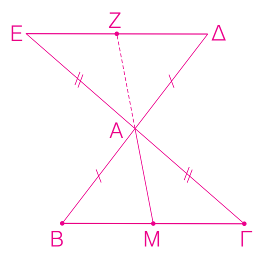


β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α΄Β΄Γ΄$ έχουν:

- $ΑΒ = Α΄Β΄$
- $ΑΓ = Α΄Γ΄$
- $\hat{Α} = \hat{Α}΄$

Επομένως, είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

3 Θέμα 2 - 1598



α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΔΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΑΓ = ΑΕ$
- $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Α}Ε$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. i. Τα τρίγωνα $ΑΔΖ$, $ΑΒΜ$, έχουν:

- $ΑΔ = ΑΒ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$
- $Δ\hat{Α}Ζ = Β\hat{Α}Μ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΑΔΖ$ είναι ίσα έχουμε $ΖΔ = ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΕΔ}{2}$.

4 Θέμα 2 - 1592

α. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές $(ΑΒ = ΑΓ)$, προκύπτει ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$, οπότε και $\hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$, ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma E$, έχουν:

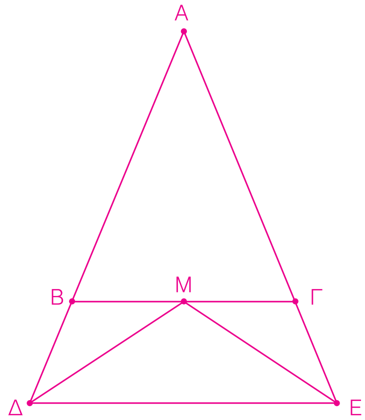
- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Είναι $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$ οπότε $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Rightarrow M\Delta = ME$.

Άρα AM διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

5 Θέμα 2 - 12635



α. Τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ έχουν:

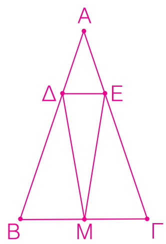
- $MB = M\Gamma$, αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- $B\Delta = \Gamma E$, από την υπόθεση
- $M\hat{B}\Delta = M\hat{\Gamma}E$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιων $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε: $M\Delta = ME$.

Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$.

6 Θέμα 2 - 1621



- Είναι $B\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}A\Gamma = \Gamma E$.
- Τα τρίγωνα $B\Delta M$, $ME\Gamma$ έχουν:
  - $MB = M\Gamma$
  - $B\Delta = \Gamma E$
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

7 Θέμα 2 - 12705

α. Η BE είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως, $AE = \frac{A\Gamma}{2}$. Όμως $AB = \frac{A\Gamma}{2}$, οπότε $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ έχουν:
- $AB = AE$
- $A\Delta$ κοινή πλευρά
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Delta B = \Delta E$.

γ. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και η AZ είναι διχοτόμος του.
Επομένως, η AZ είναι και ύψος, άρα, $AZ \perp BE$.

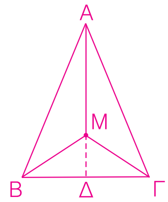
8 Θέμα 2 - 1632

α. Τα τρίγωνα $OA\Gamma$ και $OB\Delta$ έχουν:
- $OA = OB$
- $O\Gamma = O\Delta$
- $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $A\Gamma = B\Delta$.

β. Επειδή το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές και η OM είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος. Άρα το M είναι το μέσο της $B\Delta$.

9 Θέμα 2 - 1601



α. Τα τρίγωνα AMB, $AM\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $MB = M\Gamma$
- AM κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Έστω ότι η AM τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ. Επειδή τα τρίγωνα $AMB, AM\Gamma$ είναι ίσα, προκύπτει ότι $B\widehat{M}A = \Gamma\widehat{M}A$.

Οπότε και $B\widehat{M}\Delta = \Gamma\widehat{M}\Delta$, άρα η ευθεία AM διχοτομεί τη $B\widehat{M}\Gamma$.

10 Θέμα 2 - 12636

α. Τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ έχουν:
- $MB = M\Gamma$, αφού το M είναι μέσο της $B\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$, από υπόθεση
- $M\hat{B}\Delta = M\hat{\Gamma}E$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $M\Delta = ME$.

Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$.

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Είναι $A\Delta = AB + B\Delta$ και $AE = A\Gamma + \Gamma E$, οπότε $A\Delta = AE$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

Επομένως, στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΖ ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

Άρα η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

11 Θέμα 2 - 1660

α. Επειδή το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $B\Gamma = 2BE \Leftrightarrow BE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow BE = BM$, έχουμε $B\hat{E}M = B\widehat{M}E$.

Επομένως $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα ABE, $E\Gamma M$ έχουν:
- $ME = AE$
- $EB = M\Gamma$
- $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$

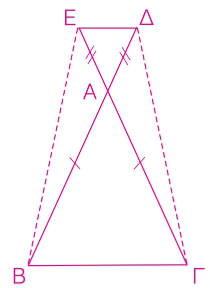
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $AB = E\Gamma$.

12 Θέμα 2 - 1648

α. Είναι $BE = AB + AE = A\Gamma + A\Delta = \Gamma\Delta$.

β. Τα τρίγωνα $BA\Delta$ και ΓAE έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$
- $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $B\Delta = \Gamma E$.

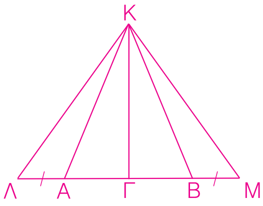


γ. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επειδή τα τρίγωνα $BA\Delta, \Gamma AE$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta\hat{B}A = E\hat{\Gamma}A$.

Επομένως $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

13 Θέμα 2 - 1622



α. Τα τρίγωνα $ΚΑΛ$, $ΚΒΜ$ έχουν:

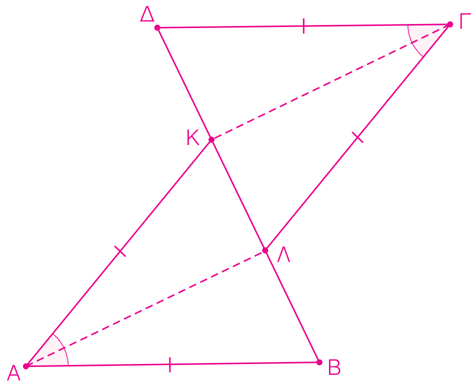
- $ΚΑ = ΚΒ$
- $ΑΛ = ΒΜ$
- $Κ\widehat{Α}Λ = Κ\widehat{Β}Μ$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Β}$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΚΑΒ$. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΚΛ = ΚΜ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο $ΚΑΒ$ είναι ισοσκελές η διχοτόμος του $ΚΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΓΑ = ΓΒ$.

Οπότε $ΛΓ = ΛΑ + ΑΓ = ΒΜ + ΓΒ = ΜΓ$. Άρα η $ΚΓ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΚΛΜ$.

14 Θέμα 2 - 13826



α. Τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΓΔΛ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΚ$
- $ΓΔ = ΓΛ$
- $\hat{Α} = \hat{Γ}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΒΚ = ΔΛ$.

β. i. Αφού $Λ$ και $Κ$ είναι μέσα των $ΒΚ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $ΒΛ = ΛΚ$ και $ΛΚ = ΚΔ$, οπότε θα είναι $ΒΛ = ΛΚ = ΚΔ$.

ii. Τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΓΔΛ$ είναι ισοσκελή και τα $ΑΛ$ και $ΓΚ$ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, άρα θα είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή $ΑΛ \perp ΒΚ$ και $ΓΚ \perp ΔΛ$.

Οπότε οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

15 Θέμα 2 - 1591

α. Τα τρίγωνα $ΒΑΚ$, $ΚΑΓ$, έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΚΒ = ΚΓ$
- $ΑΚ$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΒΑΚ$, $ΚΑΓ$ είναι ίσα, έχουμε $Β\widehat{Α}Κ = Κ\widehat{Α}Γ$.

Οπότε η $ΑΚ$ είναι διχοτόμος της $Β\widehat{Α}Γ$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος του $ΑΚ$ θα είναι και διάμεσος.
Άρα το $Ε$ είναι το μέσο του $ΒΓ$, οπότε η $ΚΕ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΒΚΓ$.

16 Θέμα 2 - 1624

α. Είναι $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, οπότε τα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΔΑΓ$ είναι ισοσκελή.

Τα $ΒΚ$, $ΔΚ$ είναι ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα, οπότε θα είναι και διχοτόμοι.

Επομένως η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{Β}$ και $\widehat{Δ}$.

β. Είναι $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, οπότε τα σημεία $Β$ και $Δ$ ισαπέχουν από τα $Α$ και $Γ$.

Άρα τα $Β$ και $Δ$ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$.

Οπότε η ευθεία $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

17 Θέμα 2 - 1587

α. Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$, $ΑΕΓ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΕ$ κοινή
- $\hat{δ} = \hat{γ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα AEB, $AE\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $EB = E\Gamma$. Άρα το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $EB = E\Gamma$, η ευθεία $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

18 Θέμα 4 - 1846

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:

- $A\Gamma = AE$
- $AB = A\Delta$
- $\widehat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $B\Gamma = \Delta E$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε:

- $B\widehat{E}K = \Delta\widehat{\Gamma}K$
- $A\widehat{B}K = A\widehat{\Delta}K$

Οπότε $E\widehat{B}K = \Gamma\widehat{\Delta}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα BEK και $\Delta\Gamma K$ έχουν:

- $BE = \Delta\Gamma$ ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $B\widehat{E}K = \Delta\widehat{\Gamma}K$
- $E\widehat{B}K = \Gamma\widehat{\Delta}K$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα $BK = K\Delta$.

γ. Τα τρίγωνα ABK, $A\Delta K$ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $BK = K\Delta$
- AK κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $B\widehat{A}K = \Delta\widehat{A}K$.

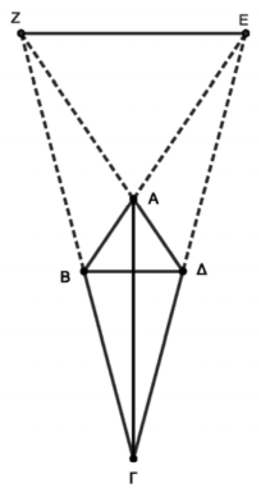
Επομένως η AK είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$.

δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AE\Gamma$ η AM είναι διχοτόμος, οπότε είναι διάμεσος και ύψος.

Άρα η AM είμαι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

19 Θέμα 4 - 14880

α)

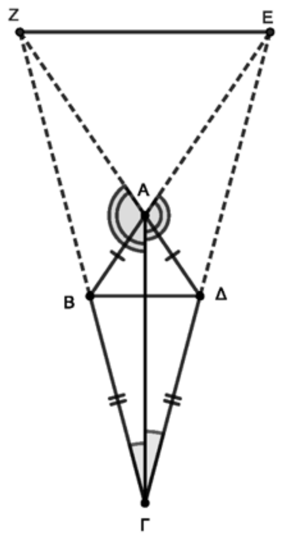


Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΔ, από υπόθεση
- ΓΒ = ΓΔ, από υπόθεση
- ΓΑ κοινή πλευρά

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε έχουν $B\hat{Γ}A = A\hat{Γ}Δ$ (1), διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{Γ}Δ$.

β)



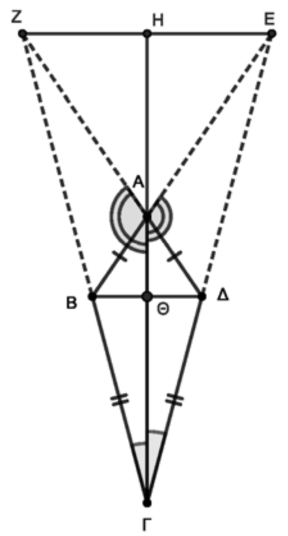
$Z\hat{A}B = E\hat{A}Δ$ (2) ως κατακορυφήν γωνίες, $B\hat{A}Γ = Δ\hat{A}Γ$ (3), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΒ και ΓΔ αντίστοιχα, των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ του α) ερωτήματος. Από (2) και (3) έχουμε ότι: $Z\hat{A}Γ = E\hat{A}Γ$ (4) ως αθροίσματα ίσων γωνιών

Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

- $B\hat{Γ}A = A\hat{Γ}Δ$, από τη σχέση (1)
- ΑΓ κοινή πλευρά
- $Z\hat{A}Γ = E\hat{A}Γ$, από τη σχέση (4)

Άρα από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε ΓΖ=ΓΕ γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{A}Γ$, $E\hat{A}Γ$ αντίστοιχα.

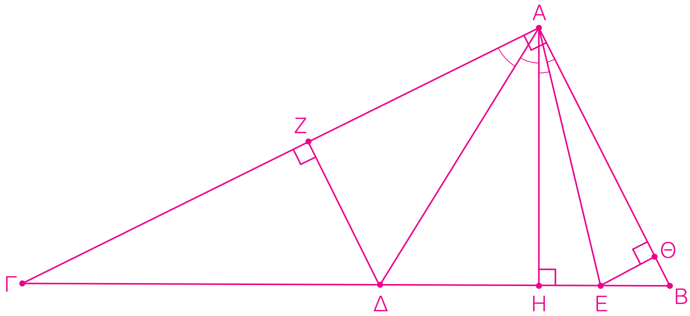
γ)



Έστω Η και Θ τα σημεία στα οποία το τμήμα ΑΓ τέμνει τα τμήματα ΖΕ και ΒΔ αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ (ΓΒ = ΓΔ), η ΓΘ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $ΒΔ \perp ΓΘ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ (ΓΖ = ΓΕ), η ΓΗ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $ΕΖ \perp ΓΗ$ ή $ΕΖ \perp ΓΘ$.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι ΕΖ // ΒΔ, ως κάθετα στο ίδιο τμήμα ΓΘ.

20 Θέμα 4 - 13499



α. • Είναι: $Γ\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Β - Δ\hat{Α}Β = 90^\circ - Δ\hat{Α}Β$, (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΗ είναι

$Δ\hat{Α}Η = 90^\circ - Α\hat{Δ}Η$, (2).

Αφού $ΒΔ = ΒΑ$, το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι ισοσκελές οπότε $Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Δ}Η$, (3).

Από τις σχέσεις (1) , (2) και (3) έχουμε

$Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$, (4).

• Είναι: $Ε\hat{Α}Β = Γ\hat{Α}Β - Γ\hat{Α}Ε = 90^\circ - Γ\hat{Α}Ε$, (5).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ είναι $Η\hat{Α}Ε = 90^\circ - Α\hat{Ε}Η$, (6).

Αφού $ΓΕ = ΓΑ$, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές, οπότε $Γ\hat{Α}Ε = Α\hat{Ε}Η$, (7).

Από τις σχέσεις (5) , (6) και (7) έχουμε $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$, (8).

β. • Από **α.** ερώτημα έχουμε $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Η\hat{Α}Β$ του τριγώνου ΑΗΒ.

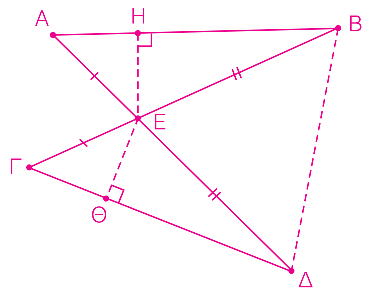
Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ , επομένως $ΕΗ = ΕΘ$.

• Από **α.** ερώτημα έχουμε $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Η\hat{Α}Γ$ του τριγώνου ΑΗΓ.

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι $ΔΗ = ΔΖ$.

Επομένως, $ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ$.

21 Θέμα 4 - 13839



α. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

• $ΑΕ = ΓΕ$

• $ΒΕ = ΔΕ$

• $Α\hat{Ε}Β = Γ\hat{Ε}Δ$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β. Τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ έχουν:

• $ΑΕ = ΓΕ$

• $\hat{Η} = \hat{Θ} = 90^\circ$

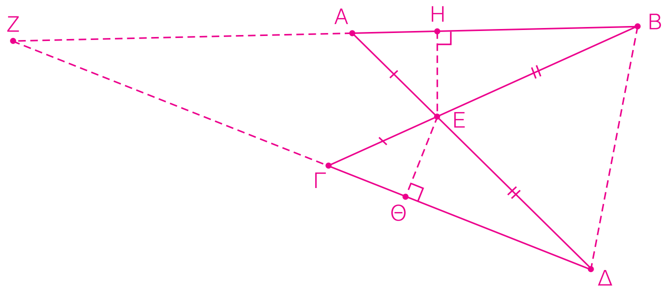
• $Ε\hat{Α}Η = Ε\hat{Γ}Θ$ (από σύγκριση) του ερωτήματος **α.**

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και $ΕΗ = ΕΘ$.

γ. Από την ισότητα των τριγώνων του **α.** ερωτήματος έχουμε ότι $A\hat{B}E = \Gamma\hat{\Delta}E$.

Είναι $EB = E\Delta$ άρα το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Delta$, άρα $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Delta}B$.

Οπότε $A\hat{B}E + E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}B \Leftrightarrow Z\hat{B}\Delta = Z\hat{\Delta}B$, άρα το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



22 Θέμα 4 - 1725

α. Τα τρίγωνα $OA\Lambda$, OBK, έχουν:

- $O\Lambda = OK \quad (=\rho_1)$
- $OA = OB \quad (=\rho_2)$
- $\hat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $A\Lambda = BK$.

β. Τα τρίγωνα $OA\Lambda$ και OBK είναι ίσα, οπότε $O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ και $O\hat{K}B = O\hat{\Lambda}A$.

Τα τρίγωνα PKA, $P\Lambda B$ έχουν:

- $KA = \Lambda B$, ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $K\hat{A}P = P\hat{B}\Lambda$
- $A\hat{K}P = B\hat{\Lambda}P$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $O\hat{K}P$ και $O\hat{\Lambda}P$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $PA = PB$.

Επομένως το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές.

γ. Τα τρίγωνα OPK, $OP\Lambda$ έχουν:

- $OK = O\Lambda$
- OP κοινή
- $KP = P\Lambda$ (αφού τα τρίγωνα PKA, $P\Lambda B$ είναι ίσα).

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $K\hat{O}P = P\hat{O}\Lambda$.

Επομένως η OP είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

23 Θέμα 4 - 1582

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta$ κοινή
- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα τρίγωνα ΔEA, ΔZA έχουν:

- $A\Delta$ κοινή
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta$
- $E\hat{\Delta}A = Z\hat{\Delta}A$, αφού τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

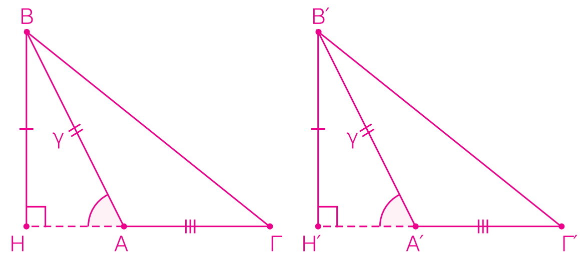
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

24 Θέμα 2 - 12149

α. Τα τρίγωνα BHA και $B'H'A'$ έχουν:

- $\hat{H} = \hat{H}' = 90^o$, αφού τα BH και $B'H'$ είναι ύψη
- $BH = B'H'$, από υπόθεση
- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, άρα $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$ (1).



β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση
- $\beta = \beta'$, από υπόθεση
- $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma'$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

25 Θέμα 2 - 13517

α. Τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ έχουν:
- $BH = E\Theta$, από (1)
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$

Επομένως, είναι ίσα, οπότε $AB = \Delta E$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:
- $AB = \Delta E$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΠΓΠ).

26 Θέμα 2 - 1657

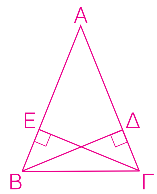
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:
- $M\Delta = ME$
- ΑΜ κοινή

Οπότε είναι ίσα.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = ME$.

27 Θέμα 2 - 1568



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΕΑΓ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΕΑΓ έχουν:
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Gamma = AB$.

28 Θέμα 2 - 1659

α. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $BE = \Gamma\Delta$
- $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $A\Delta = AE$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΕ και ΗΓΔ έχουν:

- $BE = \Gamma\Delta$
- $E\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$.

Οπότε είναι ίσα, άρα $EZ = \Delta H$.

29 Θέμα 2 - 13533

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E = 90^o$
- $AB = A\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

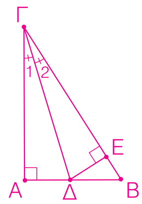
β. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ προκύπτει ότι $A\Delta = AE$.

Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Άρα $BE = B\Delta - \Delta E = \Gamma E - \Delta E = \Gamma\Delta$.

30 Θέμα 2 - 1574



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- $\Gamma\Delta$ κοινή
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, προκύπτει $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$.

Τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα σημεία A και E , άρα τα Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .

31 Θέμα 2 - 1656

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $MA\Delta$ και NAE έχουν:

- $M\Delta = NE$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα: $AM = AN \Rightarrow 2AM = 2AN \Rightarrow AB = A\Gamma$.

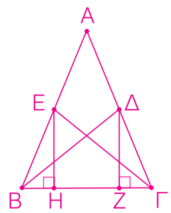
Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $MA\Delta$ και NAE έχουν:

- $AM = AN$, ως μισά των ίσων τμημάτων AB και $A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = NE$.

32 Θέμα 2 - 1532



α. Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή
- $\Gamma\hat{B}E = B\hat{\Gamma}\Delta$
- $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ ως μισά ίσων γωνιών.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΕΒ$ και $ΖΔΓ$ έχουν:
- $ΕΒ = ΓΔ$, αφού τα τρίγωνα $ΓΒΕ$, $ΒΓΔ$ είναι ίσα
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΕΗ = ΔΖ$.

33 Θέμα 2 - 1698

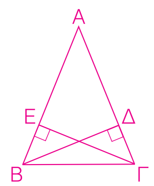
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΓΕΜ$ έχουν:
- $ΜΒ = ΜΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$
- $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $Α\hat{Β}Γ$ και $Α\hat{Γ}Β$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΑΔ = ΑΕ$.

34 Θέμα 2 - 1545

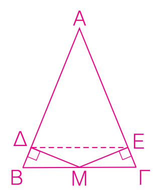


α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΓ$ και $ΓΕΒ$ έχουν:
- $ΒΓ$ κοινή
- $\hat{Γ} = \hat{Β}$ ($\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές)

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΒΔΓ$, $ΓΕΒ$ είναι ίσα, έχουμε $ΔΓ = ΕΒ$.
Είναι $ΑΔ = ΑΓ - ΔΓ = ΑΒ - ΒΕ = ΑΕ$.

35 Θέμα 2 - 1547



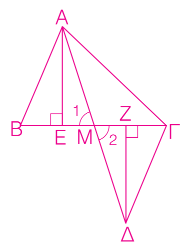
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΜ$ και $ΕΓΜ$ έχουν:
- $ΜΒ = ΜΓ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΜΔ = ΜΕ$.

β. Είναι:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΔΒ = ΕΓ$, αφού τα τρίγωνα $ΔΒΜ$, $ΕΓΜ$ είναι ίσα.

Οπότε $ΑΔ = ΑΒ - ΔΒ = ΑΓ - ΕΓ = ΑΕ$, άρα το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές.

36 Θέμα 2 - 1569



α. Τα τρίγωνα $ΑΒΜ$, $ΜΓΔ$ έχουν:
- $ΜΒ = ΜΓ$
- $ΑΜ = ΜΔ$
- $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΜ$ και $ΖΔΜ$ έχουν:
- $ΜΑ = ΜΔ$
- $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$

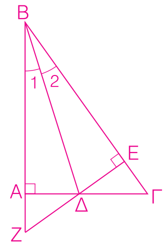
Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΕ = ΔΖ$.

37 Θέμα 2 - 1670

α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, το $ΑΔ$ είναι διχοτόμος και ύψος.
Οπότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ το ύψος $ΑΔ$ είναι και διάμεσος.
Οπότε η ευθεία $ΑΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΒΓ$, άρα $ΕΒ = ΕΓ$.

38 Θέμα 2 - 1571



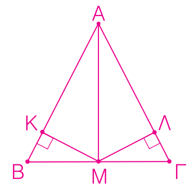
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ $(\hat{Α}=90^{ο})$ και $ΕΒΔ$ $(\hat{Ε}=90^{ο})$ έχουν:
- $ΒΔ$ κοινή
- $\hat{Β}_1=\hat{Β}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΒ=ΒΕ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΕΒ$ έχουν:
- $ΑΒ=ΒΕ$
- $\hat{Β}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα.

39 Θέμα 2 - 1546



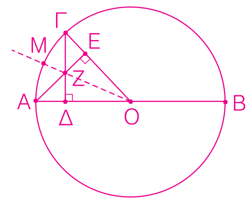
α. Επειδή η $ΑΜ$ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$, θα είναι και διχοτόμος, οπότε $ΜΚ=ΜΛ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΚΑΜ$ και $ΛΑΜ$ έχουν:
- $ΑΜ$ κοινή
- $ΜΚ=ΜΛ$

Οπότε είναι ίσα, άρα $Κ\hat{Μ}Α=Λ\hat{Μ}Α$.

Άρα η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της $Κ\hat{Μ}Λ$.

40 Θέμα 2 - 1677



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΟ$, $ΔΓΟ$ έχουν:
- $ΟΑ=ΟΓ$, ως ακτίνες του κύκλου
- $\hat{Ο}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΟΔ=ΟΕ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΔΟΕ$ είναι ισοσκελές.

β. • Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΖΟ$, $ΔΖΟ$ έχουν:
- $ΟΖ$ κοινή
- $ΟΔ=ΟΕ$

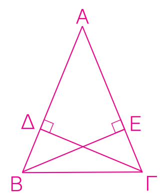
Οπότε είναι ίσα, άρα $Δ\hat{Ο}Ζ=Ε\hat{Ο}Ζ$.

Επομένως η $ΟΖ$ είναι η διχοτόμος της $Α\hat{Ο}Γ$.

- Έστω ότι η $ΟΖ$ τέμνει το κύκλο στο $Μ$.

Έχουμε $Α\hat{Ο}Μ=Μ\hat{Ο}Γ$, άρα $\overset{\frown}{ΜΑ}=\overset{\frown}{ΜΓ}$, επομένως το $Μ$ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$.

41 Θέμα 4 - 1724



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν:
- $ΑΒ=ΑΓ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΕ=ΓΔ$.

Επομένως η πρόταση $Π$ ισχύει.

β. Η αντίστροφη πρόταση της $Π$ είναι:

$Π΄$: Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα ύψη του $ΒΕ$ και $ΓΔ$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$.

Απόδειξη

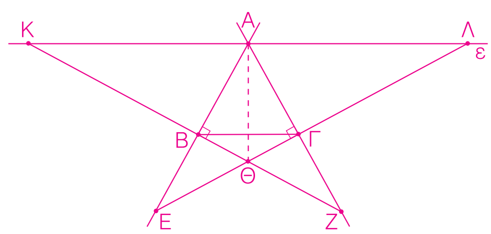
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν:
- $ΒΕ=ΓΔ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΒ=ΑΓ$.

Επομένως η πρόταση $Π΄$ ισχύει.

γ. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές τους είναι ίσα.

42 Θέμα 4 - 1875



α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΒ$ και $ΑΕΓ$ έχουν:
- $ΑΒ=ΑΓ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ=ΑΕ$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}\Lambda \quad (= \dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2})$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AK = A\Lambda$.

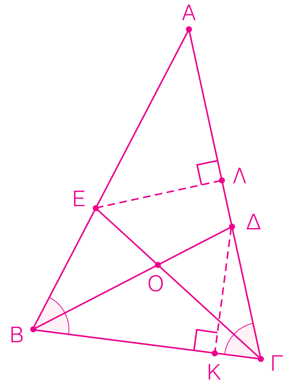
β. Συμφωνούμε διότι: Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΘΒ και ΑΘΓ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- ΑΘ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\hat{A}\Theta = \Gamma\hat{A}\Theta$.

Επομένως η ΑΘ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$.

43 Θέμα 4 - 13854



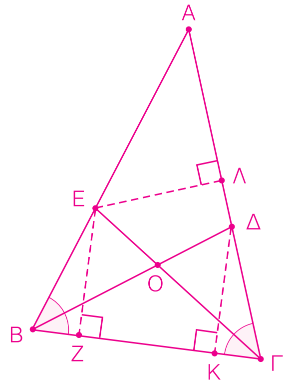
α. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή
- $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ (μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$)
- $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$ (ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε ΒΔ = ΓΕ.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{o}$
- ΒΔ = ΓΕ
- $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}E$



Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, οπότε

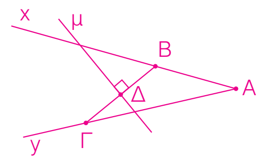
ΔΚ = ΕΛ.

γ. Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ για το οποίο να ισχύει ΖΕ = ΔΚ.

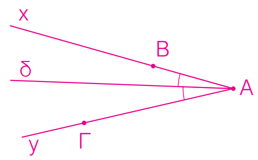
Έχουμε ότι ΔΚ = ΕΛ, οπότε ΖΕ = ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ οπότε ΕΛ = ΕΖ. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

44 Θέμα 2 - 1688

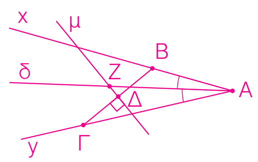
Γεωμετρικά οι δυνατές θέσεις του θησαυρού είναι:



α. Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ , αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.



β. Πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

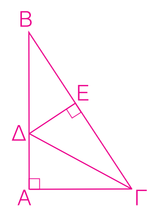


γ. Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, άρα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΒΓ και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$.

45 Θέμα 2 - 1540

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΓΔΕ έχουν:

- ΓΔ κοινή
- $A\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$, αφού ΓΔ διχοτόμος



Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = \Delta E$.

2ος τρόπος

Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\Gamma}$, οπότε το Δ ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, άρα $A\Delta = \Delta E$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΔ$ η $ΔΒ$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα $ΔΕ < ΔΒ$, οπότε $ΑΔ < ΔΒ$.

46 Θέμα 2 - 1573

α. Τα τρίγωνα $ΔΑΒ$, $ΔΕΓ$ έχουν:

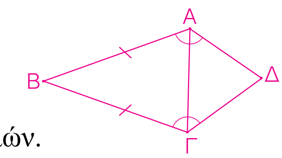
- $ΔΒ = ΔΓ$
- $ΑΔ = ΔΕ$
- $Α\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Ε$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΑΒ = ΓΕ \quad (1)$.

β. Στο τρίγωνο $ΑΓΕ$ εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και έχουμε

$$ΑΕ < ΓΕ + ΑΓ \overset{(1)}{\Rightarrow} ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ$$

47 Θέμα 2 - 1585

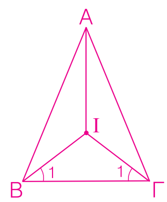


α. Το τρίγωνο $ΒΑΓ$ είναι ισοσκελές, με $ΒΑ = ΒΓ$, οπότε $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$.

β. Επειδή $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Γ}Δ$ και $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$, έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Γ}Α$, ως διαφορές ίσων γωνιών. Οπότε το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ οπότε τα Β, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$. Άρα η ευθεία $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

48 Θέμα 2 - 1558



α. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Οπότε και $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$, ως μισά ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο $ΒΙΓ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $ΑΒΙ$, $ΑΓΙ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΙ$ κοινή
- $ΙΒ = ΙΓ$, αφού το τρίγωνο $ΒΙΓ$ είναι ισοσκελές

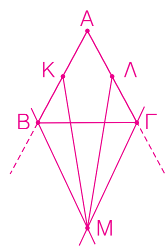
Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $Α\hat{Ι}Β = Α\hat{Ι}Γ$.

γ. Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΙΒ = ΙΓ$, τα Α, Ι ισαπέχουν από τα Β, Γ, οπότε τα Α, Ι ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΒΓ$. Άρα η ευθεία $ΑΙ$ είναι μεσοκάθετος του $ΒΓ$.

49 Θέμα 2 - 1553

α. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε

$$\hat{Β} = \hat{Γ} \Rightarrow \hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ} \Rightarrow \frac{\hat{Β}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{Γ}_{εξ}}{2} \Rightarrow Μ\hat{Β}Γ = Μ\hat{Γ}Β$$



Άρα το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές με $ΜΒ = ΜΓ$.

β. Τα τρίγωνα $ΜΚΒ$ και $ΜΛΓ$ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$
- $ΒΚ = ΓΛ$
- $Μ\hat{Β}Κ = Μ\hat{Γ}Λ$, ως άθροισμα ίσων γωνιών

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $ΜΚ = ΜΛ$.

50 Θέμα 2 - 1578

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΗ$ και $ΕΓΖ$ έχουν:

- $ΔΒ = ΓΕ$, ως μισά ίσων πλευρών
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΔBH, $E\Gamma Z$ είναι ίσα, προκύπτει $\hat{H}=\hat{Z}$.
Άρα το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

51 Θέμα 2 - 1646

α. Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$, ισαπέχει από τις πλευρές της.
Άρα $A\Delta=\Delta E$, (1) .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta\Gamma$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά, οπότε

$$\Delta E<\Delta\Gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} A\Delta<\Delta\Gamma$$

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}>\hat{\Gamma}$, οπότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες, άρα $A\Gamma>AB$.

52 Θέμα 2 - 1658

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:
- $M\Delta=ME$
- $MB=M\Gamma$, αφού M μέσο της $B\Gamma$

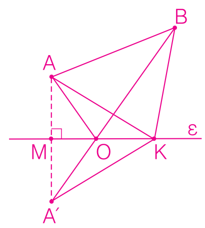
Άρα είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα, έχουμε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Αν $AB=A\Gamma$, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:
- $MB=M\Gamma$
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta=ME$.

53 Θέμα 2 - 1749



α. i. Στο τρίγωνο OAA' η OM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος.

ii. Η OM είναι διχοτόμος στο τρίγωνο OAA' , οπότε $A\hat{O}M=M\hat{O}A'$.

Είναι $M\hat{O}A'=K\hat{O}B$, ως κατακορυφήν, οπότε $A\hat{O}M=K\hat{O}B$.

β. i. Επειδή η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AA', έχουμε $KA=KA'$.

ii. Από την τριγωνική ανισότητα $\overset{\Delta}{KA'B}$ έχουμε

$KA'+KB>A'B \Leftrightarrow KA+KB>OA'+OB \Leftrightarrow KA+KB>OA+OB$.

54 Θέμα 2 - 13844

α. Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας ΑΒ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΔ και τα πλάγια τμήματα ΓΒ και ΓΑ.
Είναι $A\Delta>B\Delta$, οπότε $A\Gamma>B\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A\Gamma>B\Gamma$, οπότε ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $\hat{B}>\hat{A}$.

Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma}>\hat{A}$

Επομένως η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η $\hat{A}$.

55 Θέμα 2 - 13759

α. Επειδή η απόσταση $d=3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho=6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.

β. Επειδή η απόσταση $d=6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho=6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

γ. Επειδή η απόσταση $d=9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $\rho=6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.

56 Θέμα 2 - 1676

Στο τρίγωνο OAB το ON είναι το ύψος και διάμεσος, οπότε:
α. το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές

β. η ON είναι διχοτόμος της $K\hat{O}\Lambda$, άρα $N\hat{O}\Lambda=N\hat{O}K$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα,
δηλαδή $\overset{\frown}{N\Lambda}=\overset{\frown}{NK}$.

57 Θέμα 2 - 13817

α. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AZ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα $AB = AZ$. Όμοια τα ευθύγραμμα τμήματα ΓB, ΓM είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα $\Gamma B = \Gamma M$.

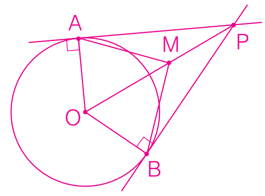
β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = AZ + M\Gamma$.

58 Θέμα 2 - 1617

α. Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

- $PA = PB$, αφού τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα
- PM κοινή
- $O\hat{P}A = O\hat{P}B$, αφού η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}B$.

Οπότε είναι ίσα.



β. Από το **α.** ερώτημα προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.

Είναι $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$, αφού οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες.

Οπότε $M\hat{A}O = M\hat{B}O$, ως διαφορές ίσων γωνιών.

59 Θέμα 2 - 1684

α. Τα τρίγωνα $AB E$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια $(\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o)$ και έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα είναι ίσα.

β. Είναι $B\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}E$, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

Τα τρίγωνα $BA\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$, αφού τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα
- $B\Delta = E\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

60 Θέμα 2 - 1751

α. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, έχουμε:

$PA = PB$, $A\Gamma = \Gamma\Delta$ και $EB = E\Delta$. Οπότε:

i. $P\Gamma = \Gamma A + AP = \Gamma\Delta + AP$

ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta \overset{\alpha.}{=} \Gamma\Delta + AP - \Gamma\Delta = AP = BP = PE - BE = PE - \Delta E$

β. Είναι:

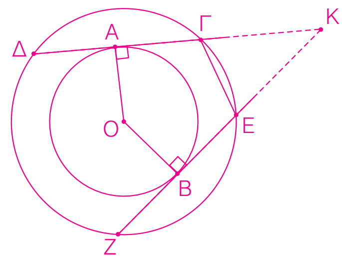
i. $P\Gamma = PA + A\Gamma = PB + BE = PE$. Οπότε το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

ii. • $O\Delta \perp \Gamma E$, αφού ΓE εφαπτομένη και $O\Delta$ ακτίνα

• $P\Delta \perp \Gamma E$, αφού το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές και $P\Delta$ διάμεσος γιατί $A\Gamma = BE \Rightarrow \Gamma\Delta = \Delta E$, οπότε το $P\Delta$ είναι και ύψος.

Άρα οι ευθείες $O\Delta$ και $P\Delta$ ταυτίζονται, οπότε τα P, O και Δ είναι συνευθειακά.

61 Θέμα 2 - 1667



α. Οι ακτίνες OA, OB είναι κάθετες στις εφαπτόμενες $\Gamma\Delta$ και EZ του κύκλου (o, ρ), οπότε $OA \perp \Gamma\Delta$ και $OB \perp EZ$. Επομένως τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$, ZE του κύκλου (O, R) και είναι ίσα, αφού $OA = OB = \rho$.

Άρα οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, οπότε $\Delta\Gamma = ZE$.

β. Είναι:

- $KA = KB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $A\Gamma = BE$, ως μισά των ίσων τμημάτων $\Delta\Gamma$, ZE

Οπότε $K\Gamma = KE$, ως διαφορά ίσων τμημάτων.

62 Θέμα 2 - 13758

Έστω $R = 8$ και $\rho = 3$, οπότε $R - \rho = 8 - 3 = 5$ και $R + \rho = 8 + 3 = 11$.

α. Είναι $K\Lambda = 13$, οπότε $K\Lambda > R + \rho$, άρα ο κύκλος $(\Lambda\, ,\, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K\, ,\, 3)$.

β. Είναι $K\Lambda = 2$, οπότε $K\Lambda < R - \rho$, άρα ο κύκλος $(K\, ,\, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda\, ,\, 8)$.

γ. Είναι $K\Lambda = 5$, οπότε $K\Lambda = R - \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

δ. Είναι $K\Lambda = 11$, οπότε $K\Lambda = R + \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

ε. Είναι $K\Lambda = 9$, οπότε $R - \rho < K\Lambda < R + \rho$, άρα οι κύκλοι τέμνονται.

63 Θέμα 2 - 13757

Έστω $R = 5$ και $\rho = 2$.

α. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε :

$K\Lambda = R + \rho = 5 + 2 = 7$

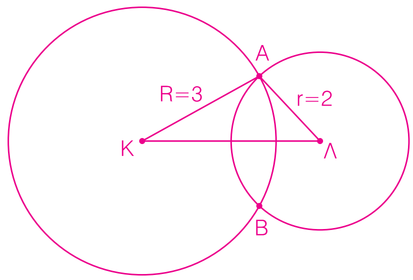
β. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε: $K\Lambda = R - \rho = 5 - 2 = 3$.

γ. Για να είναι ο κύκλος $(K\, ,\, 2)$ στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda\, ,\, 5)$ θα πρέπει

$K\Lambda < R - \rho \Leftrightarrow K\Lambda < 5 - 2 \Leftrightarrow K\Lambda < 3$

δ. Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - \rho < K\Lambda < R + \rho \Leftrightarrow 5 - 2 < K\Lambda < 5 + 2 \Leftrightarrow 3 < K\Lambda < 7$.

64 Θέμα 2 - 12417



α. Για τους κύκλους $(K\, ,\, R)$ και $(\Lambda\, ,\, r)$, έχουμε $K\Lambda = 4$, $R + r = 5$ και $R - r = 1$.

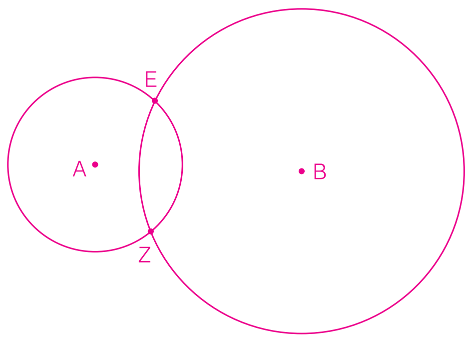
Άρα $R - r < K\Lambda < R + r$, οπότε οι κύκλοι $(K\, ,\, R)$ και $(\Lambda\, ,\, r)$ τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

β. Στο τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι $K\Lambda > AK$, αφού $K\Lambda = 4$ και $AK = R = 3$.

Οπότε, οι απέναντι γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $A\hat{\Lambda}K$ των άνισων πλευρών $K\Lambda$ και AK αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες.

Δηλαδή, $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

65 Θέμα 2 - 13836



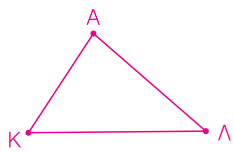
α. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα

$$R - \rho < AB < R + \rho \Leftrightarrow B\Delta - A\Gamma < AB < B\Delta + A\Gamma .$$

β. Ο θησαυρός είναι σημείο του κύκλου (A, ρ) και του κύκλου (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Είναι
$AB = 6$, $R - \rho = 2$ και $R + \rho = 8$, οπότε $R - \rho < AB < R + \rho$.

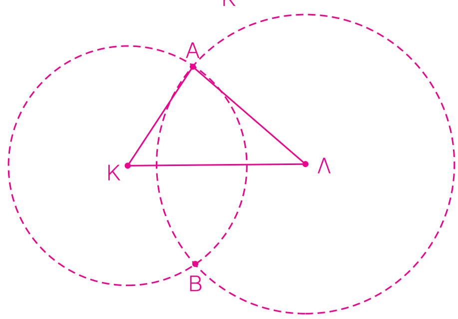
Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.

66 Θέμα 2 - 13835



α. Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

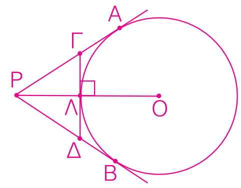
$A\Lambda - AK < K\Lambda < A\Lambda + AK \Leftrightarrow 5 - 4 < K\Lambda < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < K\Lambda < 9$.



β. Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Από το **α.** ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

$A\Lambda - AK < K\Lambda < A\Lambda + AK$ ή $R - \rho < K\Lambda < R + \rho$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.

67 Θέμα 4 - 1752



α. Η ΡΟ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι διχοτόμος της $\text{Α}\hat{\text{Ρ}}\text{Β}$.
Η ακτίνα ΟΛ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΓΔ , άρα $\text{ΟΛ} \perp \text{ΓΔ}$, οπότε $\text{ΟΡ} \perp \text{ΓΔ}$.
Στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος του, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Είναι:
- $\text{ΡΑ} = \text{ΡΒ}$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $\text{ΡΓ} = \text{ΡΔ}$, αφού το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές

Οπότε και $\text{ΑΓ} = \text{ΒΔ}$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

γ. Είναι $\text{ΓΑ} = \text{ΓΛ}$ και $\text{ΔΒ} = \text{ΔΛ}$, ως εφαπτόμενα τμήματα.
Η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι $\Pi = \text{ΡΓ} + \text{ΡΔ} + \text{ΓΔ} = \text{ΡΓ} + \text{ΡΔ} + \text{ΓΛ} + \text{ΛΔ} = \text{ΡΓ} + \text{ΡΔ} + \text{ΓΑ} + \text{ΔΒ} = \text{ΡΑ} + \text{ΡΒ}$.

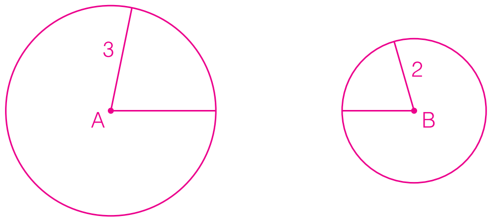
68 Θέμα 4 - 13823

α. i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα $R - \rho < \delta < R + \rho \Leftrightarrow \text{ΒΚ} - \text{ΑΓ} < \text{ΑΒ} < \text{ΒΚ} + \text{ΑΓ}$.

ii. Το σημείο Κ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου $(\text{Β}\ ,\ R)$ και όχι του κύκλου $(\text{Α}\ ,\ \rho)$.

Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το Α και R από το Β.



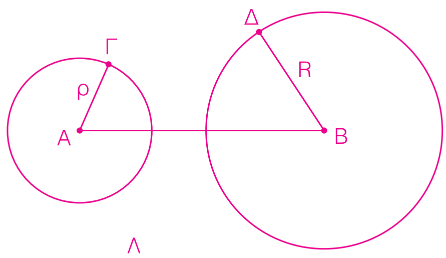
β. Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.

Το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2 , οπότε θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.

Είναι $\text{ΑΒ} = 6$, $R + \rho = 5$, οπότε $\text{ΑΒ} > R + \rho$. Άρα οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

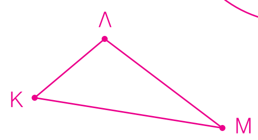
Επομένως η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

69 Θέμα 4 - 13846



α. Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου άρα $R + \rho < \text{ΑΒ} \Leftrightarrow R + \rho < 9$.

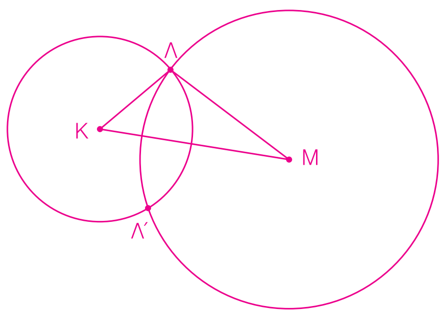
β. Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ = ρ και ΒΔ = Κ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.



Από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι

$\text{ΛΜ} - \text{ΚΛ} < \text{ΚΜ} < \text{ΛΜ} + \text{ΚΛ} \Rightarrow R - \rho < \text{ΚΜ} < R + \rho \Rightarrow \text{ΚΜ} < 9$.

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.



γ. Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Είναι R – ρ < ΚΜ < R + ρ, επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (Κ, ρ) και (Μ, R), δηλαδή τα Λ και Λ'.

70 Θέμα 2 - 1544

α. Επειδή $\text{ΕΖ} // \text{ΒΓ}$, έχουμε $\hat{\text{Β}} = \text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Α}$ και $\hat{\Gamma} = \text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη .

Είναι $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Α} = \text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$. Άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ έχουν:
- $AE = AZ$, αφού το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές
- $A\Delta$ κοινή
- $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}Z$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

71 Θέμα 2 - 1595

α. Είναι $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$, οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

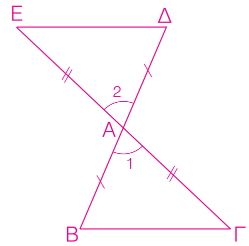
β. • Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.
Είναι $\Gamma x \perp B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$, οπότε $\Gamma x // AM$.

Επομένως $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}M$, ως εντός εναλλάξ.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

Άρα $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

72 Θέμα 2 - 1597

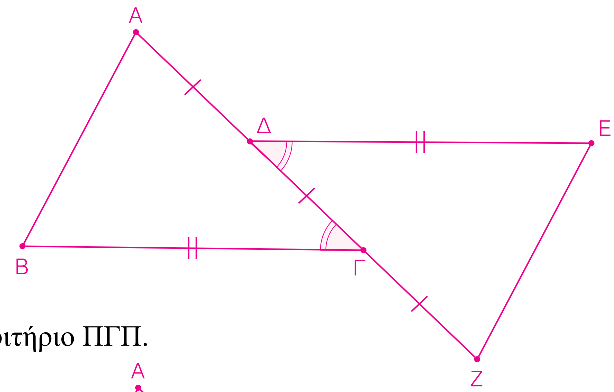


α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:
- $AB = A\Delta$
- $A\Gamma = AE$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, προκύπτει $E\Delta // B\Gamma$.

73 Θέμα 2 - 13748



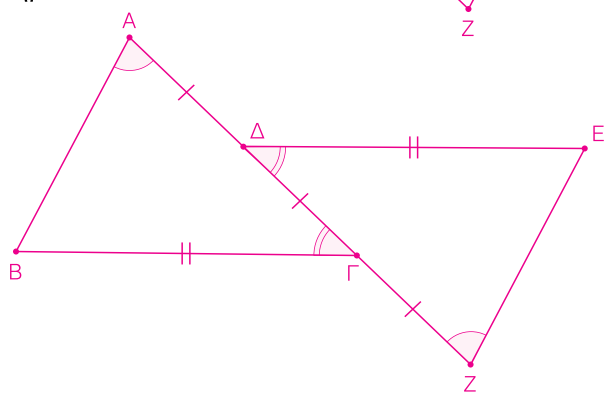
α. Είναι $\Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z = 2\Delta\Gamma = A\Gamma$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ έχουν:
- $B\Gamma = \Delta E$,
- $A\Gamma = \Delta Z$,
- $A\hat{\Gamma}B = Z\hat{\Delta}E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία
και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει
ότι $B\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Delta$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των AB και EZ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα $AB // EZ$.



74 Θέμα 2 - 12710

α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, οπότε $BE \perp A\Gamma$.

Το τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A , οπότε $A\Delta \perp A\Gamma$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $A\Delta$ είναι κάθετα στην ΑΓ, οπότε $BE // A\Delta$.

β. Είναι $E\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και $A\Delta$ που τέμνονται από την ΒΔ.

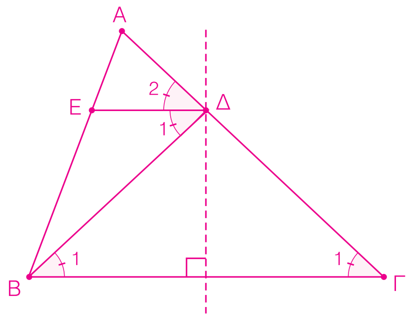
γ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ έχουμε $A\Gamma = A\Delta$.

Οπότε $AB = A\Delta$, επομένως το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

75 Θέμα 2 - 13534

α. Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $\Delta B = \Delta\Gamma$. Επομένως το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι:



- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1), ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $B\Gamma\Delta$.
- $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2), ως εντός εναλλάξ γωνίες
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$ (3), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

76 Θέμα 2 - 1620

α. Είναι:
- $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $MA = M\Gamma$, από υπόθεση

Οπότε $MB = M\Gamma$.

β. • Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{M}B$, οπότε $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$.
Είναι $\Gamma\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}O$, ως κατακορυφήν.
Άρα $\Gamma\hat{M}\Delta = B\hat{M}O$.

• Τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ έχουν:
- $OM = M\Delta$
- $MB = M\Gamma$
- $B\hat{M}O = \Gamma\hat{M}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

77 Θέμα 4 - 1744

α. Είναι:
- $A\hat{Z}H = \hat{B}$ και $A\hat{H}Z = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού $AB = A\Gamma$

Οπότε $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$.
Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με $AZ = AH$.
Επομένως $BZ = \Gamma H$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

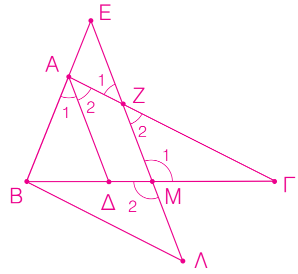
β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{A}$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $Z\hat{B}\Theta = H\hat{\Gamma}K$.
Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ έχουν:
- $ZB = H\Gamma$
- $Z\hat{B}\Theta = H\hat{\Gamma}K$
- $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$, ως παραπληρωματική ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα $ZB\Theta$, $HK\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $Z\Theta = KH$.
Οπότε $ZK = Z\Theta + \Theta K = KH + \Theta K = H\Theta$.

78 Θέμα 4 - 1818



α. Είναι $\widehat{A}_1 = A_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος.

Έχουμε:
- $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\widehat{A}_2 = \widehat{Z}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\widehat{E} = \widehat{Z}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\widehat{E} = Z_1$ και $\widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_2$ άρα $\widehat{E} = \widehat{Z}_2$
- $\widehat{Z}_2 = \widehat{\Lambda}$, ως εντός εναλλάξ

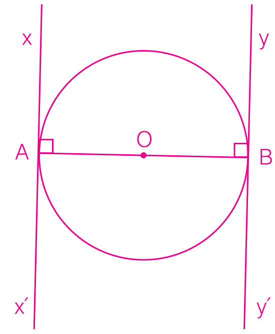
Οπότε $\widehat{E} = \widehat{\Lambda}$, άρα το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα ΒΜΛ , ΜΓΖ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
- $\widehat{\Gamma} = M\widehat{B}\Lambda$, ως εντός εναλλάξ

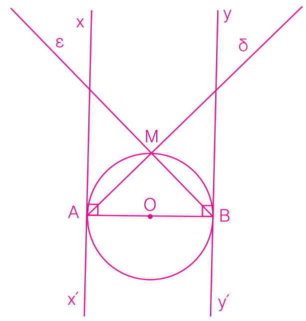
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $B\Lambda = \Gamma Z$.

γ. Είναι $AE \overset{\alpha.}{=} AZ = A\Gamma - \Gamma Z \overset{\beta.}{=} A\Gamma - B\Lambda$.

79 Θέμα 4 - 13843



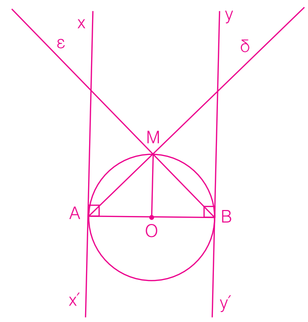
α. Οι ευθείες x'x και y'y εφάπτονται στον κύκλο (Ο, R) στα άκρα της διαμέτρου του ΑΒ, επομένως, είναι κάθετες στην ΑΒ και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



β. Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°.

Είναι $B\widehat{A}\delta + A\widehat{B}\varepsilon = \dfrac{90^o}{2} + \dfrac{90^o}{2} = 90^o < 180^o$.

Άρα, οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

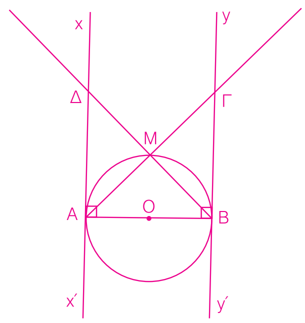


γ. Είναι $B\widehat{A}M = 45^o$ και $A\widehat{B}M = 45^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ.

Άρα, το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ, οπότε $A\widehat{O}M = 90^o$. Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε $O\widehat{A}M = 45^o$ επομένως, $O\widehat{M}A = 90^o - 45^o = 45^o$.

Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R.

Επομένως, το Μ είναι σημείο του κύκλου (O,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ έχουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

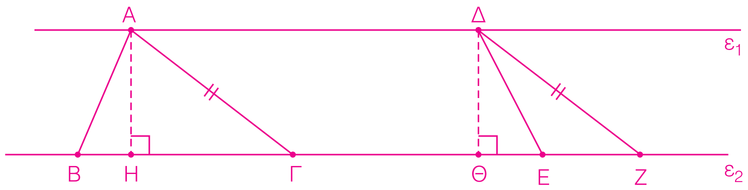


δ. Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν:

- $AM = BM$
- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}\Gamma = 45^o$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = M\Gamma$.

80 Θέμα 4 - 13751



α. i. Έστω AH το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $\Delta\Theta$ το ύψος του τριγώνου ΔEZ.

ii. Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$, έχουν:

- $AH = \Delta\Theta$, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- $A\Gamma = \Delta Z$,
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Οπότε $H\Gamma = \Theta Z$.

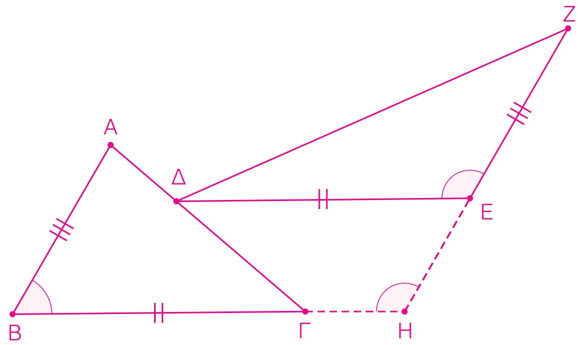
β. Το σημείο H είναι εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $H\Gamma < B\Gamma$.

Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος EZ γιατί η γωνία $\hat{E}$ είναι αμβλεία, οπότε $EZ < \Theta Z$.

Από το **α. ii.** ερώτημα έχουμε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

Άρα $EZ < \Theta Z$, $\Theta Z = H\Gamma$ και $H\Gamma < B\Gamma$, επομένως $EZ < B\Gamma$.

81 Θέμα 4 - 13752



α. 1. Σ **2.** Λ **3.** Λ **4.** Λ

β. Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την ZE και τη $B\Gamma$ και έστω H το σημείο τομής τους. Τότε:

- $Z\hat{E}\Delta = E\hat{H}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
- $E\hat{H}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 180^\circ$, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά.

Άρα $Z\hat{E}\Delta + A\hat{B}\Gamma = 180^\circ$ και αφού $\hat{B} < 90^\circ$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^\circ$. Άρα οι γωνίες δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔE , $B\Gamma$ και τις ZE , AB , αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές.

γ. Είναι $Z\hat{E}\Delta + \hat{B} = 180^\circ$

- Αν $\hat{B} < 90^\circ$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες.

Δηλαδή, αφού $\hat{B} < Z\hat{E}\Delta$, τότε $A\Gamma < \Delta Z$.

- Αν $\hat{B} > 90^\circ$, τότε $Z\hat{E}\Delta < 90^\circ$, οπότε $\hat{B} > Z\hat{E}\Delta$, άρα $A\Gamma > \Delta Z$.
- Αν $\hat{B} = 90^\circ$, τότε και $Z\hat{E}\Delta = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα, άρα $A\Gamma = \Delta Z$.

Επομένως, είναι $\Delta Z = A\Gamma$, όταν $Z\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$.

82 Θέμα 4 - 13822

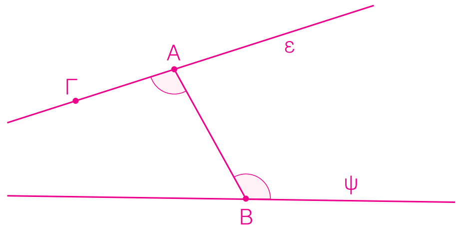
α. i. Είναι $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$ και $A\hat{B}\psi < B\hat{A}\Gamma$, οπότε $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma \Leftrightarrow B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$.

ii. Οι γωνίες $B\hat{A}\varepsilon$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την AB και επειδή $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος που βρίσκεται η $A\hat{B}\psi$.

β. Στο α. αποδείξαμε ότι: αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

γ. Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και εναλλάξ και $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$.

Άρα οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος της $B\hat{A}\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



83 Θέμα 2 - 1700

α. Είναι $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{A} = \hat{B}$, άρα το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές.

β. Από το τρίγωνο ΑΕΔ, έχουμε $A\hat{E}\Delta = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$.

84 Θέμα 2 - 13535

α. Είναι: • $\hat{A} = 38^\circ$, ως εντός εναλλάξ γωνίες

• $\hat{B} + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 71^\circ$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 109^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 71^\circ$

β. Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 71^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι ΑΓ, ΑΒ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

85 Θέμα 2 - 12704

α. Έχουμε $A\Delta = AB$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με:

$\hat{B} = A\hat{\Delta}B \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B = 70^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι:

$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 40^\circ$

β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta + B\hat{A}\Delta = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

γ. Είναι $A\hat{\Gamma}B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_{εξ.}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 70^\circ$.

Άρα $B\hat{A}\Gamma = 70^\circ = A\hat{B}\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

86 Θέμα 2 - 12707

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 55^\circ$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 55^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε

$\hat{B} + B\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + 35^\circ + Z\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}B = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}B = 90^\circ$

γ. Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΖΕ. Επομένως,

$\hat{A} = A\hat{E}Z + A\hat{Z}E \Leftrightarrow 70^o = A\hat{E}Z + 35^o \Leftrightarrow A\hat{E}Z = 35^o$

Άρα $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

87 Θέμα 2 - 13741

α. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτα, οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^o$.

β. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^o$, οπότε $\hat{\Gamma} = 180^o - 120^o = 60^o$.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά , οπότε

$\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180^o - 60^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 120^o$

Η γωνία $\hat{A}$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha} = 76^o$, οπότε

$\hat{A} + \hat{\alpha} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 76^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 180^o - 76^o \Leftrightarrow \hat{A} = 104^o$.

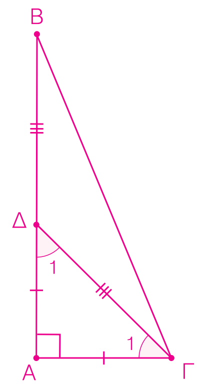
γ. Στο τρίγωνο $EA\Delta$ εχουμε $\hat{\alpha} = 76^o$.

Είναι: • $A\hat{\Delta}E + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 180^o - 120^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 60^o$.

• $A\hat{\Delta}E + \hat{\alpha} + \hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + 76^o + \hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 136^o + \hat{E} = 180^o \Leftrightarrow \hat{E} = 180^o - 136^o \Leftrightarrow \hat{E} = 44^o$.

88 Θέμα 2 - 13442

α. Έστω $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}\Gamma$. Έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.



Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma\Delta$ είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 45^o$$

β. Έχουμε $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ άρα

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 \Leftrightarrow 45^o = \hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 45^o \Leftrightarrow \hat{B} = 22{,}5^o$.

89 Θέμα 2 - 13654

α. Για τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει:

• $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B + 50^o + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Gamma}B = 40^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B = 20^o$

Επομένως $A\hat{B}\Gamma = 20^o + 50^o = 70^o$.

β. Είναι

$\Delta\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 70^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 110^o$.

Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ ισχύει:

$\Gamma\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 110^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 50^o - 110^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$

Αφού $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, έχουμε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

90 Θέμα 2 - 12709

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A}=90^o$, $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{B}=90^o \Leftrightarrow 2\hat{B}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=45^o$, οπότε και $\hat{\Gamma}=45^o$.

β. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο οπότε $ΑΓ = ΑΔ = ΔΓ$.

Έχουμε $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΓ = ΑΔ$, οπότε $ΑΒ = ΑΔ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο έχουμε $Δ\hat{A}Γ = 60^o$.

Οπότε $Β\hat{A}Δ = Β\hat{A}Γ + Δ\hat{A}Γ = 90^o + 60^o = 150^o$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $Α\hat{B}Δ = Α\hat{Δ}Β$ και

$Α\hat{B}Δ + Α\hat{Δ}Β + Β\hat{A}Δ = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{B}Δ + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{B}Δ = 30^o \Leftrightarrow Α\hat{B}Δ = 15^o$.

91 Θέμα 2 13687

α. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές $ΟΑ = ΟΒ = R$, οπότε

$Ο\hat{A}Β = Ο\hat{B}Α$

Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$\hat{O} + Ο\hat{A}Β + Ο\hat{B}Α = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2Ο\hat{A}Β = 180^o \Leftrightarrow 2Ο\hat{A}Β = 140^o \Leftrightarrow Ο\hat{A}Β = 70^o$ και $Ο\hat{B}Α = 70^o$.

β. Είναι $ΟΓ = ΟΔ$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού

$$ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R \quad \text{και} \quad ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R$$

Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$\hat{O} + Ο\hat{Γ}Δ + Ο\hat{Δ}Γ = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2Ο\hat{Γ}Δ = 180^o \Leftrightarrow 2Ο\hat{Γ}Δ = 140^o \Leftrightarrow Ο\hat{Γ}Δ = 70^o$ και $Ο\hat{Δ}Γ = 70^o$.

γ. Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $Ο\hat{A}Β$ και $Ο\hat{Γ}Δ$ ίσες. Επομένως, $ΑΒ // ΓΔ$.

92 Θέμα 2 - 1645

α. Είναι $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$, οπότε $3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=2\hat{B} \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B}=2\hat{\Gamma}$.

Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}+2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 6\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^o$.

Οπότε $\hat{B}=2\cdot 30^o = 60^o$.

β. Είναι $\hat{\Gamma}=30^o$ και $Ε\hat{B}Α = \frac{\hat{B}}{2} = 30^o$.

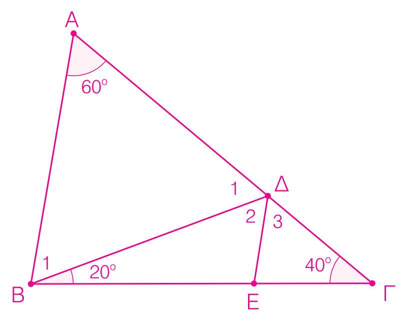
Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $Δ\hat{A}Γ = 90^o - \hat{\Gamma} = 60^o$.

Στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $Α\hat{E}Β + \hat{A} + Ε\hat{B}Α = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{E}Β + 90^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{E}Β = 60^o$.

Στο τρίγωνο ΑΕΖ είναι $Α\hat{Z}Ε + Ζ\hat{A}Ε + Α\hat{E}Ζ = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Z}Ε + 60^o + 60^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{E}Ζ = 60^o$.

Άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

93 Θέμα 2 - 13443



α. Η γωνία $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα

$\hat{Δ}_1 = Γ\hat{B}Δ + \hat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

Οπότε οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{Δ}_1$ του τριγώνου ΑΒΔ είναι 60^o .

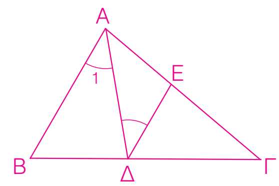
Επομένως και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

β. i. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ γωνίες και $\hat{B}_1 = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 60^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}E = 60^o$.

ii. Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και $\hat{A} = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_3 = 60^o$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^o$, η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

94 Θέμα 2 - 1623

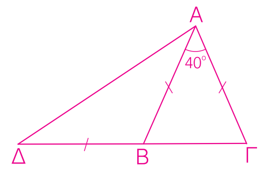


α. Είναι:
- $\hat{B} = 20^o + \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 80^o + 20^o + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^o$

Οπότε $\hat{B} = 20^o + 40^o = 60^o$.

β. Είναι:
- $\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{80^o}{2} = 40^o$
- $A\hat{\Delta}E = \hat{A}_1 = 40^o$, ως εντός εναλλάξ
- $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

95 Θέμα 2 - 1604



α. Είναι:
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^o \Leftrightarrow \hat{B} = 70^o$

Οπότε $\hat{\Gamma} = 70^o$.

β. Είναι:
- $\Delta\hat{A}B = \hat{\Delta}$, αφού $AB = B\Delta$
- $A\hat{B}\Delta = 180^o - \hat{B} = 180^o - 70^o = 110^o$
- $\Delta\hat{A}B + \hat{\Delta} + A\hat{B}\Delta = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B + \Delta\hat{A}B + 110^o = 180^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{A}B = 70^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B = 35^o$

Οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 40^o + 35^o = 75^o$.

96 Θέμα 2 - 1602

α. Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^o \Leftrightarrow \hat{B} = 65^o$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^o$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΔ είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 65^o$ και

$\Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 65^o + 65^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 50^o$.

Άρα $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A}$.

97 Θέμα 2 - 1593

α. Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $KB = K\Gamma$
- ΑΚ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

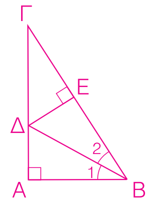
β. Είναι:
- ΑΚ διχοτόμος, άρα $B\hat{A}K = \dfrac{\hat{A}}{2} = 40^o$
- $KA = KB$, άρα $A\hat{B}K = B\hat{A}K = 40^o$
- $KA = K\Gamma$, άρα $A\hat{\Gamma}K = K\hat{A}\Gamma = 40^o$

γ. Στο τρίγωνο ΑΚΒ είναι $A\hat{K}B = 180^o - 40^o - 40^o = 100^o$.

Στο τρίγωνο ΑΚΓ είναι $A\hat{K}\Gamma = 180^o - 40^o - 40^o = 100^o$.

Οπότε $B\hat{K}\Gamma = 360^o - A\hat{K}B - A\hat{K}\Gamma = 360^o - 100^o - 100^o = 160^o$.

98 Θέμα 2 - 1541



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ έχουν:

- $B\Delta$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος

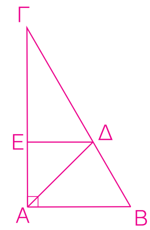
Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = AB$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ είναι ίσα, έχουμε

$$B\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}A \Rightarrow B\hat{\Delta}E = 55^{o}$$

Οπότε:
- $\Gamma\hat{\Delta}E = 180^{o} - 55^{o} - 55^{o} = 70^{o}$
- $\hat{\Gamma} = 90^{o} - \Gamma\hat{\Delta}E = 90^{o} - 70^{o} = 20^{o}$.

99 Θέμα 2 - 1693



α. Επειδή $\Delta E \,//\, AB$ και $AB \perp A\Gamma$, είναι $\Delta E \perp A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

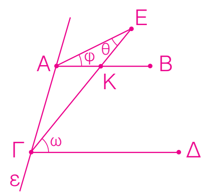
β. Είναι:
- $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}B = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{90^{o}}{2} = 45^{o}$
- $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}B = 45^{o}$, ως εντός εναλλάξ

γ. Έχουμε $\hat{B} = 20^{o} + \hat{\Gamma}$.
Είναι

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^{o} \Leftrightarrow 20^{o} + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^{o} \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^{o} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^{o}$$

Άρα $E\hat{\Delta}\Gamma = 90^{o} - \hat{\Gamma} = 90^{o} - 35^{o} = 55^{o}$.

100 Θέμα 2 - 1590



α. Έστω K το σημείο τομής της AB με την $E\Gamma$.

Είναι $\hat{\omega} = A\hat{K}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ και $A\hat{K}\Gamma = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$,

αφού η $A\hat{K}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AKE .

Οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.

β. Είναι:
- $\hat{\omega} = Z\hat{E}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{\varphi} = A\hat{E}Z$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{\theta} = Z\hat{E}\Gamma + Z\hat{E}A = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.

101 Θέμα 2 - 12708

α. Τα τρίγωνα BEH και $\Gamma Z\Delta$ έχουν:
- $BE = \Gamma Z$
- $BH = \Gamma\Delta$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^{o}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

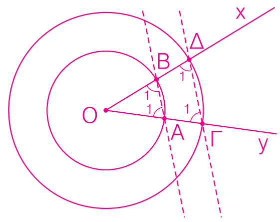
Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ) επομένως, $EH = Z\Delta$ και $BE = \Gamma Z$, οπότε $B\hat{H}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$.

β. Επειδή τα τρίγωνα BEH και $\Gamma Z\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{H} = \hat{\Delta}$.

Τα τρίγωνα $KE\Delta$ και BEH έχουν τη γωνία $\hat{E}$ κοινή και $\hat{\Delta} = \hat{H}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta\hat{K}E = \hat{B}$.

102 Θέμα 2 - 1552



Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές διότι $OA = OB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$\hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^o - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{B}_1 = 180^o - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \frac{180^o - \hat{O}}{2} \ , \ (1)$$

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι $O\Gamma = O\Delta$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ είναι $\hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^o - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = \frac{180^o - \hat{O}}{2}$, (2) .

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Αφού επιπλέον είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη, προκύπτει $AB // \Gamma\Delta$.

103 Θέμα 2 - 1594

α. i. Επειδή $\Delta E // B\Gamma$ έχουμε:

- $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ
- $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη

ii. Είναι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}B$, αφού ΔΕ διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{B}\Gamma$.

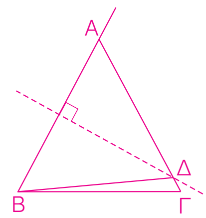
Άρα το $\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΓ , άρα $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$.

104 Θέμα 2 - 1554

α. Είναι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.



β. Είναι:
- $A\hat{\Delta}B = 80^o$
- $\Delta A = \Delta B$, αφού το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ

Οπότε $\hat{A} = A\hat{B}\Delta$.

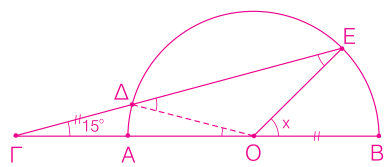
Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ είναι $\hat{A} + A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + 80^o = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{A} = 100^o \Leftrightarrow \hat{A} = 50^o$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^o \Leftrightarrow \hat{B} = 65^o$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^o$.

105 Θέμα 2 - 1576

α. Είναι $\Gamma\Delta = OB = O\Delta = OE = \rho$.



- Το τρίγωνο ΔΓΟ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}O = 15^o$.
- Στο τρίγωνο ΔΓΟ , η γωνία $O\hat{\Delta}E$ είναι εξωτερική, οπότε

$O\hat{\Delta}E = 15^o + 15^o = 30^o$.

β.
- Το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{E} = O\hat{\Delta}E = 30^o$.
- Στο τρίγωνο ΟΕΓ η $B\hat{O}E$ είναι εξωτερική, οπότε $B\hat{O}E = x = \hat{\Gamma} + \hat{E} = 15^o + 30^o = 45^o$.

106 Θέμα 2 - 1607

α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ και
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ+\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B}=140^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=70^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma}=70^\circ$.

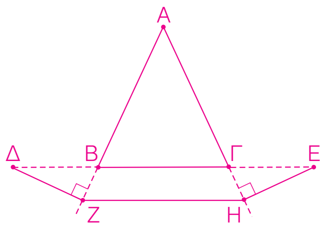
Είναι:
- $A\hat{B}\Delta=180^\circ-\hat{B}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.
- $A\hat{\Gamma}E=180^\circ-\hat{\Gamma}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- $AB=A\Gamma$
- $B\Delta=\Gamma E$
- $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Gamma}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, έχουμε $A\Delta=AE$.
Άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

107 Θέμα 2 - 1572



α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.
i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ έχουν:
- $B\Delta=\Gamma E$
- $\Delta\hat{B}Z=H\hat{\Gamma}E$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

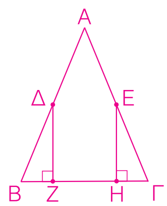
Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ=\Gamma H$.

ii. Είναι $AZ=AB+BZ\overset{\alpha.i.}{=}A\Gamma+\Gamma H=AH$.
Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Z}=\hat{H}$.
Στο τρίγωνο ΑΖΗ είναι $\hat{A}+\hat{Z}+\hat{H}=180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ+\hat{Z}+\hat{Z}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Z}=130^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}=65^\circ$.

Οπότε και $\hat{H}=65^\circ$.

108 Θέμα 2 - 1699



α. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και $\Delta Z\perp B\Gamma$, $EH\perp B\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ έχουν:
- $\Delta B=E\Gamma$
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta Z=EH$.

β. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ+\hat{B}+\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B}=105^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=35^\circ$.

Οπότε $\hat{\Gamma}=\hat{B}=35^\circ$ και $\hat{A}=75^\circ+\hat{B}=75^\circ+35^\circ=110^\circ$.

109 Θέμα 2 - 1636

α. Η ΡΟ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{P}$.
Η ακτίνα ΟΜ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΔΓ, οπότε $OM\perp\Delta\Gamma$.
Στο τρίγωνο ΡΔΓ η ΡΜ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $OA\perp AP$ και $OB\perp BP$, οπότε $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$.
Στο τετράπλευρο ΟΑΡΒ είναι

$$\hat{O}+\hat{A}+\hat{P}+\hat{B}=360^\circ \Leftrightarrow \hat{O}+90^\circ+40^\circ+90^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{O}+220^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{O}=140^\circ.$$

110 Θέμα 2 - 1639

α. • Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι $\hat{Ε}=90^\circ-\hat{Δ}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Γ}=90^\circ-\hat{Β}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

• Στο τετράπλευρο $ΑΕΖΓ$ είναι

$\widehat{Α}+\widehat{Ε}+\widehat{Ζ}+\widehat{Γ}=360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+60^\circ+\widehat{Ζ}+60^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \widehat{Ζ}+210^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{Ζ}=360^\circ-210^\circ \Leftrightarrow \hat{Ζ}=150^\circ$.

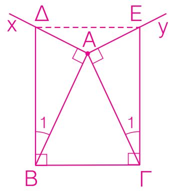
β. • Είναι $\hat{Δ}=30^\circ$ και $Ε\hat{Ζ}Γ+Δ\hat{Ζ}Γ=180^\circ \Leftrightarrow 150^\circ+Δ\hat{Ζ}Γ=180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Ζ}Γ=30^\circ$.

Άρα $\hat{Δ}=Δ\hat{Ζ}Γ$, οπότε το τρίγωνο $ΓΖΔ$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $Ε\hat{Ζ}Β=Γ\hat{Ζ}Δ=30^\circ$ και $\hat{Β}=30^\circ$, οπότε $Ε\hat{Ζ}Β=\hat{Β}$.

Άρα το τρίγωνο $ΕΒΖ$ είναι ισοσκελές.

111 Θέμα 2 - 1556



α. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Β}=\hat{Γ}$.

Άρα $\hat{Β}_1=\hat{Γ}_1$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν: • $ΑΒ=ΑΓ$

• $\hat{Β}_1=\hat{Γ}_1$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΔ=ΓΕ$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα , έχουμε $ΑΔ=ΑΕ$, οπότε $Α\hat{Δ}Ε=Δ\hat{Ε}Α$.

Είναι $Δ\hat{Α}Ε=360^\circ-Β\hat{Α}Γ-Δ\hat{Α}Β-Ε\hat{Α}Γ=360^\circ-80^\circ-90^\circ-90^\circ=100^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι $Δ\hat{Α}Ε+Α\hat{Δ}Ε+Δ\hat{Ε}Α=180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ+Α\hat{Δ}Ε+Α\hat{Δ}Ε=180^\circ \Leftrightarrow 2Α\hat{Δ}Ε=80^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Ε=40^\circ$.

Οπότε και $Α\hat{Ε}Δ=40^\circ$.

112 Θέμα 2 - 1641

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΕ$ έχουν:

• $ΑΔ=ΒΓ$

• $ΑΓ=ΒΕ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΓΔ$, $ΒΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε:

• $Α\hat{Δ}Γ=Ε\hat{Γ}Β=40^\circ$

• $ΓΔ=ΓΕ$

Οπότε το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι $Α\hat{Δ}Γ+Α\hat{Γ}Δ=90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ+Α\hat{Γ}Δ=90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ=50^\circ$.

Είναι $Δ\hat{Γ}Α+Ε\hat{Γ}Β+Δ\hat{Γ}Ε=180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ+40^\circ+Δ\hat{Γ}Ε=180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Γ}Ε=90^\circ$.

Άρα το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

113 Θέμα 2 - 1661

α. Επειδή $ΑΒ=ΑΓ$, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος $ΑΔ$ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι $Δ\hat{Α}Γ=Β\hat{Α}Δ=30^\circ$, οπότε $\hat{Α}=60^\circ$.

Είναι $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+\hat{Β}+\hat{Β}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β}=120^\circ \Leftrightarrow \hat{Β}=60^\circ$.

Οπότε και $\hat{Γ}=60^\circ$.

Για το τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Γ}=60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

β. Επειδή $ΑΔ=ΑΕ$ το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Δ}Ε=Α\hat{Ε}Δ$.

Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ έχουμε:

$Δ\hat{Α}Ε+Α\hat{Δ}Ε+Α\hat{Ε}Δ=180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ+2Α\hat{Δ}Ε=180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Ε=75^\circ$, οπότε και $Α\hat{Ε}Δ=75^\circ$.

γ. Είναι $Ε\hat{Δ}Γ=Α\hat{Δ}Γ-Α\hat{Δ}Ε=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

114 Θέμα 2 - 1640

α. • Επειδή $A\Delta = AZ$, έχουμε $\hat{\Delta} = \Delta\hat{Z}A$.

Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, είναι: $\hat{A} + \hat{\Delta} + \Delta\hat{Z}A = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 55^\circ$.

Οπότε $\Delta\hat{Z}A = \hat{\Delta} = 55^\circ$.

• Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 110^\circ$.

• Επειδή $BE = BZ$, έχουμε $E\hat{Z}B = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο BEZ , είναι $\hat{B} + \hat{E} + E\hat{Z}B = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 35^\circ$.

Οπότε $E\hat{Z}B = \hat{E} = 35^\circ$.

β. Είναι $\Delta\hat{Z}E = 180^\circ - \Delta\hat{Z}A - E\hat{Z}B = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.

115 Θέμα 2 - 1689

α. Είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\Delta\hat{A}E = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\hat{\Delta}E = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε $A\hat{\Delta}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E = 60^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

Οπότε και $\hat{E} = 30^\circ$.

β. Είναι $A\hat{\Delta}E = Z\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$, ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ έχουμε $Z\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

116 Θέμα 2 - 1603

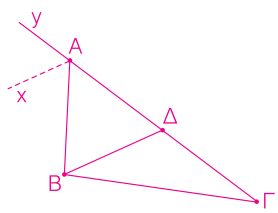
α. Στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι $\hat{E} = 90^\circ$ και $E\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 50^\circ$.

Είναι $A\hat{\Delta}E = 180^\circ - E\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Οπότε στο $A\Delta EB$ έχουμε $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ και $\hat{\Delta} = 130^\circ$.

117 Θέμα 2 - 1596



α. i. Είναι $A\hat{B}\Delta = B\hat{A}x = \dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, ως εντός εναλλάξ.

ii. Είναι $B\hat{A}\Delta = 180^\circ - \hat{A}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

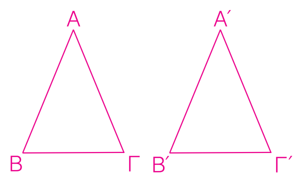
$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + A\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B = 60^\circ$

Άρα $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι $A\Gamma - AB = A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$.

β. Είναι:
- $B\hat{\Delta}A = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$
- $A\hat{\Delta}B = 60^\circ$, οπότε $B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ - B\hat{\Delta}\Gamma - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

118 Θέμα 2 - 1565



α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:
- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}' = \hat{\Gamma}'$.

Επειδή $\hat{B} = \hat{B}'$, έχουμε $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{A}'$.
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

119 Θέμα 2 - 14884

α. Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ έχουν:
- $AE = AB$
- $AZ = A\Delta$
- $E\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Είναι:
- $\Delta\hat{A}B + B\hat{A}E = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, οπότε τα Δ, A και E είναι συνευθειακά.
- $B\hat{E}A = 60^\circ$ και $Z\hat{\Delta}A = 60^\circ$, οπότε $B\hat{E}A = Z\hat{\Delta}A$.

Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες $B\hat{E}\Delta$ και $Z\hat{\Delta}E$ είναι ίσες, έχουμε $EB // Z\Delta$.

120 Θέμα 2 - 1851

α. Είναι $\hat{B}_1 = 70^\circ$ και $2\Gamma\hat{E}B = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{E}B = 35^\circ$.

Η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ άρα $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 70^\circ$.

Η γωνία $\hat{B}_2$ είναι η εξωτερική του τριγώνου $EB\Gamma$, άρα $\hat{B}_2 = E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{E}B \Leftrightarrow 70^\circ = E\hat{\Gamma}B + 35^\circ \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}B = 35^\circ$.
Δηλαδή $E\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{E}B = 35^\circ$, άρα το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

β.
- Η BE είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 2\hat{B}_1 = 2\cdot 70^\circ = 140^\circ$, οπότε $B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
- Η ΓE διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} = 2E\hat{\Gamma}B = 70^\circ$.
- Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ$.

121 Θέμα 2 - 12640

α. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι $2\cdot\nu - 4$ ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ είναι:

$$(2\nu - 4)\cdot 90^\circ = (2\cdot 5 - 4)\cdot 90^\circ = 6\cdot 90^\circ = 540^\circ$$

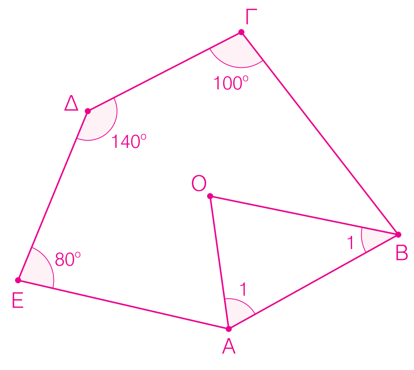
Δηλαδή έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 220^\circ$

β. Στο τρίγωνο AOB είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ (1).

Όμως AO και BO είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}. \text{ Έτσι } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \overset{\alpha.}{=} \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

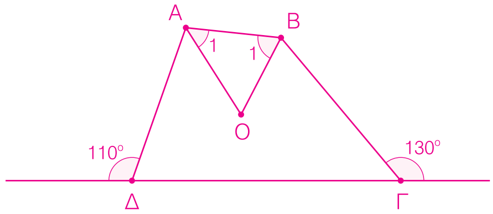
Οπότε η (1) $\Leftrightarrow 110^\circ + \hat{O} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 70^\circ$, δηλαδή $A\hat{O}B = 70^\circ$.



122 Θέμα 2 - 12644

α. Είναι:
- $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi.} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + 130^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 50^\circ$
- $\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi.} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 70^\circ$

β. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 240^\circ$.



γ. Στο τρίγωνο AOB είναι: $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}=180^\circ$ (1).

Οι AO και BO είναι διχοτόμοι των γωνιών A και B αντίστοιχα,

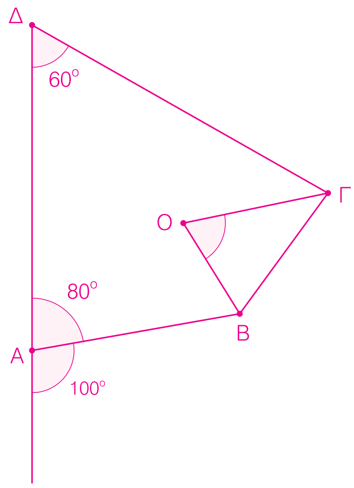
άρα: $\hat{A}_1=\dfrac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1=\dfrac{\hat{B}}{2}$.

Οπότε $\hat{A}_1+\hat{B}_1=\dfrac{\hat{A}}{2}+\dfrac{\hat{B}}{2}=\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\dfrac{240^\circ}{2}=120^\circ$.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow 120^\circ+\hat{O}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}=60^\circ$.

Δηλαδή $A\hat{O}B=60^\circ$.

123 Θέμα 2 - 13619



α. • Είναι: $\hat{A}_{\varepsilon\xi}+\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ+\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=80^\circ$

• Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ+220^\circ+\hat{\Delta}=360^\circ$

$\Leftrightarrow \hat{\Delta}=360^\circ-80^\circ-220^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^\circ$

β. Στο τρίγωνο $B\Gamma O$ ισχύει:

$$O\hat{B}\Gamma+B\hat{\Gamma}O+B\hat{O}\Gamma=180^\circ \ , \ (1)$$

Είναι $O\hat{B}\Gamma+B\hat{\Gamma}O=\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}=\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=\dfrac{220^\circ}{2}=110^\circ$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow 110^\circ+B\hat{O}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma=70^\circ$.

124 Θέμα 2 - 13749

α. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{\alpha}+130^\circ+65^\circ+85^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha}=360^\circ-280^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha}=80^\circ$.

β. Είναι $24^\circ+\hat{\omega}+\hat{\alpha}=180^\circ \Leftrightarrow 24^\circ+\hat{\omega}+80^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega}=76^\circ$

γ. Είναι: • $A\Delta=AE$ άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά $E\Delta$, οπότε $\hat{\varphi}=A\hat{\Delta}E$.

• $\varphi+A\hat{\Delta}E+\omega=180^\circ \Leftrightarrow \varphi+\varphi+76^\circ=180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi=180^\circ-76^\circ \Leftrightarrow 2\varphi=104^\circ \Leftrightarrow \varphi=52^\circ$

125 Θέμα 4 - 1708

α. i. Στο τρίγωνο ABE, το $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{E}B=\hat{B}=50^\circ$.

Είναι $E\hat{A}B+\hat{B}+A\hat{E}B=180^\circ \Leftrightarrow E\hat{A}B+50^\circ+50^\circ=180^\circ \Leftrightarrow E\hat{A}B=80^\circ$.

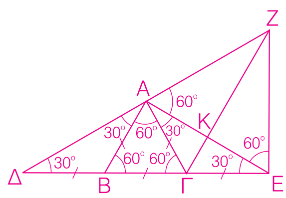
Οπότε $\Gamma\hat{A}E=\Gamma\hat{A}B-E\hat{A}B=90^\circ-80^\circ=10^\circ$.

β. Είναι:
- $\hat{Z}=90^\circ$
- $Z\hat{E}\Gamma=A\hat{E}B=50^\circ$
- $Z\hat{\Gamma}E+\hat{Z}+Z\hat{E}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E+90^\circ+50^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E=40^\circ$

126 Θέμα 4 - 1819

α. Είναι $AB=B\Gamma=\Gamma A=B\Delta=\Gamma E$.
Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΓAE και $B\Delta A$ έχουμε αντίστοιχα:

- $A\hat{\Gamma}E=180^\circ-60^\circ=120^\circ$



- $\hat{\Gamma A E} = \hat{A E \Gamma} = \frac{180^o - 120^o}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$
- $\hat{AB\Delta} = 180^o - 60^o = 120^o$
- $\hat{BA\Delta} = \hat{B\Delta A} = \frac{180^o - 120^o}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$

β. Είναι:
- $Z\hat{A}E = 180^o - \Delta\hat{A}E = 180^o - 120^o = 60^o$
- $A\hat{E}Z = 90^o - 30^o = 60^o$

Οπότε $Z\hat{A}E = A\hat{E}Z$, άρα $ZA = ZE$.

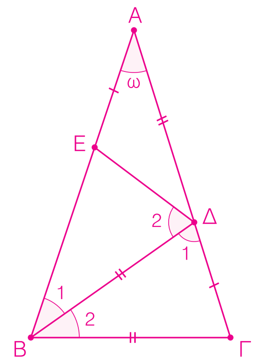
Επειδή $ZA = ZE$ και $\Gamma A = \Gamma E$ τα Γ, Z ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE.

Άρα η ΓZ είναι η μεσοκάθετος του AE.

γ. Είναι:
- $\Gamma Z \perp AE$, αφού η ΓZ μεσοκάθετη του AE
- $B\hat{A}E = 60^o + 30^o = 90^o$, άρα $BA \perp AE$

Επομένως $AB // \Gamma Z$.

127 Θέμα 4 - 13537



α. Έστω $\hat{A} = \omega$ (1).

i. Είναι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB και $\hat{B}_1 = \omega$ (2).

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα είναι

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A} = \omega + \omega = 2\omega$ (3).

Είναι $B\Gamma = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$ και

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\omega \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\hat{A}$.

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\omega$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^o \Leftrightarrow 5\omega = 180^o \Leftrightarrow \omega = 36^o$.

Άρα $\hat{A} = 36^o$.

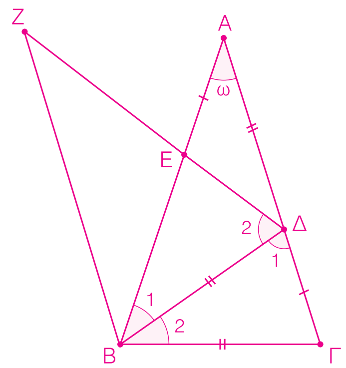
iii. Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές θα αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$.

Είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$.

Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta = B\Delta$
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, αφού $\hat{B}_1 = \omega = 36^o$ και $\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^o$

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $\Delta E = \Delta\Gamma$.



β. Είναι $B\Gamma = BE$, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = 72^o$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZB\Delta$ έχουν:

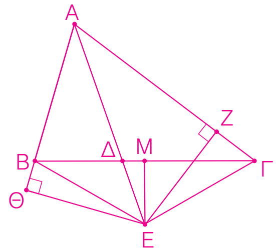
- $B\Gamma = B\Delta$,
- $A\Gamma = Z\Delta$,
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$,

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

128 Θέμα 4 - 1707

α. Η ΜΕ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ, οπότε $ΕΒ = ΕΓ$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε $ΕΘ = ΕΖ$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ έχουν:



- $ΕΒ = ΕΓ$
- $ΕΘ = ΕΖ$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα, έχουμε $Α\hat{Γ}Ε = Θ\hat{Β}Ε$.

Οπότε $Α\hat{Γ}Ε + Α\hat{Β}Ε = Θ\hat{Β}Ε + Α\hat{Β}Ε = 180^o$.

129 Θέμα 4 - 1792

α. Η $Ζ\hat{Δ}Γ$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΕΔ, οπότε $Ζ\hat{Δ}Γ = Δ\hat{Ε}Α + Ε\hat{Α}Δ = 90^o + \frac{\hat{Α}}{2}$.

β. Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα είναι και διάμεσος.
Οπότε η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ.
Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΖΔ, έχουμε $ΚΖ = ΚΔ$.

γ. Στο τρίγωνο ΔΗΓ είναι $Ζ\hat{Η}Γ = 180^o - Ζ\hat{Δ}Γ - \hat{Γ} = = 180^o - (90^o + \frac{\hat{Α}}{2}) - \hat{Γ} = 180^o - 90^o - \frac{\hat{Α}}{2} - \hat{Γ}$

$$= 90^o - \frac{\hat{Α}}{2} - \hat{Γ} = \frac{180^o - \hat{Α} - 2\hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{Β} + \hat{Γ} - 2\hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$$

130 Θέμα 4 - 1828

α. • Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΓΕ είναι και διάμεσος, οπότε το Ε είναι το μέσο της ΑΒ.
Οπότε $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΒΔ = ΒΕ$.
Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

• Είναι:
- $Α\hat{Θ}Ζ = \hat{Β} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $Α\hat{Ζ}Θ = \hat{Γ} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{Α} = 60^o$

Άρα το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β. Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με $\hat{Δ} = Δ\hat{Ε}Β$ και η $\hat{Β}$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε

$\hat{Β} = \hat{Δ} + Δ\hat{Ε}Β \Leftrightarrow 60^o = \hat{Δ} + \hat{Δ} \Leftrightarrow 2\hat{Δ} = 60^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 30^o$.

Οπότε και $Δ\hat{Ε}Β = 30^o$.

Είναι:
- $Ε\hat{Θ}Ζ = 180^o - Α\hat{Θ}Ζ = 180^o - 60^o = 120^o$
- $Θ\hat{Ε}Ζ = Δ\hat{Ε}Β = 30^o$
- $Θ\hat{Ζ}Ε = \hat{Δ} = 30^o$, ως εντός εναλλάξ

γ. Επειδή:
- $Θ\hat{Ε}Ζ = Θ\hat{Ζ}Ε$ το τρίγωνο ΘΕΖ είναι ισοσκελές, οπότε $ΘΖ = ΘΕ$
- $ΑΘ = ΘΖ$, αφού το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο έχουμε $ΑΘ = ΘΕ$

Άρα $ΑΕ = ΑΘ + ΘΕ = 2ΑΘ = 2ΘΖ$.

δ. Είναι:
- $ΑΒ = 2ΑΕ = 2 \cdot 2ΘΕ = 4ΘΕ$, άρα $3ΑΒ = 12ΘΕ$
- $ΘΒ = ΕΘ + ΕΒ = ΕΘ + ΑΕ = 3ΘΕ$, άρα $4ΘΒ = 12ΘΕ$

Οπότε $3ΑΒ = 4ΘΒ$.

131 Θέμα 4 - 1888

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.
Αφού $AM \perp B\Gamma$ και $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$, προκύπτει $AM // \Gamma\Delta$.

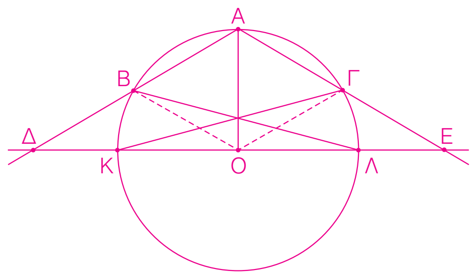
β. Είναι:
- $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = A\Gamma$, οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma A$, άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$
- $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}M$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}M$, οπότε η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

γ. Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \dfrac{M\hat{A}\Gamma}{2} = \dfrac{90^o - \hat{\Gamma}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$, αφού το τρίγωνο $MA\Gamma$ είναι ορθογώνιο και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

δ. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι: $A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$.

132 Θέμα 4 - 1874



α. Φέρουμε τις OB και $O\Gamma$. Τα τρίγωνα OAB και $OA\Gamma$ είναι ισόπλευρα, οπότε $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}O + O\hat{A}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAO είναι $\hat{\Delta} = 90^o - 60^o = 30^o$ και $B\hat{O}\Delta = 90^o - 60^o = 30^o$.

Άρα $\hat{\Delta} = B\hat{O}\Delta$, οπότε το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = BO$.
Επομένως $B\Delta = BA$, άρα το B είναι το μέσο του $A\Delta$.
Όμοια το Γ είναι το μέσο του AE.

γ. Είναι $A\hat{O}\Gamma = 60^o$ και $B\hat{O}A = 60^o$ επειδή τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και AOB είναι ισόπλευρα.
Οπότε:
- $K\hat{O}\Gamma = K\hat{O}A + A\hat{O}\Gamma = 90^o + 60^o = 150^o$
- $B\hat{O}\Lambda = B\hat{O}A + A\hat{O}\Lambda = 60^o + 90^o = 150^o$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $K\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Lambda$ είναι ίσες.
Οπότε τα τόξα $\overset{\frown}{K\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Lambda}$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές $K\Gamma$ και ΛB είναι ίσες, δηλαδή $K\Gamma = \Lambda B$.

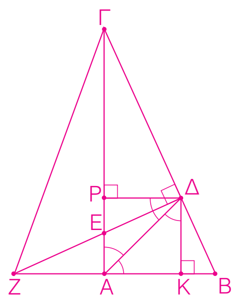
133 Θέμα 4 - 1894

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ έχουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$
- $\Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ έχουμε $\Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{E}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$

Οπότε $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $P\Delta E$ και $K\Delta B$ έχουν:
- $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{B}$
- $\Delta P = \Delta K$, αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$

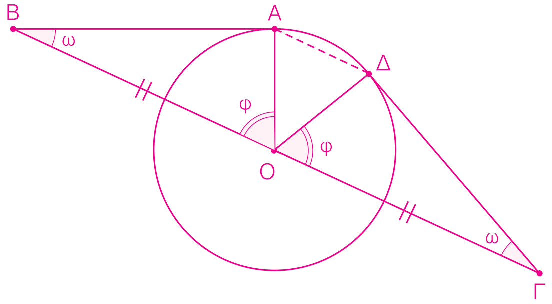
Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Delta B$.



β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και ΔBZ έχουν:
- $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{B}$, από το **α.i.**
- $\Delta E = \Delta B$, από το **α.ii.**

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\Delta\Gamma = \Delta Z$.
Επομένως, το τρίγωνο $\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
Άρα $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}Z + \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}Z = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}Z = 45^o$.

134 Θέμα 4 - 13750



α. i. Είναι $OA \perp AB$ και $O\Delta \perp \Delta\Gamma$ διότι OA και $O\Delta$ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής A και Δ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$, έχουν:

- $OA = O\Delta = R$,
- $OB = O\Gamma$,
- $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση, οπότε $AB = \Delta\Gamma$.

ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του **α. i.** ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ και $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ με $\omega + \varphi = 90^o$ (1) , ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$, λόγω της (1).

Το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $OA = O\Delta = R$, οπότε

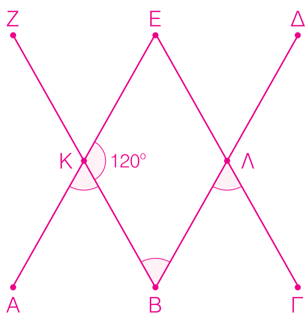
$$O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^o - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^o - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi$$, λόγω της (1).

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των $A\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε $A\Delta // B\Gamma$.

β. Αν $BA = R$ τότε από το **α.** ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ θα είναι και ισοσκελή, αφού $OA = AB = O\Delta = \Delta\Gamma = R$.

Επομένως $\omega = \varphi = 45^o$, άρα $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

135 Θέμα 4 - 13697

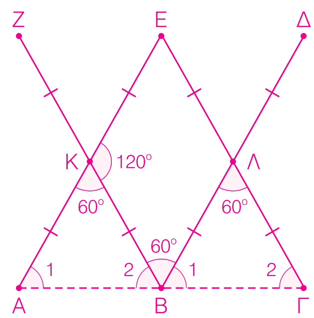


α. Είναι: • $A\hat{K}B + B\hat{K}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{K}B + 120^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{K}B = 180^o - 120^o$

$\Leftrightarrow A\hat{K}B = 60^o$

- $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $K\hat{B}\Lambda = 60^o$.
- $K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$.

Επομένως $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$ (4).



β. Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:

- $AK = B\Lambda = 20\,cm$, ως μισά των ίσων τμημάτων AE και $B\Delta$.
- $KB = \Lambda\Gamma = 20\,cm$, ως μισά των ίσων τμημάτων BZ και ΓE.
- $A\hat{K}B = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$

Επομένως είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Είναι $AK = KB = 20\,cm$, άρα το τρίγωνο AKB θα είναι ισοσκελές με βάση AB, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι

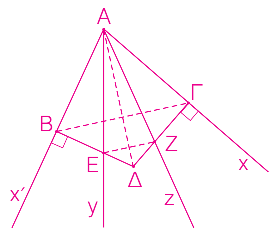
$$\hat{A}_1 + A\hat{K}B + \hat{B}_2 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 + 60^o = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 180^o - 60^o \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 120^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 60^o$$

Άρα $\hat{AKB} = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο.

Επομένως και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε $\hat{B\Lambda\Gamma} = \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 = 60^o$.

γ. Είναι $\hat{AB\Gamma} = \hat{B}_2 + \hat{KB\Lambda} + \hat{B}_1 = 3 \cdot 60^o = 180^o$, αφού είναι $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 60^o$, ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

136 Θέμα 4 - 1849



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΓΑΖ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}Z$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = AZ$.
Επομένως το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

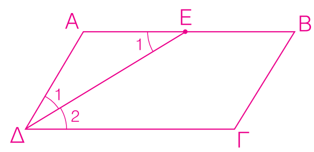
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- ΑΔ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$.

Επομένως η ΑΔ είναι η διχοτόμος της $x'\hat{A}x$.

γ. Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ .
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ είναι $\Gamma\hat{A}K + A\hat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}K$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ , οπότε $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$.
Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^o - A\hat{B}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}B = 90^o - A\hat{\Gamma}K$.
Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$.

137 Θέμα 2 - 1538



α. Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, αφού η ΒΕ διχοτόμος
- $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β. Έχουμε:
- $A\Delta = AE$, αφού το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
- $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = 2AE$

Οπότε το Ε είναι το μέσο του ΑΒ .

138 Θέμα 2 - 1610

α. Είναι $H\hat{B}Z = 180^o - \hat{B} = 180^o - \hat{\Delta} = E\hat{\Delta}\Theta$.

β. Είναι:
- $\Gamma\hat{Z}E = A\hat{E}Z$, ως εντός εναλλάξ
- $B\hat{Z}H = \Gamma\hat{Z}E$, ως κατακορυφήν
- $\Delta\hat{E}\Theta = A\hat{E}Z$, ως κατακορυφήν

Οπότε $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$.

γ. Είναι $A\Delta = B\Gamma$ και $AE = \Gamma Z$.
Οπότε $\Delta E = A\Delta - AE = B\Gamma - \Gamma Z = BZ$.
Τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ έχουν:
- $\Delta E = BZ$
- $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$
- $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ) , άρα $BH = \Theta\Delta$.

139 Θέμα 2 - 13755

α. Είναι $ZA // \Delta\Gamma$ και $Z\Delta // A\Gamma$.

Άρα το τετράπλευρο $ZA\Gamma\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $AE // B\Delta$ και $\Delta E // BA$.

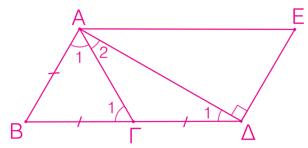
Άρα το τετράπλευρο $AB\Delta E$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $AB = \Delta E$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Delta E$
- $A\Gamma = \Delta Z$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ZA\Gamma\Delta$
- $B\Gamma = ZE$, διότι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ και $ZE = ZA + AE + \Delta\Gamma + B\Delta$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

140 Θέμα 2 - 1637



α. Είναι:
- $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$
- $A\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\Gamma A = \Gamma\Delta$, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$

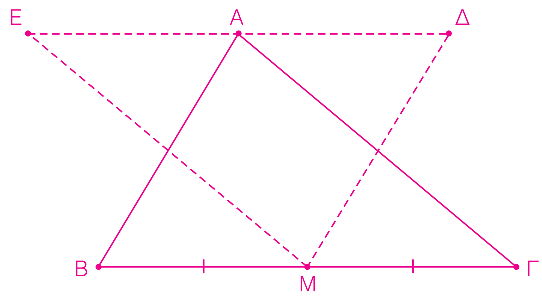
Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$.

Οπότε $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

β. Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = 90^\circ$, οπότε $BA \perp A\Delta$ και $E\Delta \perp A\Delta$, άρα $AB // \Delta E$
- $B\Gamma = \Delta E \Rightarrow AB = \Delta E$

Άρα το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

141 Θέμα 2 - 13825



α. Το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει $AB = \Delta M$ και $AB // \Delta M$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $A\Gamma ME$ έχει $A\Gamma = EM$ και $A\Gamma // EM$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι:
- $\Delta A = BM$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Delta MB$
- $AE = \Gamma M$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Gamma ME$
- το σημείο M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, επομένως $BM = \Gamma M$.

Άρα $\Delta A = AE$.

142 Θέμα 2 - 1654

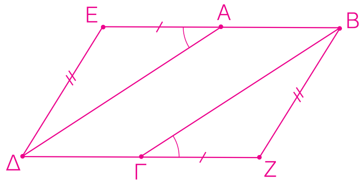
α. Επειδή τα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμα έχουμε $A\Gamma // = B\Delta$ και $B\Delta // = ZE$ αντίστοιχα. Άρα $A\Gamma // = ZE$, οπότε το $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα ABZ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

- $AB = \Gamma\Delta$, αφού το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
- $BZ = \Delta E$, αφού το $BZE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $AZ = \Gamma E$, αφού το $AZE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

143 Θέμα 2 - 1687



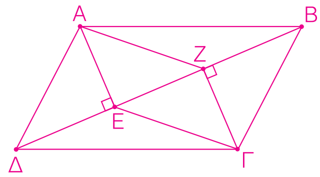
α. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου.
- $ΑΕ = ΓΖ$, αφού $ΑΕ = ΑΒ$, $ΓΔ = ΓΖ$ και $ΑΒ = ΓΔ$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- $Β\widehat{Γ}Ζ = Ε\widehat{Α}Δ$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$, $\widehat{Γ}$ του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ έχουμε $ΒΖ = ΕΔ$.
Είναι $ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ = ΔΖ$.
Οπότε το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

144 Θέμα 2 - 1628



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΓΒ$ έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο
- $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Β}Ζ$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $ΑΔ$, $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΕ = ΓΖ$.

β. Είναι:
- $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$, οπότε $ΑΕ // ΓΖ$
- $ΑΕ = ΓΖ$ (από το **α.** ερώτημα)

Άρα το $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

145 Θέμα 2 - 1678

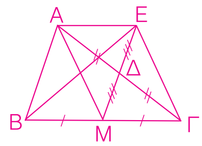
α. Είναι:
- $ΓΟ \perp ΟΑ$ και $ΒΑ \perp ΟΑ$, οπότε $ΟΓ // ΑΒ$
- $ΟΓ = ΑΒ$

Άρα το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα $ΑΟ$ και $ΒΓ$ διχοτομούνται.

β. Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές, αφού $ΟΑ = ΟΓ = ρ$, οπότε $Ο\hat{Α}Γ = Ο\hat{Γ}Α = 45^{o}$.
Το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

- $Α\hat{Β}Ο = Ο\hat{Γ}Α = 45^{o}$
- $Γ\hat{Α}Β = Γ\hat{Ο}Β = 90^{o} + 45^{o} = 135^{o}$

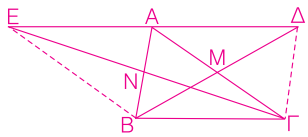
146 Θέμα 2 - 1559



α. Είναι $ΔΑ = ΔΓ$ και $ΔΕ = ΔΜ$.
Οπότε το $ΑΜΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $ΑΕ \mathbin{/\!/\!=} ΜΓ$, οπότε $ΑΕ \mathbin{/\!/\!=} ΒΜ$.
Άρα το ΑΕΜΒ είναι παραλληλόγραμμο .
Οπότε οι διαγώνιοί του ΒΕ και ΑΜ διχοτομούνται.
Άρα η $ΒΕ$ διέρχεται από το μέσο της $ΑΜ$.

147 Θέμα 2 - 1533



α. Είναι $ΜΑ = ΜΓ$ και $ΜΔ = ΜΒ$, οπότε το $ΑΔΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα $ΑΔ // ΒΓ$.

Είναι $ΝΑ = ΝΒ$ και $ΝΕ = ΓΝ$, οπότε το $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα $ΑΕ // ΒΓ$.

β. Από το **α.** ερώτημα αποδείξαμε ότι από το σημείο $Α$ διέρχονται τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΑΔ$ που είναι παράλληλα στη $ΒΓ$.

Όμως από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, οπότε τα τμήματα $Α\Delta$ και $ΑΕ$ έχουν τον ίδιο φορέα.

Άρα τα σημεία $Ε$, $Α$ και Δ είναι συνευθειακά.

148 Θέμα 2 - 1600

α. Επειδή $ΑΑ' \perp Β\Delta$ και $\Gamma\Gamma' \perp Β\Delta$, έχουμε $ΑΑ' // \Gamma\Gamma'$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΑ'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'Β$ έχουν:

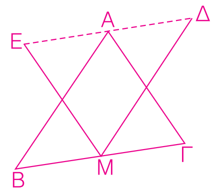
- $Α\Delta = Β\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- $Α\hat{\Delta}Α' = \Gamma\hat{Β}\Gamma'$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $Α\Delta$, $Β\Gamma$ που τέμνονται από τη $Β\Delta$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΑ' = \Gamma\Gamma'$.

γ. Από το **α.** και **β.** ερώτημα έχουμε

$ΑΑ' // = \Gamma\Gamma'$, οπότε το $Α\Gamma'\GammaΑ'$ είναι παραλληλόγραμμο.

149 Θέμα 2 - 1535

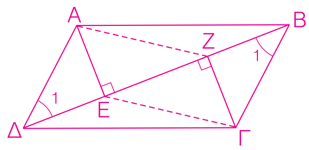


α.
- Επειδή $Μ\Delta // = ΑΒ$, το $Α\DeltaΜΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $\DeltaΑ = ΜΒ$.
- Αφού $ΜΕ // = Α\Gamma$, το $ΑΕΜ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΑΕ = Μ\Gamma$.
- Επειδή $ΜΒ = Μ\Gamma$, έχουμε $Α\Delta = ΑΕ$.

β. Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ, ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $Α\Delta // Β\Gamma$ και $ΑΕ // Β\Gamma$. Επειδή από το Α διέρχεται μοναδική παράλληλη της ΒΓ, τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα τα Δ, $Α$, $Ε$ είναι συνευθειακά.

γ. Είναι $\DeltaΕ = Α\Delta + ΑΕ = ΒΜ + Μ\Gamma = Β\Gamma$.

150 Θέμα 2 - 1534



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $Α\DeltaΕ$ και $\GammaΒΖ$ έχουν:

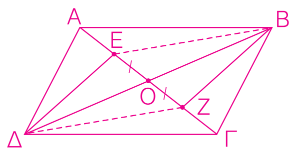
- $Α\Delta = Β\Gamma$, αφού το $ΑΒ\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{Β}_1$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $Α\Delta$ και $Β\Gamma$ που τέμνονται από τη $Β\Delta$

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή $ΑΕ \perp Β\Delta$ και $\GammaΖ \perp Β\Delta$, έχουμε $ΑΕ // \GammaΖ$.
Αφού τα τρίγωνα $Α\DeltaΕ$, $\GammaΒΖ$ είναι ίσα, έχουμε $ΑΕ = \GammaΖ$.

Άρα $ΑΕ // = \GammaΖ$, οπότε το $ΑΕ\GammaΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

151 Θέμα 2 - 1539



α. Τα τρίγωνα $Ο\DeltaΕ$ και $ΟΒΖ$ έχουν:

- $Ο\Delta = ΟΒ$
- $ΟΕ = ΟΖ$
- $\Delta\hat{Ο}Ε = Β\hat{Ο}Ζ$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\DeltaΕ = ΒΖ$.

β. Είναι $ΟΕ = ΟΖ$ και $ΟΒ = Ο\Delta$.
Οπότε το $\DeltaΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

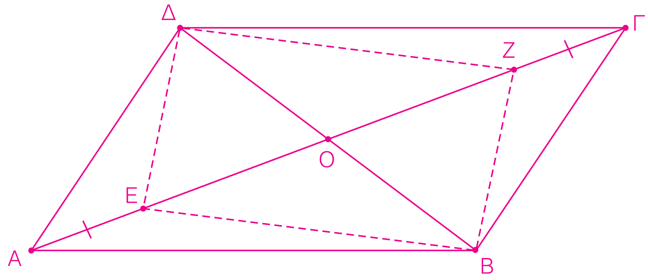
152 Θέμα 2 - 13816

α. Το σημείο $Μ$ είναι το μέσο του $Β\Gamma$ και του $ΑΕ$, οπότε στο τετράπλευρο $ΑΒΕ\Gamma$ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε $\Delta\Gamma // ΑΒ$ και από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΓ έχουμε $ΑΒ // \GammaΕ$.

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $\GammaΕ$ είναι παράλληλα στην $ΑΒ$ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ, τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

153 Θέμα 2 - 13829



α. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ έχουν:

i. $ΑΕ = ΓΖ$

ii. $ΑΔ = ΒΓ$, απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

iii. $Ε\hat{Α}Δ = Ζ\hat{Γ}Β$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

β. Είναι $ΟΕ = ΟΑ - ΑΕ$ και $ΟΖ = ΟΓ - ΖΓ$. Επειδή $ΟΑ = ΟΓ$, αφού το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $ΑΕ = ΖΓ$ έχουμε $ΟΕ = ΟΖ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Επιπλέον $ΒΟ = ΟΔ$ αφού το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

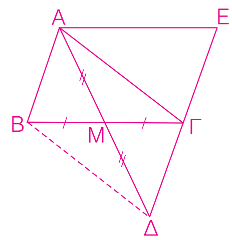
154 Θέμα 2 - 1618

α. Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ έχουν:
- $ΟΒ = ΟΔ$, αφού Ο μέσο του ΒΔ
- $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$, ως κατακορυφήν
- $\hat{Β} = \hat{Δ}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και έχουν: $ΑΒ = ΓΔ$, $ΟΑ = ΟΓ$, $\hat{Α} = \hat{Γ}$.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα, έχουμε $ΑΒ = ΓΔ$.
Οπότε $ΑΒ // = ΓΔ$, επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

155 Θέμα 2 - 1701



α. Είναι $ΜΒ = ΜΓ$ και $ΜΑ = ΜΔ$, οπότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $ΑΒ // ΓΔ$ και $ΑΕ // ΒΓ$, οπότε το ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $ΒΓ = ΑΕ$, οπότε $ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΕ}{2}$.

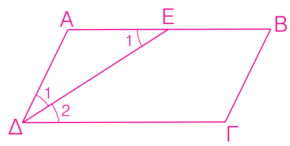
156 Θέμα 2 - 1642

α. Επειδή $ΔΒ = ΔΜ$ και $ΔΑ = ΔΕ$, το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Επειδή το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΜΕ = ΑΒ$.

Είναι $ΒΓ = 2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = ΜΓ \Leftrightarrow ΜΕ = ΜΓ$.

157 Θέμα 2 - 1557



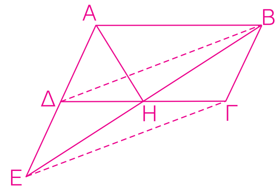
α. Είναι Ε το μέσο του ΑΒ και $ΑΒ = 2ΒΓ \Leftrightarrow 2ΑΕ = 2ΒΓ \Leftrightarrow ΑΕ = ΒΓ$.

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΒΓ = ΑΔ$.
Άρα $ΑΕ = ΑΔ$, οπότε το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

β. Είναι:
- $\hat{Δ}_1 = \hat{Ε}_1$, αφού το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές με $ΑΕ = ΑΔ$.
- $\hat{Δ}_2 = \hat{Ε}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{Δ}$.

158 Θέμα 2 - 1531



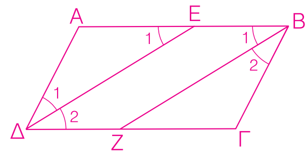
α. Είναι $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = AE$.
Άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές με $AB = AE$.

β. Είναι $\Delta E = A\Delta$ και $A\Delta // = B\Gamma$.
Οπότε $\Delta E // = B\Gamma$, άρα το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $EH = HB$.

Οπότε η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

159 Θέμα 2 - 1609



α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, έχουμε $BE = \Delta Z$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Αφού $BE // = \Delta Z$ το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

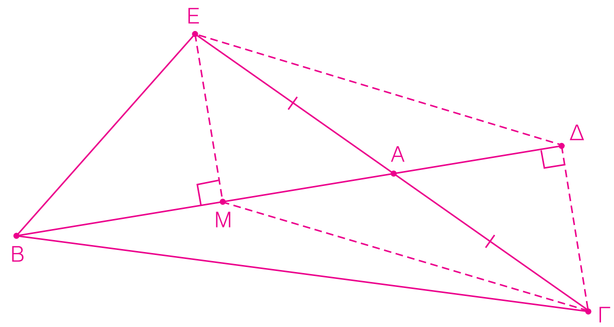
160 Θέμα 2 - 13833

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ έχουν:

i. $\hat{H} = \hat{\Delta} = 90^o$ (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)

ii. ΑΓ = ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

iii. $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}H$ (ως κατακορυφήν)



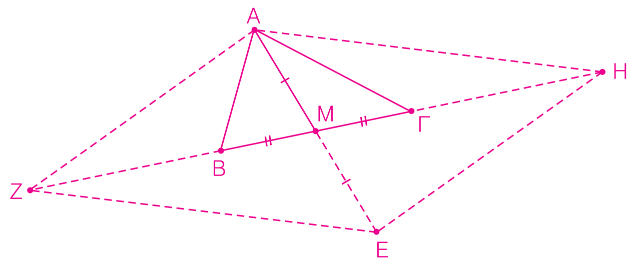
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ προκύπτει ότι $A\hat{E}H = A\hat{\Gamma}\Delta$ άρα και ΑΗ = ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

γ. Η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα ΕΑ=ΑΓ και από το **β.** ερώτημα έχουμε ότι ΑΗ = ΑΔ.

Άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.

161 Θέμα 2 - 13834



α. Τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ έχουν:

i. ΑΜ = ΜΕ

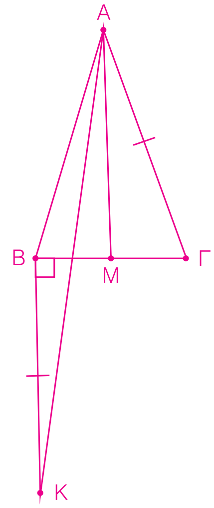
ii. ΜΖ = ΜΗ, άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΒ + ΒΖ και ΜΓ + ΓΗ

iii. $A\hat{M}Z = E\hat{M}H$, ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β. Έχουμε ΑΜ = ΜΕ και ΜΖ = ΜΗ. Επομένως στο τετράπλευρο ΑΗΕΖ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

162 Θέμα 4 - 13742



α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$, το τμήμα $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς τη βάση του $ΒΓ$, οπότε είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας Α. Δηλαδή $ΑΜ \perp ΒΓ$ και $Β\hat{Α}Μ = ΓΑΜ$.

Είναι: • $ΚΒ \perp ΒΓ$ και $ΑΜ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΜ // ΚΒ$.

• $ΒΚ = ΑΓ$ και $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε $ΑΒ = ΒΚ$.

β. Έχουμε: • $ΑΒ = ΒΚ$ άρα το τρίγωνο $ΑΒΚ$ είναι ισοσκελές, οπότε $Β\hat{Α}Κ = Β\hat{Κ}Α$.

• $Κ\hat{Α}Μ = Β\hat{Κ}Α$, ως εντός εναλλάξ. Άρα $Β\hat{Α}Κ = Β\hat{Κ}Α = Κ\hat{Α}Μ$ (1), οπότε η $ΑΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Μ$.

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΚ$ είναι

$$Β\hat{Α}Κ + Κ\hat{Β}Α + Β\hat{Κ}Α = 180^{\circ} \Leftrightarrow Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} + 90^{\circ} + Β\hat{Κ}Α = 180^{\circ} \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} + 90^{\circ} = 180^{\circ} \Leftrightarrow$$

$$2Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α + \hat{Γ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α = 90^{\circ} - \hat{Γ} \Leftrightarrow Β\hat{Κ}Α = 45^{\circ} - \frac{\hat{Γ}}{2}$$

δ. Το τετράπλευρο $ΑΒΚΜ$ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του $ΑΜ$ και $ΒΚ$ παράλληλες.

Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι $ΑΜ$ και $ΒΚ$ θα ήταν και ίσες. Αν $ΑΜ = ΒΚ$ τότε θα ισχύει ότι $ΑΜ = ΑΒ$.

Όμως τα τμήματα $ΑΜ$ και $ΑΒ$ είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη $ΒΓ$, οπότε ισχύει ότι $ΑΜ < ΑΒ$.

Επομένως $ΑΜ < ΚΒ$ και το τετράπλευρο $ΑΒΚΜ$ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

163 Θέμα 4 - 1785

α. Επειδή $ΑΚ = ΑΛ$ το τρίγωνο $ΑΚΛ$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος $ΑΜ$ είναι και διχοτόμος της $\hat{Α}$, οπότε $Δ\hat{Α}Ε = Λ\hat{Α}Μ$.

Είναι $Λ\hat{Α}Μ = Δ\hat{Ε}Α$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $Α\hat{Ε}Δ = Δ\hat{Α}Ε$.

Άρα $ΑΔ = ΔΕ$.

β. Είναι $ΒΓ + ΓΕ = ΑΔ + ΓΕ = ΔΕ + ΓΕ = ΔΓ = ΑΒ$.

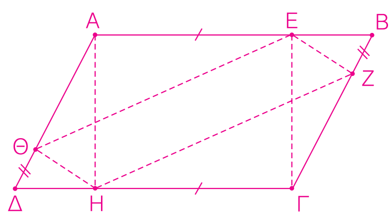
γ. Είναι: • $\widehat{Α} + \widehat{Β} = 180^{\circ} \Leftrightarrow \widehat{Β} = 180^{\circ} - \widehat{Α}$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη

• $\widehat{Α} + Α\widehat{Λ}Κ + Α\widehat{Κ}Λ = 180^{\circ} \Leftrightarrow Α\widehat{Λ}Κ + Α\widehat{Λ}Κ = 180^{\circ} - \widehat{Α} \Leftrightarrow 2Α\widehat{Λ}Κ = \widehat{Β}$

Άρα $\hat{Β} = 2Α\hat{Λ}Κ$.

164 Θέμα 4 - 1839

α. Επειδή $ΑΕ // = ΓΗ$ το $ΑΕΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.



β. Τα τρίγωνα $ΔΗΘ$ και $ΒΕΖ$ έχουν:

• $ΔΗ = ΒΕ$, αφού $ΔΗ = ΔΓ - ΗΓ = ΑΒ - ΑΕ = ΒΕ$

• $\widehat{Δ} = \widehat{Β}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

• $ΔΘ = ΒΖ$, από υπόθεση

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΘΗ = ΕΖ$, (1).

Τα τρίγωνα $ΑΘΕ$ και $ΓΗΖ$ έχουν:

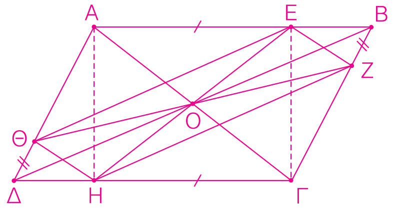
• $ΑΕ = ΓΗ$, από υπόθεση

• $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

• $ΑΘ = ΓΖ$, αφού $ΑΘ = ΑΔ - ΘΔ = ΒΓ - ΒΖ = ΓΖ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΘΕ = ΗΖ$.

Επομένως το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



γ. Έστω O το μέσον της $A\Gamma$.

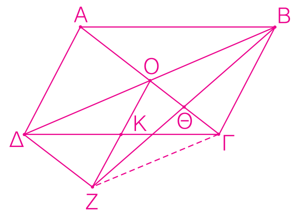
- Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $B\Delta$ διέρχεται από το O.
- Επειδή το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η EH διέρχεται από το O που είναι το μέσον της $A\Gamma$.
- Επειδή το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΘZ διέρχεται από το μέσον της EH που είναι το O.

Άρα οι $A\Gamma$, $B\Delta$, EH και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

165 Θέμα 4 - 1877

α. Επειδή $KO = KZ$ και $K\Delta = K\Gamma$, το $O\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma Z // = O\Delta$.
Οπότε $\Gamma Z // = OB$, επομένως το $OB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα τα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται.

β. Επειδή το $O\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta Z = O\Gamma$ και αφού $O\Gamma = AO$, έχουμε $AO = \Delta Z$.



γ. Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:
- $OA = \Delta Z$
- $OB = \Gamma Z$
- $AB = \Gamma\Delta$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

166 Θέμα 4 - 1857

α. Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$
- $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\Delta\hat{A}E = A\hat{\Delta}E$, οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AE\Delta$ η EK είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος.
Άρα η EK είναι η μεσοκάθετος του $A\Delta$.

γ. Τα τρίγωνα AKB, $K\Delta Z$ έχουν:
- $KA = K\Delta$
- $A\hat{K}B = \Delta\hat{K}Z$
- $B\hat{A}K = K\hat{\Delta}Z$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

δ. Επειδή τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα, έχουμε $KB = KZ$.

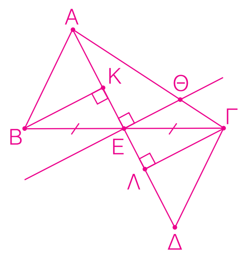
Επειδή $KA = K\Delta$ και $KB = KZ$, το $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

167 Θέμα 4 - 1890

α. i. Έχουμε $EB = E\Gamma$ και $EA = E\Delta$, οπότε το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $AB = \Gamma\Delta$. Άρα η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

ii. Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $AB // \Gamma\Delta$, οπότε οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ όσο και να προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Φέρουμε $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp A\Delta$.



Τα ορθογώνια τρίγωνα BKE και $\Gamma\Lambda E$ έχουν:
- $EB = E\Gamma$
- $B\hat{E}K = \Gamma\hat{E}\Lambda$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BK = \Gamma\Lambda$.
Δηλαδή τα χωριά B, Γ ισαπέχουν από το δρόμο $A\Delta$.

β. Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα A και Δ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Delta$.

Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο δρόμο $A\Gamma$, θα είναι το σημείο τομής Θ της $A\Gamma$ με τη μεσοκάθετο του $A\Delta$.

168 Θέμα 4 - 1882

α. Στο τρίγωνο ΑΕΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\mathrm{A\hat{E}M} = \mathrm{A\widehat{M}E}$, αφού ΑΕ = ΑΜ
- $\mathrm{A\hat{E}M} = \mathrm{M\hat{\Lambda}B}$, ως εντός εναλλάξ
- $\mathrm{A\widehat{M}E} = \mathrm{B\widehat{M}\Lambda}$, ως κατακορυφήν.

Άρα $\mathrm{B\widehat{M}\Lambda} = \mathrm{M\hat{\Lambda}B}$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\hat{\mathrm{K}} = \mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}$, ως εντός εναλλάξ.
- $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{A}B}$, γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}$.

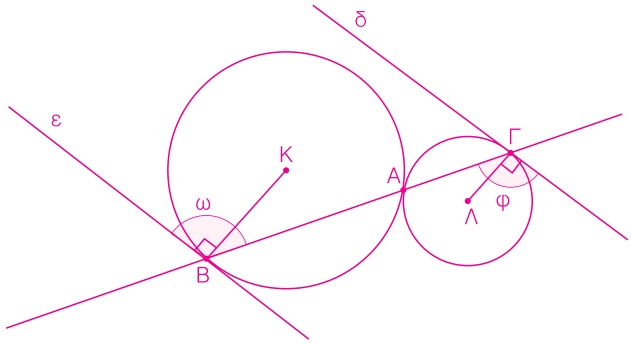
Άρα $\mathrm{\Delta\hat{A}B} = \hat{\mathrm{K}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β. Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ , έχουμε ΑΕ = ΑΜ = ΜΒ = ΒΛ .

Οπότε ΑΕ = // ΒΛ , άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

169 Θέμα 4 - 13845

α. Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με ΚΒ = ΚΑ, άρα $\mathrm{K\hat{B}A} = \mathrm{K\hat{A}B}$ (1).
Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, άρα $\mathrm{\Lambda\hat{A}\Gamma} = \mathrm{\Lambda\hat{\Gamma}A}$ (2).

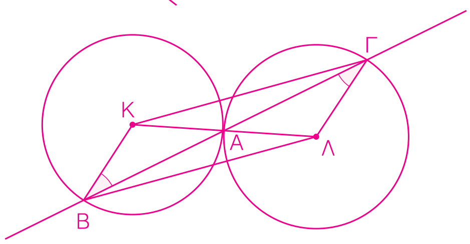


Είναι $\mathrm{K\hat{A}B} = \mathrm{\Lambda\hat{A}\Gamma}$, ως κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες, άρα $\mathrm{K\hat{B}A} = \mathrm{\Lambda\hat{\Gamma}A}$.

β. Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα, οπότε $\hat{\omega} = 90^\circ + \mathrm{K\hat{B}A}$ και $\hat{\varphi} = 90^\circ + \mathrm{\Lambda\hat{\Gamma}A}$. Επειδή $\mathrm{K\hat{B}A} = \mathrm{\Lambda\hat{\Gamma}A}$ έχουμε ω = φ.

Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, άρα (ε) // (δ).

γ. Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.



Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\mathrm{K\hat{B}A}$ και $\mathrm{\Lambda\hat{\Gamma}A}$ των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες, άρα ΚΒ // ΓΛ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει R = ρ.

170 Θέμα 4 - 1746

α. Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2\cdot 6-4)$ ορθές, δηλαδή $(2\cdot 6-4)\cdot 90^\circ = 8\cdot 90^\circ = 720^\circ$.

Οπότε $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}+\hat{\beta}+\hat{\delta}+\hat{\zeta} = 720^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}+\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon} = 720^\circ \Rightarrow 2(\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}) = 720^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon} = 360^\circ$.

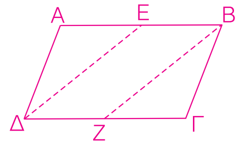
β. i. Είναι $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{H}} = \hat{\alpha}+180^\circ - \mathrm{H\hat{Z}E} - \mathrm{H\hat{E}Z} = \hat{\alpha}+180^\circ-(180^\circ-\hat{\zeta})-(180^\circ-\hat{\delta}) = \hat{\alpha}+180^\circ-180^\circ+\hat{\zeta}-180^\circ+\hat{\delta}$

$$= \hat{\alpha}+\hat{\zeta}+\hat{\delta}-180^\circ = \hat{\alpha}+\hat{\varepsilon}+\hat{\gamma}-180^\circ = 360^\circ-180^\circ = 180^\circ$$

ii. Επειδή οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{H}}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη και παραπληρωματικές, προκύπτει ΑΘ // ΗΔ .

Όμοια έχουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\Theta} = 180^\circ$, οπότε ΑΗ // ΘΔ .
Άρα το ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

171 Θέμα 4 - 1730



α. • Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $AB // = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} // = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow EB // = \Delta Z$, άρα το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Οπότε ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

• Είναι: • $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ

• $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{Z}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Επομένως $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

• Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής.

β. Ο ισχυρισμός 3 είναι αληθής, αν και μόνο αν $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}Z = Z\hat{B}\Gamma$.

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}\Delta$, δηλαδή $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = A\Delta \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

Στην περίπτωση αυτή και η ΒΖ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.
Άρα η ζητούμενη σχέση είναι $AB = 2A\Delta$.

172 Θέμα 4 - 1805

α. i. • Το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές, οπότε $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}\Gamma$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΒΓΖ, οπότε $\hat{B} = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}Z$.

• Το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{E}\Gamma$ και η $\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΔΓΕ , οπότε $\hat{\Delta} = \Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 2\Delta\hat{\Gamma}E$.

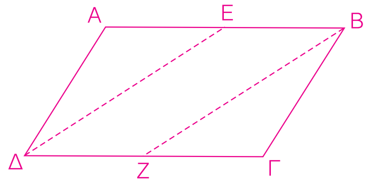
Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2B\hat{\Gamma}Z = 2\Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$.

ii. Είναι $B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E = B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$.
Άρα τα Ζ , Γ , Ε είναι συνευθειακά.

β. Το λάθος είναι ότι θεώρησε ως δεδομένο ότι τα σημεία Ζ , Γ , Ε είναι συνευθειακά, ώστε να αποδείξει ότι $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$.

173 Θέμα 4 - 1731

α. • Είναι $EB // \Delta Z$ και $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EB = \Delta Z$.



Οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

• Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:
• $A\Delta = B\Gamma$
• $AE = \Gamma Z$, ως μισά ίσων τμημάτων
• $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή.

Τότε θα ισχύει $A\Delta = AE \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

Και αντιστρόφως, αν $AB = 2A\Delta$, τότε $A\Delta = AE$, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ θα είναι ισοσκελή.
Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

174 Θέμα 4 - 1810

α. Επειδή:
- $M\Delta // = AB$, το $AB M\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$, (1)
- $ME // = A\Gamma$, το $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE // B\Gamma$, (2)

Από το A διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

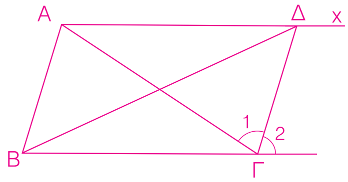
β. Επειδή τα $ABM\Delta$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα, έχουμε $\Delta A = MB$ και $AE = M\Gamma$.

Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = MB + M\Gamma = B\Gamma$.

Άρα $\Pi_{M\Delta E} = M\Delta + ME + \Delta E = AB + A\Gamma + B\Gamma = \Pi_{AB\Gamma}$.

γ. Το λάθος του μαθητή βρίσκεται στον ισχυρισμό του ότι $A\widehat{\Delta}Z = \widehat{A}_2$, θεωρώντας ότι η ευθεία ΔE διέρχεται από το A . Δηλαδή θεώρησε δεδομένο ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

175 Θέμα 4 - 1709



α. Επειδή $A\Delta // = B\Gamma$, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β. Επειδή $AB // \Gamma\Delta$, είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$ ως εντός εναλλάξ.

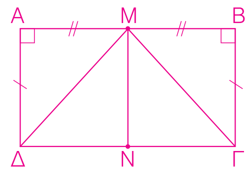
Έχουμε $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{\Gamma}_2 = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{A}$.

Άρα η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.

γ. Είναι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{A} + \widehat{B}$, οπότε $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{A}$.

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

176 Θέμα 2 - 1599



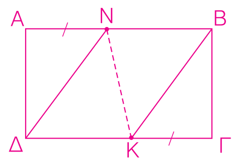
α. Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $AM = MB$, διότι το M είναι μέσο του AB

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = M\Gamma$.

β. Στο ισοσκελές $M\Gamma\Delta$ η MN είναι διάμεσος, οπότε και ύψος.

Άρα η ευθεία MN είναι η μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$.

177 Θέμα 2 - 1692



α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $A\Delta = B\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $AN = \Gamma K$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $AB // = \Gamma\Delta$.

Είναι $AN = K\Gamma$, οπότε $BN = AB - AN = \Gamma\Delta - \Gamma K = K\Delta$

Επομένως $NB // = K\Delta$.

Άρα το $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

178 Θέμα 2 - 1653

α. Είναι:
- $AB = \Gamma\Delta$, (1) και $AB // \Gamma\Delta$, (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- $AE = \Gamma\Delta$, (3) και $AE // \Gamma\Delta$, (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $A\Gamma\Delta E$.

Από τις (2) , (4) έχουμε $AB // AE$, οπότε τα B , A και E είναι συνευθειακά.

Επειδή $AB = AE$, από τις (1) , (3) έχουμε ότι A είναι μέσο του BE .

β. Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ το ΓA είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ. Είναι:
- $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ
- $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

179 Θέμα 2 - 1668

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:
- $M\Delta = ME$
- $MB = M\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Είναι $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$, οπότε $B\Delta // \Gamma E$.

Επειδή $B\Delta // = \Gamma E$, το $B\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^o$, είναι ορθογώνιο.

180 Θέμα 2 - 1683

α. Είναι $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$, άρα $A\Gamma = \Delta B$.

β. Στο τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ οι διαγώνιοι AB και $\Gamma\Delta$ διχοτομούνται και είναι ίσες.
Άρα το $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

181 Θέμα 4 - 1729

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^o$, οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$
- ΔAE είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$, οπότε $A\hat{\Delta}E = 30^o$

Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Delta\Gamma$, οπότε $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$.

Είναι: $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}O + O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow 30^o + E\hat{\Delta}O + 30^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}O = 30^o$.

Επομένως $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$.

Άρα η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔE και ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.

β. Το τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ισοσκελές με $OA = O\Delta$ και είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ οπότε $\Delta\hat{A}E = 60^o$.
Άρα το ισοσκελές τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ισόπλευρο με $OA = O\Delta = A\Delta$.
Όμως $A\Delta = B\Gamma$, οπότε $OA = B\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ έχουν:
- $OA = B\Gamma$
- $A\hat{\Gamma}B = 90^o - 30^o = 60^o = Z\hat{A}O$

Άρα είναι ίσα.

182 Θέμα 4 - 14887

α. Το $AHM\Delta$ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{\Delta} = \hat{M} = \hat{H} = 90^o$.

Άρα $\Delta\hat{A}H = 90^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EMB έχουμε $\hat{E} = 90^o - \hat{B} \Rightarrow \hat{E} = 90^o - \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Είναι $A\hat{\Theta}E = M\hat{\Theta}\Gamma$, ως κατακορυφήν και $M\hat{\Theta}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο $M\Theta\Gamma$,

οπότε $A\hat{\Theta}E = 90^o - \hat{\Gamma}$.

Επομένως $\hat{E} = A\hat{\Theta}E$, άρα το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

γ. Το $A\Delta MH$ είναι ορθογώνιο, οπότε $MH = A\Delta$.
Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος AH είναι και διάμεσος, άρα $\Theta H = HE$.
Είναι $M\Theta + ME = MH - H\Theta + MH + HE = 2MH - H\Theta + H\Theta = 2A\Delta$.

183 Θέμα 4 - 1833

α. Επειδή $MA = M\Delta$ και $M\Gamma = MB$, το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον έχει $\hat{A} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KEB έχουμε $K\hat{E}B = 90^o - K\hat{B}E \Leftrightarrow K\hat{E}B = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$.

γ. Είναι $\Delta\hat{B}E = 90^o - E\hat{B}A = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$.

Οπότε $\Delta\hat{B}E = K\hat{E}B$. Άρα $\Delta E = B\Delta$.

184 Θέμα 4 - 1800

α. Στο τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι $\hat{E} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $M\Theta \perp BH$ και $\Gamma H \perp BH$, άρα $M\Theta // A\Gamma$.

Οπότε $B\hat{M}\Theta = \hat{\Gamma}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και αφού $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ έχουμε $B\hat{M}\Theta = \hat{B}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBM και ΔBM έχουν:
- MB κοινή
- $B\hat{M}\Theta = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Theta = M\Delta$.

γ. Είναι $M\Delta + ME = B\Theta + \Theta H = BH$.

185 Θέμα 4 - 13746

α. i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$,
- $B\Delta = \Delta\Gamma$,
- $A\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}\Gamma$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AB = \Gamma E$ (1)

i. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ έχουμε:

$$AE < A\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow AE < A\Gamma + AB \Leftrightarrow 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

Άρα η διάμεσος $A\Delta$ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που την περιέχουν.

β. • Έχουμε $2A\Delta = B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$, άρα στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι διαγώνιές του είναι ίσες.

• Είναι $A\Delta = \Delta E$ και $B\Delta = \Delta\Gamma$, δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Επομένως στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 90^o$, αφού το $ABE\Gamma$ ορθογώνιο, άρα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

186 Θέμα 4 - 1879

α. Επειδή το σημείο K είναι το μέσο της χορδής $\Gamma\Delta$, έχουμε $OK \perp \Gamma\Delta$.

Είναι $AB // \Delta\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$, άρα $\Delta E \perp \Delta\Gamma$.

Στο ΔKOE είναι $\hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{K} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $EO = \Delta K$ και αφού $\Delta K = K\Gamma$ έχουμε $EO = K\Gamma$.

Επομένως $EO // = K\Gamma$, άρα το $K\Gamma OE$ είναι παραλληλόγραμμο.

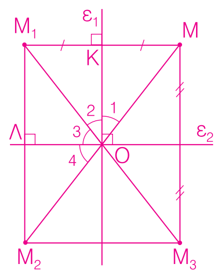
β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ $(O\Gamma = O\Delta)$, η OK είναι διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος, άρα $K\hat{O}\Gamma = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

Οι γωνίες $\Delta\hat{E}K$ και $K\hat{O}\Gamma$ είναι ίσες, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, άρα $\Delta\hat{E}K = K\hat{O}\Gamma$.

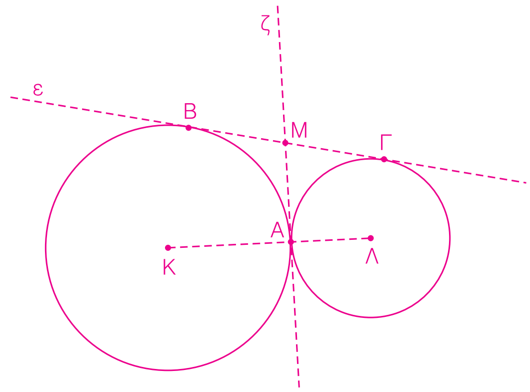
Επομένως $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

γ. Είναι $KE = O\Delta$, ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΕΟΚ και $O\Delta = OB$, ως ακτίνες του κύκλου.
Άρα $KE = OB$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ, η ΚΒ είναι υποτείνουσά του, οπότε $OB < KB$.
Άρα $KE < KB$
2ος τρόπος
Είναι $KO \perp AB$ και $EO < AO = OB$, άρα για τα πλάγια τμήματα ΚΕ και ΚΒ έχουμε $KE < KB$.

187 Θέμα 4 - 1733



α. i. Η ευθεία ε_1 είναι η μεσοκάθετος του MM_1, οπότε $OM = OM_1$.
ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο OMM_1 η διάμεσος ΟΚ είναι και διχοτόμος, άρα $M\hat{O}M_1 = 2\hat{O}_2$.
Επειδή στο τρίγωνο M_1OM_2 η ΟΛ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Άρα η ΟΛ είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_3$.
Τότε $M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2\,(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$.
Αφού η γωνία $M\hat{O}M_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά.
iii. Το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{O} = 90^\circ$.
Επειδή το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο έχουμε $\hat{M}_1 = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.



β. Τα M_1 και M_3 είναι τα συμμετρικά του Μ ως προς τις ε_1 και ε_2 . Από το **α.ii.** ερώτημα έχουμε ότι τα M_1 , Ο και M_3 είναι συνευθειακά. Είναι
$OM_1 = OM = OM_2 = OM_3$, οπότε στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

188 Θέμα 4 - 1891

α. Είναι:

- $A\hat{\Delta}T = T\hat{\Delta}E$ και $T\hat{\Delta}E = A\hat{T}\Delta$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $A\hat{\Delta}T = A\hat{T}\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AT$.
- $\Gamma\hat{B}E = E\hat{B}T$ και $E\hat{B}T = B\hat{E}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\Gamma\hat{B}E = B\hat{E}\Gamma$.

Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $\Gamma B = \Gamma E$.
Είναι $BT = AB - AT = AB - A\Delta = \Gamma\Delta - B\Gamma = \Gamma\Delta - \Gamma E = \Delta E$
Επειδή $BT \,//=\, \Delta E$, το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΤ η διχοτόμος του ΑΝ είναι και ύψος, οπότε $AN \perp \Delta T$, άρα $M\hat{N}K = 90^\circ$, και $\Delta T \,//\, BE$, οπότε είναι $AN \perp BE$, άρα $N\hat{K}\Lambda = 90^\circ$.

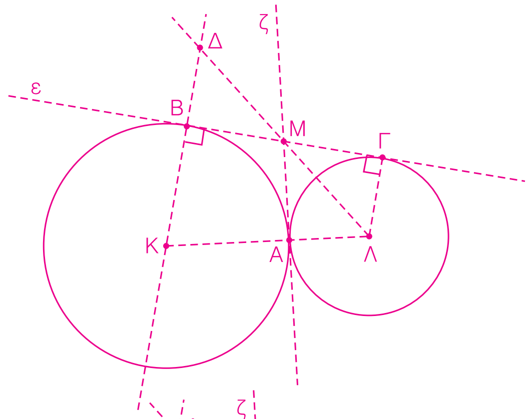
- Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΕ η διχοτόμος της ΓΛ είναι και ύψος, οπότε $\Gamma\Lambda \perp BE$, άρα $M\hat{\Lambda}K = 90^\circ$.

Επειδή το ΚΛΜΝ έχει τρεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο.

γ. Το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο και τα Ν , Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΔΤ , ΒΕ που είναι ίσα.
Άρα $NT \,//=\, B\Lambda$, οπότε το ΤΒΛΝ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $N\Lambda \,//\, AB$.

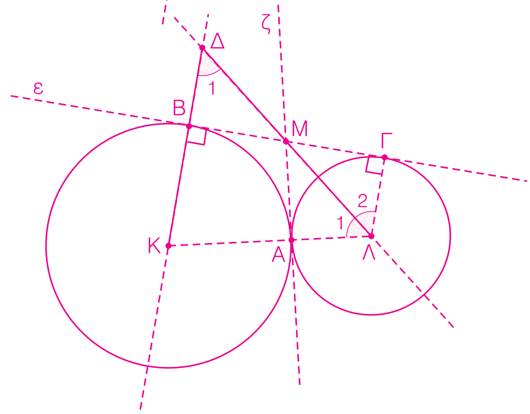
δ. Είναι $N\Lambda = BT = AB - AT = AB - A\Delta$.

189 Θέμα 4 - 13699



α. Οι ακτίνες των δυο κύκλων στα σημεία επαφής Β και Γ είναι κάθετες στην (ε), οπότε θα είναι $ΚΒ // ΛΓ$.

Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην (ε), γιατί αν η ΛΜ ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε), η ΛΜ και η ΛΓ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου $(Λ, ρ_2)$ με την ευθεία (ε), που είναι άτοπο, και αφού η ΛΜ τέμνει την ΛΓ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την ΚΒ έστω σε σημείο Δ.



β. • Είναι $ΚΔ // ΛΓ$, οπότε $\hat{Δ}_1 = \hat{Λ}_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

• Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο $(Λ, ρ_2)$, οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $Γ\hat{Λ}Α$ δηλαδή $\hat{Λ}_2 = \hat{Λ}_1$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Λ}_1$, οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

γ. Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν $Δ\hat{Κ}Λ = 90^\circ$.

Αν $Δ\hat{Κ}Λ = 90^\circ$ τότε $ΚΛ \perp ΚΔ$, οπότε $ΚΛ // (ε)$, άρα το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις $Δ\hat{Κ}Λ$, $Κ\hat{Β}Γ$ και $Λ\hat{Γ}Β$.

Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε $ΚΒ = ΛΓ \Leftrightarrow ρ_1 = ρ_2$.

Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.

190 Θέμα 4 - 1714

α. Επειδή στο ΓΗΖΔ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

β. Όμοια το ΑΓΔΒ είναι ορθογώνιο.

Είναι $Β\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Δ}Γ + Γ\hat{Δ}Ζ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε τα Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

γ. Το ΓΘΔΕ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Οπότε $ΘΔ // = ΓΕ \Rightarrow 2ΘΔ // = 2ΓΕ \Rightarrow ΑΔ // = ΓΖ$, άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

191 Θέμα 4 - 1816

α. Επειδή $ΓΖ \perp ΚΔ$ και $ΑΒ \perp ΚΔ$, έχουμε $ΓΖ // ΑΒ$, οπότε $\hat{Β} = Ζ\hat{Γ}Δ$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $Δ\hat{Γ}Ε = \hat{Γ} = \hat{Β} = Ζ\hat{Γ}Δ$, οπότε η ΓΔ είναι η διχοτόμος της $Ζ\hat{Γ}Ε$.

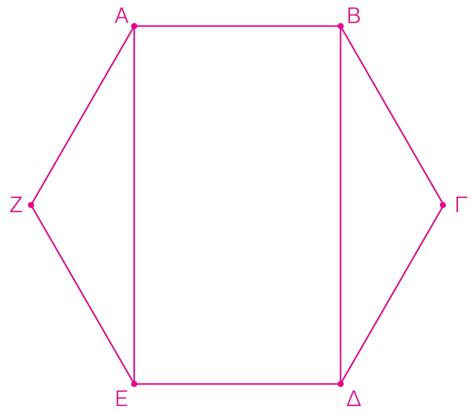
γ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΓ και ΕΔΓ έχουν:
- ΓΔ κοινή
- $Ζ\hat{Γ}Δ = Δ\hat{Γ}Ε$

Οπότε είναι ίσα, άρα το $\overset{\triangle}{ΔΖΕ}$ είναι ισοσκελές.

δ. Το ΚΖΓΗ είναι ορθογώνιο, αφού έχει $\hat{Κ} = \hat{Η} = \hat{Ζ} = 90^\circ$, οπότε $ΗΓ = ΚΖ$.

Είναι $ΔΚ - ΔΕ = ΔΚ - ΔΖ = ΚΖ = ΗΓ$.

192 Θέμα 4 - 13523

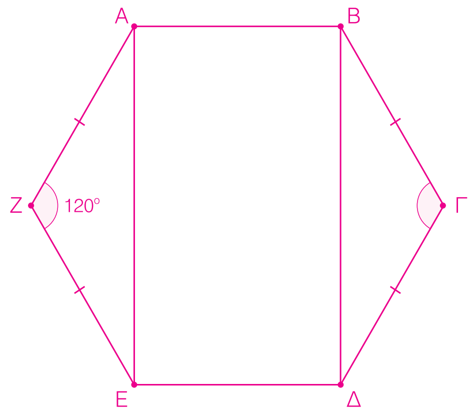


α. Στο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ έχουν:

- $AZ = B\Gamma = \lambda$
- $ZE = \Gamma\Delta = \lambda$
- $A\hat{Z}E = B\hat{\Gamma}\Delta = \varphi$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AE = B\Delta$.



β. Το άθροισμα των γωνιών του εξάγωνου είναι $(2\nu - 4)$ ορθές, δηλαδή $(2\cdot 6-4)\cdot 90^\circ = 720^\circ$.

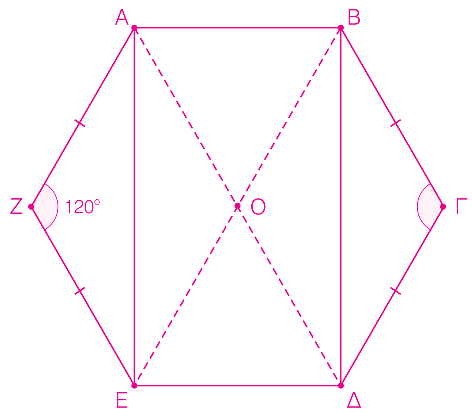
Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΕ $(AZ = ZE)$ οι γωνίες της βάσης $Z\hat{A}E$ και $Z\hat{E}A$ θα είναι ίσες και ισχύει:

$$\hat{Z} + Z\hat{A}E + Z\hat{E}A = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{A}E + Z\hat{E}A = 180^o - \hat{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2Z\hat{E}A = 180^o - 120^o \Leftrightarrow 2Z\hat{E}A = 60^o \Leftrightarrow Z\hat{E}A = 30^o$$

Άρα $A\hat{E}\Delta = Z\hat{E}\Delta - Z\hat{E}A = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, οπότε $AE \perp E\Delta$.



γ. i. Επειδή: • $AB = E\Delta$ και $AE = B\Delta$, το ΑΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

- $AE \perp E\Delta$ το ΑΕΔΒ έχει μία γωνία ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως $BO = \dfrac{BE}{2} = \dfrac{A\Delta}{2}$.

Άρα $2BO = A\Delta$.

ii. Από το i. έχουμε $BO = AO = O\Delta$, επομένως, τα Α, Β, Δ ισαπέχουν από το Ο.

Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ.

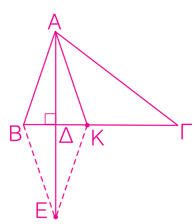
Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

193 Θέμα 2 - 1681

α. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η ΕΑ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$, επομένως το Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ της $\hat{A}$.

β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα ΕΑ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ, οπότε το Ε ισαπέχει από τα Β και Γ.

194 Θέμα 2 - 1570



α. Στο τρίγωνο ΑΒΚ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Είναι $\Delta A = \Delta E$ και $\Delta B = \Delta K$, οπότε το ΑΚΕΒ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει $AB = AK$ είναι ρόμβος.

195 Θέμα 2 - 1679

α. Το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της ΒΓ.
Στο τετράπλευρο ΑΓΟΒ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.
Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β. Είναι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$, $ΟΓ = ΑΓ$ και $ΟΒ = ΑΒ$.
Οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΑΒ είναι ισόπλευρα.
Άρα στο ΑΓΟΒ είναι $\hat{Β} = \hat{Γ} = 60^\circ$ και $\hat{Ο} = \hat{Α} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

196 Θέμα 1630

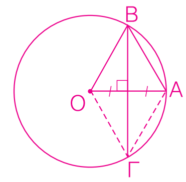
α. Επειδή η ΔΕ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ έχουμε $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:
- $ΜΑ = ΜΒ$
- $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Β}Ε$ ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα.

γ. Από το **β.** ερώτημα προκύπτει $ΑΔ = ΕΒ$, οπότε το ΑΔΒΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

197 Θέμα 2 - 1584



α. Είναι:
- $ΟΑ = ΟΒ = ρ$
- $ΒΟ = ΒΑ$, αφού η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ

Άρα $ΟΑ = ΟΒ = ΒΑ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

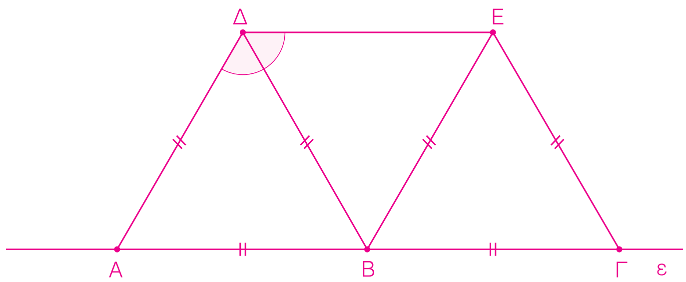
β. Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΟΑ , οπότε $ΓΑ = ΓΟ = ρ$
Επομένως $ΟΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΟ = ρ$.
Άρα το ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

198 Θέμα 2 - 1575

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
- $ΑΔ = ΑΒ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ = ΑΕ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
- $ΑΖ = ΑΕ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΔ = ΑΒ$. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

199 Θέμα 2 - 13767



α. Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά.
Είναι

$$Α\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Ε + Ε\hat{Β}Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Δ\hat{Β}Ε + 60^\circ = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow Δ\hat{Β}Ε = 60^\circ$$

β. Έχουμε
$ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ$, $ΒΓ = ΒΕ = ΓΕ$ και $ΑΒ = ΒΓ$

Οπότε $ΒΔ = ΒΕ$, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ , οπότε $Β\hat{Δ}Ε = Β\hat{Ε}Δ$.

Στο τρίγωνο $B\Delta E$ ισχύει:

$$B\hat{\Delta}E + B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}E + B\hat{\Delta}E + 60^o = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{\Delta}E = 120^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}E = 60^o \text{ άρα και } B\hat{E}\Delta = 60^o$$

Αφού οι γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$ είναι ίσες με 60^o το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι $\Delta E = BE = B\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $A\Delta EB$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $A\Delta = AB = \Delta E$ άρα είναι ρόμβος.

200 Θέμα 2 - 13832

α. i. Είναι: • $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}B$

• $A\widehat{M}B + \Gamma\widehat{M}B = 180^o \Leftrightarrow 2A\widehat{M}B = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{M}B = 90^o$. Άρα $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}B = 90^o$. Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

ii. Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

β. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, επομένως κάθε πλευρά έχει μήκος 30 : 4 = 7,5 μέτρα. Επομένως, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε 30 – 7,5 = 22,5 μέτρα φράχτη.

201 Θέμα 2 - 13842

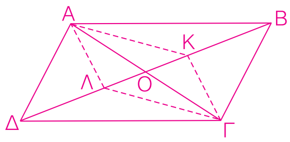
α. Το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος, οπότε η διαγώνιος του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του $A\hat{B}Z$, άρα $A\hat{B}H = Z\hat{B}H = 51^o$.

β. Είναι $A\hat{B}Z = A\hat{B}H + Z\hat{B}H = 102^o$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $A\hat{B}Z = 102^o$ και $B\hat{A}H = 78^o$, των ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ΑΒ είναι παραπληρωματικές. Επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

γ. Η ΓΔ τέμνει κάθετα την ε_2, άρα τέμνει κάθετα και την ε_1 που είναι παράλληλη της ε_2.

Επομένως το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο, άρα $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{E} = 90^o - 56^o = 34^o$.

202 Θέμα 4 - 1840



α. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του ΑΒΓΔ. Επειδή $OB = O\Delta$ και $BK = \Delta\Lambda$ είναι

$OB - BK = O\Delta - \Delta\Lambda \Leftrightarrow OK = O\Lambda$.

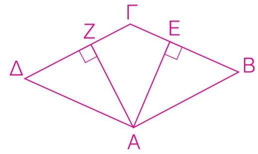
Αφού $OK = O\Lambda$ και $OA = O\Gamma$, το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $A\Gamma \perp B\Delta$, οπότε και στο παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ είναι $A\Gamma \perp K\Lambda$. Άρα το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ. Το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ είναι ορθογώνιο, όταν $A\Gamma = K\Lambda \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{1}{3}B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 3A\Gamma$.

203 Θέμα 4 - 1740

α. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $AE \perp B\Gamma$, $AZ \perp \Delta\Gamma$



Απόδειξη πρότασης Π1:

• Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:

• $A\Delta = AB$

• $\hat{\Delta} = \hat{B}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

Απόδειξη πρότασης Π2:

• Έστω ότι $AE = AZ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

- $AZ = AE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$ αφού το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AB$.

Επομένως το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

204 Θέμα 4 - 1844

α. Είναι:
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = \hat{\varphi}$
- $A\hat{\Delta}B$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2\hat{\varphi}$

Επειδή η ΔE είναι η διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$, έχουμε $E\hat{\Delta}A = \dfrac{A\hat{\Delta}B}{2} = \dfrac{2\hat{\varphi}}{2} = \hat{\varphi}$.

Επομένως $E\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $E\Delta // A\Gamma$.

β. Είναι $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}Z = \varphi$, αφού η $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$.

Οπότε $E\hat{A}\Delta = E\hat{\Delta}A = \varphi$, άρα το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $\Delta E // AZ$ και $Z\Delta // AE$, το $AZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοι του $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται.

205 Θέμα 4 - 1823

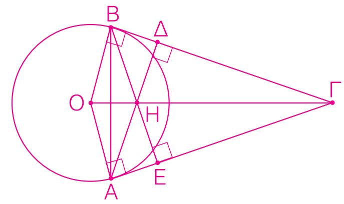
α. Είναι $A\Gamma = B\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

Τα ορθογώνια τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ έχουν:

- ΑΒ κοινή
- $A\hat{B}\Delta = B\hat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}E = B\hat{A}\Delta$.



Επομένως το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

β. Είναι:
- $OA = OB = \rho$
- $OA \perp A\Gamma$ και $BE \perp A\Gamma$, οπότε $OA // BE$
- $OB \perp B\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $OB // A\Delta$

Επειδή $OA // BH$ και $OB // AH$, το $OBHA$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $OA = OB$ είναι ρόμβος.

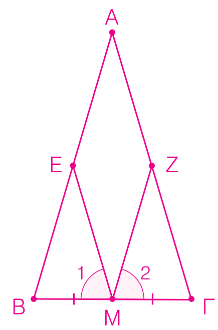
γ. Αφού $OA = OB$, $HA = HB$ και $\Gamma A = \Gamma B$, τα Ο, Η και Γ ανήκουν στη μεσοκάθετο του BA , οπότε είναι συνευθειακά.

206 Θέμα 4 - 1869

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Delta$ $(\hat{B} = 90^o)$ και ΓAE $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ έχουν:
- $AB = \Gamma E$
- $B\Delta = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AE$.

β. Τα τρίγωνα AKZ και $A\Theta K$ έχουν:
- $AZ = A\Theta$ ως μισά ίσων τμημάτων
- AK κοινή
- $Z\hat{A}K = K\hat{A}\Theta$, αφού η Αδ διχοτόμος



Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $KZ = K\Theta$.

γ.
- $K\Theta = KZ$, από το **β.** ερώτημα
- $KZ = AZ$, από υπόθεση
- $AZ = A\Theta$, ως μισά ίσων τμημάτων.

Άρα $K\Theta = KZ = AZ = A\Theta$, οπότε το $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

207 Θέμα 4 - 13745

α. i. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε:

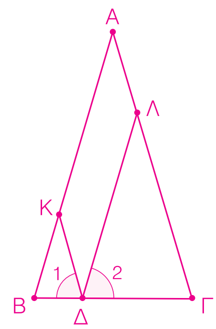
- $ME // A\Gamma$, οπότε το E θα είναι μέσο της ΑΒ και $ME = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1)
- $MZ // AB$, θα είναι Z το μέσο της ΑΓ και $MZ = \dfrac{AB}{2}$ (2)

Είναι $AB = A\Gamma$, οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ME = MZ$.

ii. Είναι $ME // A\Gamma$ ή $ME // AZ$ και $MZ // AB$ ή $MZ // AE$, οπότε το τετράπλευρο $AEMZ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ME και MZ είναι ίσες, οπότε το $AEMZ$ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου είναι $AE + EM + MZ + AZ = 4AE = 4\dfrac{AB}{2} = 2AB$.



β. i. Οι απέναντι πλευρες του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ είναι παράλληλες, άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Θα αποδείξουμε ότι το $AK\Delta\Lambda$, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του $B\Gamma$ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

- Είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$.

Οπότε το $BK\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $K\Delta = KB$, (1).

- Είναι $\hat{B} = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$ (2).

Επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$, θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο M της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες).

Οι πλευρές ΔK και $\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα.

Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ είναι

$AK + K\Delta + \Delta\Lambda + \Lambda A = AK + KB + \Gamma\Lambda + \Lambda A = AB + A\Gamma = AB + AB = 2AB$

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερή και ίση με $2AB$.

208 Θέμα 4 - 13857

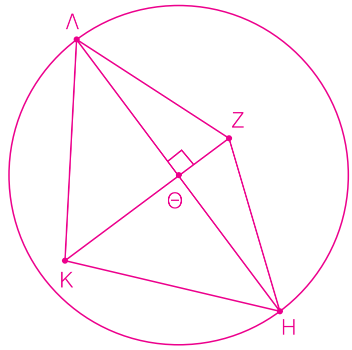
α. Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ, άρα ΑΜ = ΜΓ.

Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, οπότε οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι οι $B\Delta \perp A\Gamma$, οπότε οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

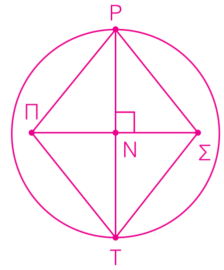
β. Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α., άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.



Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.

Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος. Πράγματι ισχύει ΚΘ > ΘΖ, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, επομένως δεν είναι και ρόμβος.



γ. Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και ΠΝ = ΝΣ, από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β.) που αποδείχθηκε στο α. το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.

209 Θέμα 2 - 1651

α. i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Οπότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $B\hat{E}A = B\hat{A}E$

Στο τρίγωνο ΒΕΑ έχουμε $B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A = 30^o \Leftrightarrow B\hat{E}A = 15^o$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- $BE = \Gamma\Delta$, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 60^o + 90^o = 150^o = A\hat{B}E$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε $AE = A\Delta$. Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

210 Θέμα 2 - 1652

α. Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = A\Gamma$ από υπόθεση. Άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές έχουμε $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $E\hat{A}\Gamma + A\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = 180^o \Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 180^o$

$$\Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + 90^o + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A = 90^o - B\hat{A}\Gamma$$

211 Θέμα 2 - 1643

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $BZ = AE$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

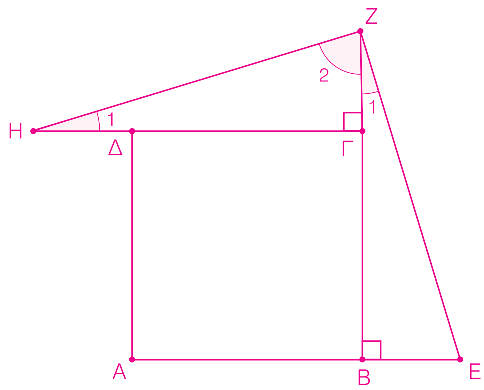
Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ, είναι ίσα έχουμε $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}B$.

Είναι $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{Z}B$.

212 Θέμα 2 - 13536

α. Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:



- $E\hat{B}Z = Z\hat{\Gamma}H = 90^o$
- $BE = \Gamma Z$
- $BE = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και BE , ΓZ.

Οπότε είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα $ZE = ZH$.

β. Από την ισότητα των τρίγωνων BEZ και ΓZH έχουμε ότι $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1$ (1),

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓZH έχουμε $\hat{H}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o$ (2).

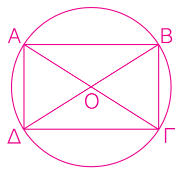
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o \Leftrightarrow E\hat{Z}H = 90^o$.

213 Θέμα 2 - 14883

α. Είναι $OA = O\Gamma = OB = O\Gamma = \rho$.

Στο $AB\Gamma\Delta$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες αφού $A\Gamma = B\Delta = 2\rho$.

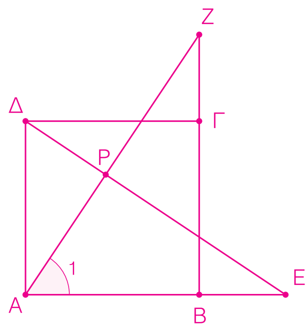
Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



β. Για να είναι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο, πρέπει να είναι και ρόμβος , οπότε πρέπει οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$ να είναι και κάθετες.

214 Θέμα 4 - 13744

α. i. Είναι $AB = B\Gamma$ και $BE = \Gamma Z$, οπότε $AE = BZ$ (1) , ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.



Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και ABZ έχουν:

- $\Delta\hat{A}E = A\hat{B}Z = 90^o$,
- $A\Delta = AB$,
- $AE = BZ$,

Άρα είναι ίσα, οπότε $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}A$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ είναι $\hat{A}_1 = B\hat{Z}A = 90^o$, αλλά $B\hat{Z}A = A\hat{E}\Delta$, οπότε

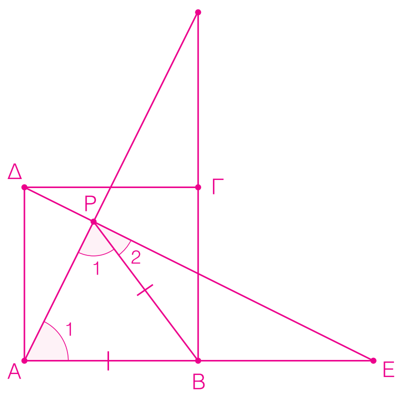
$\hat{A}_1 + A\hat{E}\Delta = 90^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 + A\hat{E}P = 90^o$

Στο τρίγωνο AEP το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o, οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o.

Δηλαδή $A\hat{P}E = 90^o$, άρα τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β. Είναι: • $PB = AB$, άρα το τρίγωνο BAP είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{P}_1$.

- $\hat{A}_1 + A\hat{E}P = 90^o \Leftrightarrow \hat{P}_1 + A\hat{E}P = 90^o$ (1)
- $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 90^o$ (2)

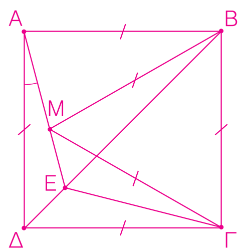


Από τις (1) και (2) έχουμε $A\hat{E}P = \hat{P}_2 \Leftrightarrow B\hat{E}P = \hat{P}_2$, άρα το τρίγωνο BEP είναι ισοσκελές με
$EB = PB \Leftrightarrow BE = AB$.

Άρα η θέση του σημείου E προσδιορίζεται στην προέκταση του AB ώστε $BE = AB$.

215 Θέμα 4 - 1814

α. Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $M\hat{B}\Gamma = 60^o$



Έχουμε $A\hat{B}M + M\hat{B}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}M = 30^o$.

Είναι:
- $BM = B\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $MB\Gamma$
- $BA = B\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

Επομένως $BA = BM$, οπότε το τρίγωνο BAM είναι ισοσκελές, άρα $B\hat{A}M = B\widehat{M}A$.

Στο τρίγωνο ABM έχουμε $A\hat{B}M + B\hat{A}M + B\widehat{M}A = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2B\hat{A}M = 180^o \Leftrightarrow B\hat{A}M = 75^o$.

Οπότε $\Delta\hat{A}E = 90^o - B\hat{A}M = 90^o - 75^o = 15^o$.

β. Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:
- ΔΕ κοινή
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}\Gamma$ αφού η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε $\Delta\widehat{A}E = \Delta\widehat{\Gamma}E \Leftrightarrow \Delta\widehat{\Gamma}E = 15^o$ (1) .

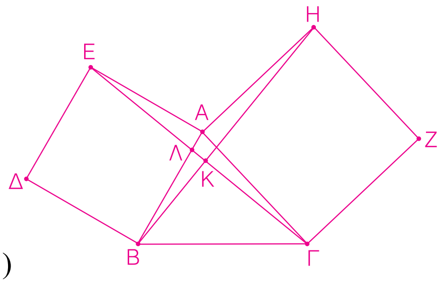
Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο είναι $B\widehat{\Gamma}M = 60^o$.

Έχουμε $\Delta\widehat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{\Gamma}E + E\widehat{\Gamma}M + B\widehat{\Gamma}M = 90^o \Leftrightarrow 15^o + E\widehat{\Gamma}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{\Gamma}M = 15^o$, (2).

Από (1) και 2) έχουμε $\Delta\widehat{\Gamma}E = E\widehat{\Gamma}M$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{\Gamma}M$.

216 Θέμα 4 - 1788

α. Είναι $E\widehat{A}H = 360^o - E\widehat{A}B - H\widehat{A}\Gamma - B\widehat{A}\Gamma = 360^o - 90^o - 90^o - (180^o - A\widehat{B}\Gamma - A\widehat{\Gamma}B) = A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B$



β. Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ έχουν:
- $EA = AB$
- $A\Gamma = AH$
- $E\widehat{A}\Gamma = B\widehat{A}H = 90^o + B\widehat{A}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $E\Gamma = BH$

γ. Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ , ΒΗ και Λ το σημείο τομής των ΑΒ , ΕΓ αρκεί να δείξουμε ότι $B\widehat{K}\Lambda = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}K + B\widehat{\Lambda}K = 90^o$, (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ είναι ίσα έχουμε $A\widehat{B}K = A\widehat{E}\Gamma$.

Είναι $B\widehat{\Lambda}K = A\widehat{\Lambda}E$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΛ είναι $A\widehat{E}\Lambda + A\widehat{\Lambda}E = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}K + B\widehat{\Lambda}K = 90^o$.

Οπότε η (1) ισχύει.

217 Θέμα 4 - 1795

α. Επειδή $MA = M\Lambda$ και $MB = M\Gamma$, το ΑΓΛΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma\Lambda = AB$.

Είναι $AB = AE$, ως πλευρές τετραγώνου, οπότε $\Gamma\Lambda = AE$.

β. Είναι:
- $A\widehat{\Gamma}\Lambda = \widehat{\Gamma} + B\widehat{\Gamma}\Lambda = \widehat{\Gamma} + \widehat{B}$, αφού $B\widehat{\Gamma}\Lambda = \widehat{B}$, ως εντός εναλλάξ
- $E\widehat{A}H = 360^o - E\widehat{A}B - H\widehat{A}\Gamma - \widehat{A} = 360^o - 90^o - 90^o - \widehat{A} = 180^o - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$

Οπότε $A\widehat{\Gamma}\Lambda = E\widehat{A}H$.

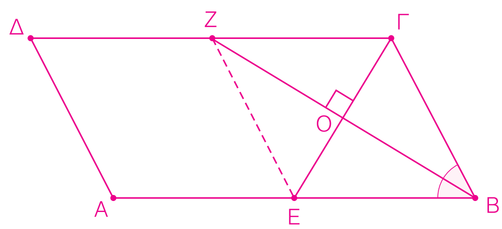
γ. Τα $\overset{\Delta}{A\Gamma\Lambda}$ και $\overset{\Delta}{EAH}$ έχουν:
- $A\Gamma = AH$
- $\Gamma\Lambda = AE$, από το **α.** ερώτημα
- $A\widehat{\Gamma}\Lambda = E\widehat{A}H$, από το **β.** ερώτημα

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Lambda\widehat{A}\Gamma = A\widehat{H}E$, (1).

Αρκεί να δείξουμε ότι $A\widehat{P}H = 90^o \Leftrightarrow P\widehat{A}H + P\widehat{H}A = 90^o$.

Είναι $\Lambda\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}H + P\widehat{A}H = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} A\widehat{H}E + 90^o + P\widehat{A}H = 180^o \Leftrightarrow P\widehat{H}A + P\widehat{A}H = 90^o$.

218 Θέμα 4 - 13850



α. Η ΒΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και $BO \perp \Gamma E$.
Επομένως, η ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

β. Τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ έχουν:
- $\Gamma\hat{O}Z = E\hat{O}B = 90^o$
- $O\Gamma = OE$
- $Z\hat{\Gamma}O = B\hat{E}O$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

γ. Από τη σύγκριση στο ερώτημα **β.** έχουμε ΟΖ = ΟΒ και είναι ΟΓ = ΟΕ. Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες είναι ρόμβος.

δ. Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ.) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\hat{B} = 90^o$.

219 Θέμα 4 - 1750

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ έχουν:
- $A\Delta = \Delta\Gamma$
- $AN = \Gamma M$

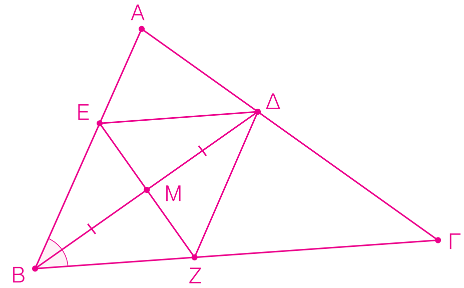
Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta N = \Delta M$.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουμε $M\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}N$.

Είναι $\Gamma\hat{\Delta}N = \Delta\hat{N}A$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $M\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}N + \Delta\hat{N}A = 90^o$, άρα $\Delta N \perp \Delta M$.

220 Θέμα 4 - 13841



α. Είναι: • ΔΕ//ΒΓ άρα $\Delta\hat{B}Z = E\hat{\Delta}B$ ως εντός εναλλάξ
- ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$, άρα $\Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{B}E$

Οπότε $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E$, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ = ΕΔ.

β. Τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ έχουν:
- $BM = M\Delta$
- $\Delta\hat{B}Z = E\hat{\Delta}B$, ως εντός εναλλάξ
- $B\widehat{M}Z = \Delta\widehat{M}E$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε ΒΖ = ΔΕ.
Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΒΖ=//ΔΕ, άρα και ΒΕ//ΖΔ

γ. Έχουμε ΒΕ = ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

δ. Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\hat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

221 Θέμα 4 - 1734

α. Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:
- $H\Delta = AE = BE = \Gamma H$, ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
- $\Theta\Delta = \Theta A = BZ = \Gamma Z$ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ΑΒΓΔ)
- $H\hat{\Delta}\Theta = \Theta\hat{A}E = E\hat{B}Z = Z\hat{\Gamma}H = 360^o - 90^o - 2\cdot 60^o = 150^o$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta H = HZ = ZE = E\Theta$.

Επομένως το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

β. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε $AB = A\Delta$.

Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΕΒ είναι $A\Theta = A\Delta$ και $AE = AB$, οπότε $A\Theta = AE$.

Δηλαδή, το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\widehat{Θ}Ε = Α\widehat{Ε}Θ$ και είναι

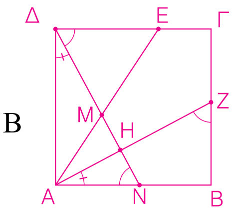
$Α\widehat{Θ}Ε + Α\widehat{Ε}Θ + Θ\widehat{Α}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow 2Α\widehat{Θ}Ε + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Θ}Ε = 15^\circ$.

Όμοια, στο τρίγωνο ΔΘΗ, είναι $Η\widehat{Θ}Δ = 15^\circ$.

Τότε $Ε\widehat{Θ}Η = Δ\widehat{Θ}Η + Ε\widehat{Θ}Α + Α\widehat{Θ}Δ = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$.

Επομένως ο ρόμβος έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

222 Θέμα 4 - 1825



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $ΑΒΖ$ $(\widehat{Β} = 90^\circ)$, είναι $Α\widehat{Ζ}Β + Ζ\widehat{Α}Β = 90^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Ζ}Β = 90^\circ - Ζ\widehat{Α}Β$
- $ΑΗΝ$ $(Α\widehat{Η}Ν = 90^\circ)$, είναι $Α\widehat{Ν}Η + Η\widehat{Α}Ν = 90^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Ν}Η = 90^\circ - Η\widehat{Α}Ν \Leftrightarrow Α\widehat{Ν}Δ = 90^\circ - Ζ\widehat{Α}Β$

Επομένως, $Α\widehat{Ζ}Β = Α\widehat{Ν}Δ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΝ$ και $ΑΒΖ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΑΒ$
- $Α\widehat{Ζ}Β = Α\widehat{Ν}Δ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Στο τρίγωνο $ΑΜΝ$ η $ΑΗ$ είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $ΑΜ = ΑΝ$.

Είναι:
- $Ε\widehat{Δ}Ν = Α\widehat{Ν}Δ$, ως εντός εναλλάξ
- $Α\widehat{Ν}Δ = Α\widehat{Μ}Ν$, αφού το τρίγωνο $ΑΜΝ$ είναι ισοσκελές
- $Α\widehat{Μ}Ν = Δ\widehat{Μ}Ε$, ως κατακορυφήν

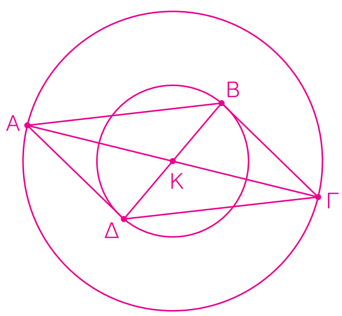
Άρα $Ε\widehat{Δ}Ν = Δ\widehat{Μ}Ε$, οπότε $ΔΕ = ΕΜ$.

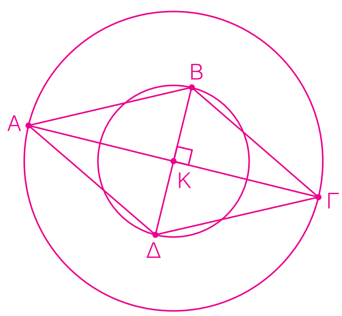
γ. Είναι:
- $ΑΕ = ΕΜ + ΑΜ = ΔΕ + ΑΝ$.
- $ΑΝ = ΒΖ$, αφού τα τρίγωνα $ΑΔΝ$ και $ΑΒΖ$ είναι ίσα.

Άρα $ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ$.

223 Θέμα 4 - 13848

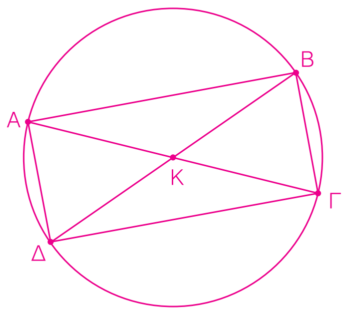
α. i. Είναι ΒΚ = ΚΔ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ) και ΑΚ = ΚΓ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ. Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.





ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους.

Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».



β. Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε ΑΓ = ΒΔ. Οπότε οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες, επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του **β.**.

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής αφού το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.

224 Θέμα 2 - 1589

α. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+40^\circ+60^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=80^\circ$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε:
- Δ, E τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $\Delta E \,//\, A\Gamma$
- E, Z τα μέσα των $B\Gamma$, $A\Gamma$ οπότε $EZ \,//\, AB$

γ. Είναι $B\hat{\Delta}E=\hat{A}=80^\circ$ και $B\hat{E}\Delta=\hat{\Gamma}=60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

225 Θέμα 2 - 1608

α. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ+70^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=70^\circ$.

Οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ μέσο AB, E μέσο $A\Gamma$, οπότε $\Delta E=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma=18$

γ. Είναι:
- $A\Gamma=2E\Gamma=2\cdot 16=32$ και
- $AB=A\Gamma=32$

Η περίμετρος είναι $\Pi=32+32+18=82$.

226 Θέμα 2 - 14877

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $B\Gamma \,//\, \Delta E$.

β. Επειδή τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$ έχουμε $\Delta E=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma=18$.

γ. Είναι $A\Delta=\Delta B=10$, $E\Gamma=AE=8$, οπότε $AB=20$ και $A\Gamma=16$ άρα:
- $\Pi_{AB\Gamma}=AB+B\Gamma+A\Gamma=20+18+16=54$
- $\Pi_{\Delta E\Gamma B}=\Delta E+E\Gamma+\Gamma B+B\Delta=9+8+18+10=45$

Επομένως $\Pi_{AB\Gamma}>\Pi_{\Delta E\Gamma B}$.

227 Θέμα 2 - 1611

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ μέσο $B\Gamma$, E μέσο $A\Gamma$, οπότε $\Delta E \,//\, AB$.

β.i. Έχουμε $\hat{x}=\hat{B}=50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

ii. Επειδή $\Delta E \,//\, AB$, είναι $\hat{A}=\Delta\hat{E}\Gamma=70^\circ$.

Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ+50^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=180^\circ-120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=60^\circ$.

228 Θέμα 2 - 1583

α. Έχουμε:

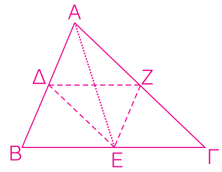
- Στο τρίγωνο OAB είναι Z μέσο OA, H μέσο OB, οπότε $ZH=\dfrac{AB}{2}$
- Στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι E μέσο $O\Delta$, Θ μέσο $O\Gamma$, οπότε $E\Theta=\dfrac{\Gamma\Delta}{2}$
- Στο τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι H μέσο OB, Θ μέσο $O\Gamma$, οπότε $H\Theta=\dfrac{B\Gamma}{2}$
- Στο τρίγωνο $OA\Delta$ είναι E μέσο $O\Delta$, Z μέσο OA, οπότε $EZ=\dfrac{A\Delta}{2}$.

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $AB=\Gamma\Delta$, άρα $ZH=E\Theta$ και $A\Delta=B\Gamma$, άρα $H\Theta=EZ$.
Επομένως το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Έχουμε $AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=40$.

Είναι $EZ+ZH+H\Theta+\Theta E=\frac{A\Delta}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{B\Gamma}{2}+\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{A\Delta+AB+B\Gamma+\Gamma\Delta}{2}=\frac{40}{2}=20$.

229 Θέμα 2 - 1566



α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E, Z είναι τα μέσα των ΓB, ΓA, οπότε $EZ \mathbin{//=} \frac{AB}{2}$ (1).

Επομένως $EZ \mathbin{//=} B\Delta$, άρα το ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από την (1) έχουμε $EZ \mathbin{//=} A\Delta$, οπότε το $ZE\Delta A$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του ΑΕ και ΔΖ διχοτομούνται.
Οπότε η ΔZ διχοτομεί το AE.

230 Θέμα 2 - 1564

α. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:

- $BE=\Gamma Z$, ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
- $B\Delta=\Gamma\Delta$, διότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των $B\Gamma$, AB, οπότε $\Delta E \mathbin{//=} \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E \mathbin{//=} AZ$. Άρα το $AE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\Delta E=AZ=AE$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

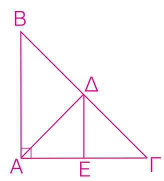
231 Θέμα 2 - 1560

α. Επειδή $\Delta A=\Delta\Gamma$ και $\Delta E=\Delta M$ το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, επομένως $A\hat{M}\Gamma=90^\circ$.
Άρα το $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $\Delta Z\perp AM$ και $\Gamma M\perp AM$ οπότε $\Delta Z//\Gamma M$.
Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ το Δ είναι μέσο του $A\Gamma$ και $\Delta Z//M\Gamma$, οπότε το Z είναι μέσο της AM και

$$\Delta Z=\frac{M\Gamma}{2}\Leftrightarrow \Delta Z=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}\Leftrightarrow \Delta Z=\frac{B\Gamma}{4}.$$

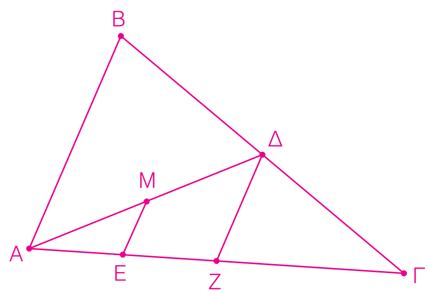
232 Θέμα 2 - 1542



α. Επειδή $\Delta E//AB$ και $AB\perp A\Gamma$, είναι $\Delta E\perp A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $\Delta E//AB$, οπότε το E είναι μέσο της $A\Gamma$ και $\Delta E=\frac{AB}{2}=\frac{A\Gamma}{2}$.

233 Θέμα 2 - 12639



α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι το Δ μέσο $B\Gamma$ και $\Delta Z//AB$.
Επομένως το Ζ είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ.

β. • Το Ζ είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, οπότε $AZ=\frac{A\Gamma}{2}$ (1).

• Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το M είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η $ME//\Delta Z$.

Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα

$$AE = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{A\Gamma}{4}$$

234 Θέμα 2 - 13532

α. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $A\Delta$, άρα $ZH // \Gamma\Delta$ (1) και $ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{AB}{2}$.

β. Το Ε είναι το μέσο της AB, οπότε $AE = \frac{AB}{2}$ και αφού $ZH = \frac{AB}{2}$, έχουμε $AE = ZH$.

Είναι $AE // \Gamma\Delta$ (2), γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $AE // ZH$.

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

235 Θέμα 4 - 1803

α. Είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΓΑΜ είναι ισοσκελές, άρα $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε

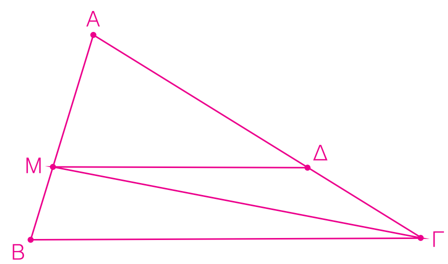
$$M\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\Gamma M}{2} = MK$$

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $\Lambda M // A\Gamma$, άρα $\Lambda\hat{M}A = M\hat{A}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

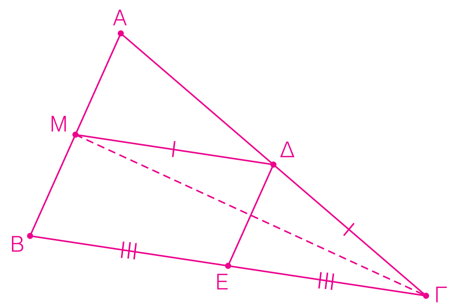
Έχουμε $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$, οπότε $\Lambda\hat{M}A = A\hat{M}\Gamma$

Άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $\Lambda\hat{M}K$.

236 Θέμα 4 - 13743



α. Είναι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.



β. Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$, τότε $\Delta\hat{M}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}M$.

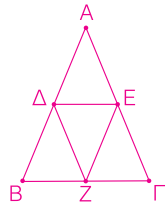
Στο ερώτημα **α.** αποδείξαμε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}M = B\hat{\Gamma}M$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Ομως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

γ. Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και $M\Delta // B\Gamma$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $\Delta E // MB$.

Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

237 Θέμα 4 - 1726



α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Είναι $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1) και $ZE = \dfrac{AB}{2}$ (2).

Άρα $\Delta Z = ZE$, οπότε το ΔZE είναι ισοσκελές.

β.i. • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.

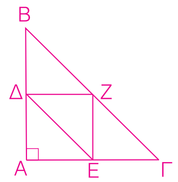
• Απόδειξη

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (3).

Επειδή $AB = B\Gamma = A\Gamma$ από τις (1), (2) και (3) έχουμε $Z\Delta = ZE = \Delta E$.

Άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

ii. • Διατύπωση



Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

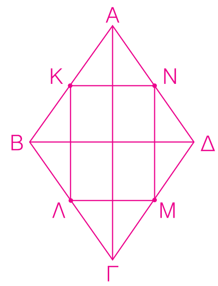
• Απόδειξη

Έστω ότι $\widehat{A} = 90^\circ$.

Από το **α.** ερώτημα είναι $Z\Delta = ZE$, άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

Επειδή $Z\Delta \,//\, A\Gamma$, $ZE \,//\, AB$ και $AB \perp A\Gamma$, προκύπτει ότι $\Delta Z \perp EZ$. Άρα $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$, επομένως το $\overset{\Delta}{\Delta Z E}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

238 Θέμα 4 - 1798



α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα K, Λ είναι μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $K\Lambda \,//\, A\Gamma$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ τα K, N είναι μέσα των AB, $A\Delta$, οπότε $KN \,//\, B\Delta$.

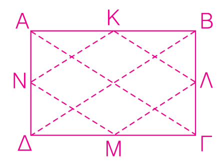
Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα Λ, M είναι μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta$, οπότε $\Lambda M \,//\, B\Delta$.

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα M, N είναι μέσα των $\Gamma\Delta, A\Delta$, οπότε $MN \,//\, A\Gamma$.

Άρα $K\Lambda \,//\, MN$ και $KN \,//\, \Lambda M$ και συνεπώς το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $KN \,//\, B\Delta$, $K\Lambda \,//\, A\Gamma$ και $A\Gamma \perp B\Delta$, αφού είναι διαγώνιοι του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$.

Οπότε $KN \perp K\Lambda$. Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

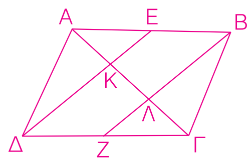


β. Το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στα τρίγωνα $AB\Delta$, $AB\Gamma$ τα N, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, AB και $B\Gamma$, άρα $KN = \dfrac{B\Delta}{2}$, $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$ το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα $A\Gamma = B\Delta$, οπότε $KN = K\Lambda$.

Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

239 Θέμα 4 - 1728



α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε

$$AB \,//=\, \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} \,//=\, \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow BE \,//=\, \Delta Z \ .$$

Άρα το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $\Delta E \,//\, BZ$, οπότε $A\hat{E}\Delta = E\hat{B}Z$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά

• $AB \,//\, \Gamma\Delta$ οπότε $E\hat{B}Z = B\hat{Z}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ

Άρα $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

γ. • Στο τρίγωνο $ΑΒΛ$ το $Ε$ είναι το μέσο του $ΑΒ$ και $ΕΚ // ΒΛ$, οπότε το $Κ$ είναι μέσο του $ΑΛ$, άρα $ΚΑ = ΚΛ$.
• Στο τρίγωνο $ΔΚΓ$ το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΓΔ$ και $ΖΛ // ΔΚ$, οπότε το $Λ$ είναι μέσο του $ΚΓ$, άρα $ΚΛ = ΛΓ$.
Επομένως $ΑΚ = ΚΛ = ΛΓ$ δηλαδή οι $ΔΕ$ και $ΒΖ$ τριχοτομούν την $ΑΓ$.

240 Θέμα 4 - 1802

α. • Στο τρίγωνο $ΓΒΝ$ έχουμε τα $Μ$, $Λ$ τα μέσα των $ΓΒ$, $ΓΝ$, οπότε $ΜΛ // ΒΝ$.

- Στο τρίγωνο $ΑΜΛ$, το $Κ$ είναι το μέσο του $ΑΜ$ και $ΚΝ // ΜΛ$, οπότε το $Ν$ είναι το μέσο του $ΑΛ$.

β. Είναι $Κ\hat{Μ}Γ = Γ\hat{Μ}Λ + Λ\hat{Μ}Α = Μ\hat{Β}Κ + Α\hat{Κ}Ν$, αφού:

- $ΜΛ // ΒΚ$, άρα $Γ\widehat{Μ}Λ = Μ\hat{Β}Κ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $ΜΛ // ΚΝ$, άρα $Λ\widehat{Μ}Α = Α\widehat{Κ}Ν$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

γ. Από το **α.** έχουμε $ΚΝ = \dfrac{ΜΛ}{2} = \dfrac{\frac{ΒΝ}{2}}{2} = \dfrac{ΒΝ}{4}$.

Οπότε $ΒΝ = 4ΚΝ \Leftrightarrow ΒΚ + ΚΝ = 4ΚΝ \Leftrightarrow ΒΚ = 3ΚΝ$.

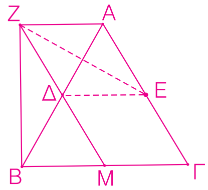
241 Θέμα 4 - 1868

α. Τα τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΒΜΔ$ έχουν:
- $ΔΑ = ΔΒ$
- $ΔΖ = ΔΜ$
- $Α\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Δ}Μ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΔΖ = ΔΜ$, το $ΖΑΜΒ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Οπότε $ΖΑ // = ΒΜ \Rightarrow ΖΑ // = ΜΓ$, άρα το $ΖΑΓΜ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΔΕ // = \dfrac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΔΕ // = ΜΓ \Rightarrow ΔΕ // = ΖΑ$.
Άρα το $ΖΑΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα $ΖΕ$ και $ΑΔ$ διχοτομούνται.



Είναι:
- $ΔΕ = ΖΑ$ και $ΖΑ = ΜΓ$, άρα $ΔΕ = ΜΓ$
- $ΜΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = \dfrac{ΑΓ}{2} = ΑΕ$

Οπότε $ΔΕ = ΑΕ$, άρα το $ΖΑΕΔ$ είναι ρόμβος, επομένως $ΖΕ \perp ΑΔ$.

δ. Στο τρίγωνο $ΖΑΒ$ η $ΖΔ$ είναι διάμεσος $ΖΔ = ΔΜ = \dfrac{ΑΓ}{2} = \dfrac{ΑΒ}{2}$.

Οπότε $Β\hat{Ζ}Α = 90^\circ$, άρα $ΒΖ \perp ΖΑ$.

242 Θέμα 4 - 1801

α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Δ$, $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΒΓ$, $ΑΓ$, $ΑΒ$, οπότε $ΔΕ // ΒΖ$ και $ΖΕ // ΒΔ$.
Άρα το $ΖΕΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $Ζ\hat{Β}Μ = Μ\hat{Β}Δ$ και $Μ\hat{Β}Δ = Ζ\widehat{Μ}Β$, ως εντός εναλλάξ, άρα $Ζ\hat{Β}Μ = Ζ\widehat{Μ}Β$, οπότε το τρίγωνο $ΒΖΜ$ είναι ισοσκελές.

- $Ε\hat{Ν}Μ = Ζ\hat{Β}Μ$, ως εντός εναλλάξ και $Ζ\hat{Β}Μ = Ζ\hat{Μ}Β = Ν\hat{Μ}Ε$, άρα $Ε\widehat{Ν}Μ = Ν\widehat{Μ}Ε$.

Οπότε το $\overset{\triangle}{ΜΕΝ}$ είναι ισοσκελές

γ. Είναι $ΒΖ + ΝΕ = ΖΜ + ΜΕ = ΖΕ = ΒΔ = ΔΓ$.

243 Θέμα 4 - 1889

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$ και το AH είναι διάμεσος.

Επειδή $HB = H\Delta$ και $HA = HZ$, το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται
Επειδή επιπλέον είναι $AB = A\Delta$, το $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

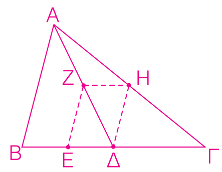
β. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι H, Θ τα μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$, οπότε $H\Theta // \Gamma\Delta$.

Είναι $A\Delta // BZ$ οπότε $\Gamma\Delta // BZ$. Επομένως $H\Theta // BZ$.

γ. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα H, Θ είναι μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$ οπότε

$$H\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}\ , \text{ αφού } A\Delta = AB\ .$$

244 Θέμα 4 - 1898



α. Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, τα Z, H είναι τα μέσα των $A\Delta$, $A\Gamma$, οπότε

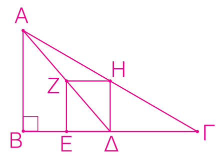
$ZH // = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow ZH // = \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow ZH // = \Delta E$, άρα το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

β. Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΔEZH ρόμβος, αρκεί να είναι $ZH = ZE$ (1).

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ τα E, Z είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$, οπότε $ZE = \frac{AB}{2}$.

$$H\ (1) \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AB \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{2} = AB \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB\ .$$

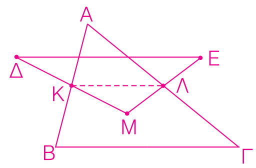
Οπότε το ΔEZH είναι ρόμβος, όταν $B\Gamma = 2AB$.



γ. Αν $\hat{B} = 90^o$, τότε $AB \perp B\Gamma$.

Επειδή $ZE // AB$, έχουμε $ZE \perp B\Gamma$, δηλαδή $Z\hat{E}\Gamma = 90^o$.
Άρα το παραλληλόγραμμο ΔEZH είναι ορθογώνιο.

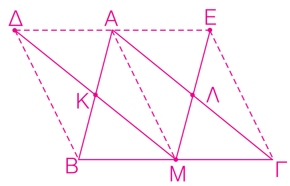
245 Θέμα 4 - 1741



α. Τα K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών:

- AB, ΑΓ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οπότε $K\Lambda // B\Gamma$
- ΜΔ, ΜΕ στο τρίγωνο $M\Delta E$, οπότε $K\Lambda // \Delta E$

Άρα $\Delta E // B\Gamma$.

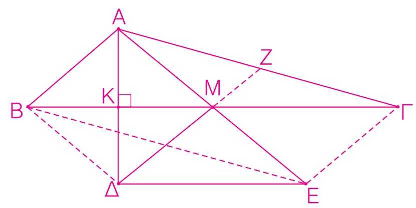


β. • Επειδή $KA = KB$ και $KM = K\Delta$ το ΔAMB είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$.

- Επειδή $M\Lambda = \Lambda E$ και $\Lambda\Gamma = \Lambda A$ το ΑΕΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE // B\Gamma$.

Από ο Α διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη ΒΓ, άρα τα Δ, A, E είναι συνευθειακά.

246 Θέμα 4 - 1873



α. Στο τρίγωνο ΑΔΕ, τα K, M είναι τα μέσα των $A\Delta$, AE, οπότε

$KM // \Delta E$ και $KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM$.

Είναι $KM // \Delta E$ και $KM \perp A\Delta$, άρα $\Delta E \perp A\Delta$.

β. Επειδή $MA = ME$ και $MB = M\Gamma$, το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Είναι $AB = AM$, οπότε το $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές και επειδή το AK είναι ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επειδή $KB = KM$ και $KA = K\Delta$, το $AM\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $A\Delta \perp BM$ είναι ρόμβος.

δ. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η $\Delta M // AB$, οπότε τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της Z.

247 Θέμα 4 - 1723

α. Το $\overset{\Delta}{AB H}$ είναι ισοσκελές, αφού η AE είναι διχοτόμος και ύψος.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{ABH}$ είναι ισοσκελές και η AE είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι μέσο του BH. Στο $\overset{\Delta}{BH\Gamma}$ τα E, M είναι τα μέσα των BH, $B\Gamma$, επομένως $EM // H\Gamma$.

γ. Στο $\overset{\Delta}{BH\Gamma}$ τα E, M είναι τα μέσα των BH, $B\Gamma$, οπότε $EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

248 Θέμα 4 - 1804

α. • Στο τρίγωνο ΔAB τα M, K είναι τα μέσα των $A\Delta, \Delta B$, οπότε $MK = \frac{AB}{2}$.

• Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ τα K, N είναι τα μέσα των $\Delta B, B\Gamma$, οπότε και $KN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $MK = KN$, αφού $AB = \Gamma\Delta$.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι $MK // AB$ και $KN // \Delta Z$.

Επειδή $KM = KN$ έχουμε $K\hat{M}N = K\hat{N}M$.

Είναι: • $M\hat{E}A = K\hat{M}N$ ως εντός εναλλάξ

• $M\hat{Z}\Delta = K\hat{N}M$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Άρα $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$.

249 Θέμα 4 - 1775

α. Είναι $\Delta N // MB$ και $M\Delta // BN$, οπότε το $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι $BN = M\Delta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε το N είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ το N είναι μέσο της $B\Gamma$ και $NZ // BE$, οπότε το Z είναι το μέσο του ΓE.

γ. Είναι $\Delta Z // ME$ και $ME \perp E\Gamma$, άρα $\Delta Z \perp E\Gamma$.

Στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ το ΔZ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta E = \Delta\Gamma$.

250 Θέμα 4 - 1832

α. i. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ, M είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta M // = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta M // = BE$.

Άρα το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο, προκύπτει $\Delta B = ME$, $\Delta M = BE$.

Είναι $A\hat{\Delta}M = \hat{B} = \Gamma\hat{E}M$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έχουμε: • $Z\Delta = \frac{AB}{2} = \Delta B = ME$

• $EH = \frac{B\Gamma}{2} = BE = \Delta M$.

Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH έχουν:
• $Z\Delta = ME$
• $\Delta M = EH$
• $Z\hat{\Delta}M = M\hat{E}H = 90^o + \hat{B}$.

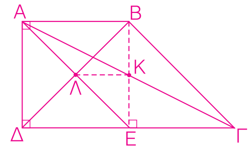
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, τότε $\Delta E \perp AB$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $\Delta E // A\Gamma$.

Άρα $\Gamma A \perp AB$, οπότε $\hat{A} = 90^o$.

251 Θέμα 4 - 1727



α. Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε
$\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^o$.

β. Το ΑΒΕΔ έχει τρεις γωνίες ορθές $\hat{A}=\hat{\Delta}=\hat{E}=90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.
Άρα $B\Delta=AE$.

γ. Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta E=AB$.
Έχουμε $\Delta\Gamma=2AB \Leftrightarrow \Delta\Gamma=2\Delta E$, άρα το Ε είναι το μέσο του ΓΔ , οπότε $AB=\Delta E=E\Gamma$.

Αφού $AB // = E\Gamma$, το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το Κ είναι το μέσο της διαγωνίου του ΑΓ .
Επειδή το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, το Λ είναι το μέσο της διαγωνίου του ΑΕ .

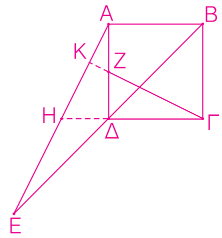
Στο $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΓ , ΑΕ οπότε $K\Lambda=\frac{1}{2}E\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Delta=\frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

252 Θέμα 4 - 1766

α. Στο τρίγωνο ΕΑΒ το Δ είναι το μέσο του ΒΕ και $\Delta H // AB$, οπότε το Η είναι μέσο του ΑΕ, άρα $\Delta H=\frac{AB}{2}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν:
- $A\Delta=\Gamma\Delta$
- $H\Delta=Z\Delta$, ως μισά ίσων τμημάτων

Οπότε είναι ίσα.



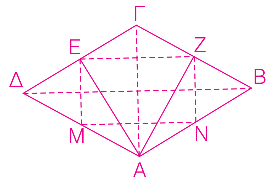
γ. Αν η ΓΖ τέμνει την ΑΕ στο Κ , αρκεί να δείξουμε ότι
$A\hat{K}Z=90^o \Leftrightarrow A\hat{Z}K+Z\hat{A}K=90^o$.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΗ , ΖΔΓ είναι ίσα έχουμε $Z\hat{A}K=Z\hat{\Gamma}\Delta$.

Είναι $A\hat{Z}K=\Delta\hat{Z}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΓ είναι $\Delta\hat{Z}\Gamma+Z\hat{\Gamma}\Delta=90^o \Leftrightarrow A\hat{Z}K+Z\hat{A}K=90^o$.

253 Θέμα 4 - 1743



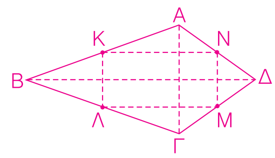
α. i. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι
$E\hat{\Gamma}A=A\hat{\Gamma}Z=60^o$.
Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και έχουν μία γωνία 60^o , άρα είναι ισόπλευρα.
Τα ύψη ΑΕ, ΑΖ στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

ii. Στο τρίγωνο ΓΒΔ τα Ε , Ζ είναι τα μέσα των ΓΔ , ΓΒ , οπότε $EZ // B\Delta$.
Είναι $B\Delta \perp A\Gamma$, άρα $A\Gamma \perp EZ$.

β. Επειδή τα Ε , Ζ , Μ , Ν είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , το ΕΜΝΖ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΔΓΑ τα Ε , Μ είναι τα μέσα των ΔΓ, ΔΑ οπότε $EM // \Gamma A$.

Αφού $\Gamma A \perp EZ$ έχουμε $EM \perp EZ$, επομένως $M\hat{E}Z=90^o$, οπότε το ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.

254 Θέμα 4 - 1745



α. Επειδή $BA=B\Gamma$ έχουμε $B\hat{A}\Gamma=B\hat{\Gamma}A$.
Είναι $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}A$ ως διαφορές ίσων γωνιών.

Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta A\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$, αφού το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές.
Οπότε η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ , άρα $A\Gamma \perp B\Delta$.

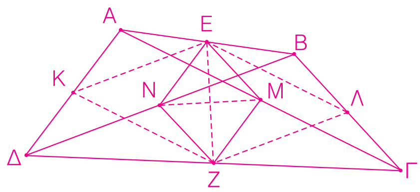
γ. Αν K , Λ , M , N τα μέσα των AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , τότε το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $K\Lambda // A\Gamma$, οπότε $KN // B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$ είναι $K\Lambda \perp KN$, οπότε $\hat{\Lambda K N} = 90^o$.
Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

255 Θέμα 4 - 1773

α. Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$, τα E , M και N, Z είναι τα μέσα πλευρών τους αντίστοιχα.

Οπότε $EM // = \frac{B\Gamma}{2}$ και $NZ // = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $EM // = NZ$.



Επομένως το $EMZN$ είναι παραλληλόγραμμο.
Στο $\overset{\Delta}{BA\Delta}$ τα E, N είναι μέσα των AB, BΔ άρα $EN = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = NZ$.

Επομένως το $EMZN$ είναι ρόμβος.

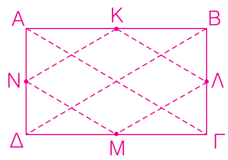
β. Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, οπότε η EZ είναι η μεσοκάθετος του MN .

γ. Επειδή τα K , E , Λ , Z είναι τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$, το $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε $KE = \Lambda Z$.

δ. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $K\Lambda$, EZ του παραλληλογράμμου $KE\Lambda Z$.
Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος η διαγώνιος MN θα διέρχεται από το μέσο O του EZ, που διέρχεται και η KΛ.
Άρα τα $K\Lambda$, MN , EZ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

256 Θέμα 4 - 1794

α. Αφού K , Λ , M , N είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA έχουμε:
$K\Lambda // = \frac{A\Gamma}{2}$, $\Lambda M // = \frac{B\Delta}{2}$ και $MN // = \frac{A\Gamma}{2}$.



Οπότε $K\Lambda // = MN$, άρα το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \Lambda M$.

Άρα το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β. Για να είναι το $K\Lambda MN$ ρόμβος, αρκεί $K\Lambda = \Lambda M \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$.

Άρα αρκεί το τετράπλευρο να έχει ίσες διαγώνιες

257 Θέμα 4 - 1781

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα O , Z είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Gamma$, οπότε $OZ // AB$, άρα $OZ \perp B\Gamma$.
Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα O, E είναι τα μέσα των AΓ, ΓΔ , οπότε $OE // A\Delta$, άρα $OE \perp \Gamma\Delta$.
Επειδή το $OZ\Gamma E$ έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. Επιπλέον είναι $\Gamma Z = \Gamma E$, ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε το $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

β. Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ το H είναι το κέντρο του, οπότε
$ZH = \frac{1}{2}EZ = \frac{1}{2}O\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{A\Gamma}{4}$.

γ. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Θ, Z είναι τα μέσα των AB , $B\Gamma$, οπότε $\Theta Z // = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta Z // = IH$.

Άρα το $I\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΖΟΓ, η ΖΗ είναι διάμεσος οπότε είναι και ύψος, άρα $Z\hat{H}O = 90^o$.

Επομένως το ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο.

Στο τετράγωνο ΟΖΓΕ έχουμε

$$ZH = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{IH}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{\Theta Z}{2} \Rightarrow \Theta Z = 2\Theta I$$

Έχουμε $ZH = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.

258 Θέμα 4 - 1858

α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BA = B\Delta$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, τα Λ, Κ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ.

Οπότε $\Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = BN$ και $KN = \frac{AB}{2} = \Lambda B$.

Είναι $BA = B\Delta \Leftrightarrow \frac{BA}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Lambda = BN$.

Άρα $BN = B\Lambda = \Lambda K = KN$, οπότε το ΒΛΚΝ είναι ρόμβος.

γ. • Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, τα Λ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΔ, οπότε $\Lambda N // A\Delta$.

• Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\Lambda M // B\Gamma$.

Επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$, είναι $\Lambda M \perp \Lambda N$.

259 Θέμα 4 - 1616

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $AB = A\Gamma = 5$
- $B\Delta = \Gamma E = 5$
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΔ, ΑΓΕ είναι ισοσκελή και τα ΒΚ, ΓΛ είναι ύψη τους αντίστοιχα θα είναι και διάμεσοι, οπότε τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΔ, ΑΕ.

γ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΔ, ΑΕ, άρα έχουμε

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{2} = \frac{12}{2} = 6 .$$

260 Θέμα 4 - 1837

α. Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το $\overset{\Delta}{ABZ}$ είναι ισοσκελές με $BA = BZ$.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος του ΒΔ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι μέσο του ΑΖ.

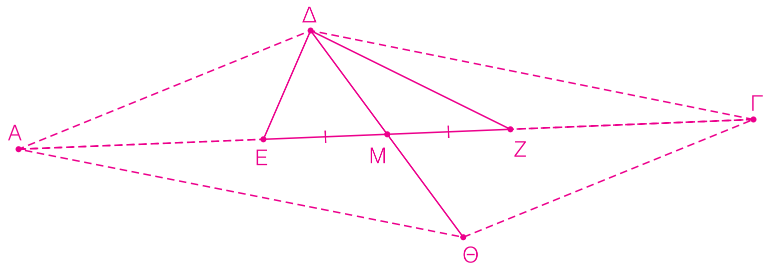
• Στο τρίγωνο ΑΖΓ τα Δ, Μ είναι τα μέσα των ΑΖ, ΑΓ, οπότε:

• $\Delta M // B\Gamma$

• $\Delta M = \frac{\Gamma Z}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

γ. Επειδή $\Delta M // B\Gamma$, έχουμε $E\hat{\Delta}M = E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

261 Θέμα 4 - 13856



α. Είναι $ME = MZ$, και $EA = EZ = Z\Gamma$ άρα: $ME + EA = MZ + Z\Gamma \Leftrightarrow MA = M\Gamma$.

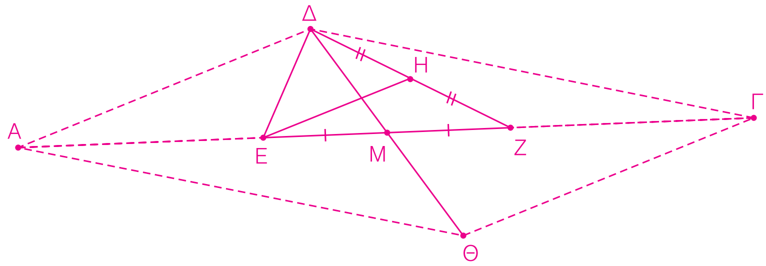
Τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ έχουν:

i. $\Delta M = M\Theta$

ii. $MA = M\Gamma$, ως άθροισμα ίσων τμημάτων $ME + EA$ και $MZ + Z\Gamma$

iii. $\Delta\widehat{M}A = \Theta\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).



β. Το Μ είναι το μέσο του ΔΘ και του τμήματος ΑΓ οπότε στο τετράπλευρο ΘΑΔΓ οι διαγώνιοι ΔΘ και ΑΓ διχοτομούνται στο σημείο Μ.

Άρα το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το Η είναι το μέσο της ΔΖ, αφού η ΕΗ είναι διάμεσος. Έχουμε ΕΑ = ΕΖ, άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΖ. Στο τρίγωνο ΑΔΖ τα σημεία Ε και Η είναι μέσα πλευρών άρα $EH = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow EH = \frac{12}{2} \Leftrightarrow EH = 6$. Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ θα έχει μήκος 6.

262 Θέμα 4 - 1878

α. Επειδή το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, η ΒΚ είναι διάμεσός του.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ζ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $ZK // = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow ZK // = E\Gamma$.

Άρα το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Γ, Ζ είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΒ, οπότε $\Gamma Z // A\Delta \Rightarrow \Gamma\Theta // AH$.

Στο τρίγωνο ΑΒΗ το Ζ είναι το μέσο του ΑΒ και $Z\Theta // AH$, οπότε Θ το μέσο του ΒΗ.

Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Θ, Ε είναι μέσα των ΒΗ, ΒΓ οπότε $\Theta E // H\Gamma \Rightarrow A\Theta // H\Gamma$

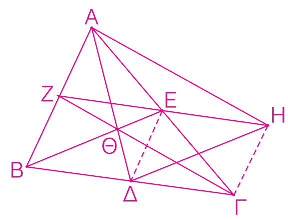
Επομένως το ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $AH = \Theta\Gamma$.

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΗ τα Ζ, Θ είναι μέσα των ΑΒ, ΒΗ οπότε $Z\Theta = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2Z\Theta$.

263 Θέμα 4 - 1820

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ζ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $ZE // = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow EH // = B\Delta$.

Άρα το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.



β. Επειδή το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta H = BE$.

Είναι $EH = ZE$ και $AE = E\Gamma$, άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΖΗ του ΑΗΓΖ διχοτομούνται.

Επομένως το ΑΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Gamma Z = AH$.

Είναι $\Pi_{A\Delta H} = A\Delta + \Delta H + AH = A\Delta + BE + \Gamma Z$.

γ. Αν Θ το κοινό σημείο των διαμέσων στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, και Κ το σημείο τομής των ΔΗ, ΓΖ, τότε στο τρίγωνο:

- ΖΚΗ, το Ε είναι το μέσο του ΖΗ και $E\Theta // KH$, οπότε $Z\Theta = \Theta K$
- ΒΘΓ, το Δ είναι το μέσο του ΒΓ και $\Delta K // B\Theta$, οπότε $\Theta K = K\Gamma$

Άρα $Z\Theta = \Theta K = K\Gamma$.

264 Θέμα 4 - 1760

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ το ύψος $ΑΜ$ είναι και διάμεσος.
Επειδή $ΜΑ = ΜΝ$ και $ΜΒ = ΜΓ$, το $ΑΒΝΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού επιπλέον $ΑΒ = ΑΓ$, το $ΑΒΝΓ$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $ΑΒΝΓ$ είναι ρόμβος, η $ΓΜ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΝ$, οπότε $ΔΑ = ΔΝ$.
Άρα το τρίγωνο $ΑΔΝ$ είναι ισοσκελές.

γ. Στο τρίγωνο $ΑΔΝ$ η $ΔΜ$ είναι διάμεσος και $ΓΔ = ΒΓ = 2ΓΜ$.

Είναι:
- $ΓΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$
- $ΓΔ + ΓΜ = ΔΜ \Leftrightarrow 2ΓΜ + ΓΜ = ΔΜ \Leftrightarrow 3ΓΜ = ΔΜ \Leftrightarrow ΓΜ = \frac{1}{3}ΔΜ$

Οπότε $ΓΔ = \frac{2}{3}ΔΜ$, άρα το $Γ$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΔΝ$.

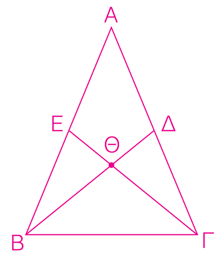
265 Θέμα 4 - 1827

α. Είναι $ΑΕ = ΕΖ$ και $ΕΒ = ΕΔ$, οπότε το $ΑΒΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι $ΒΖ \mathbin{//=} ΑΔ$, οπότε $ΒΖ \mathbin{//=} ΓΔ$.
Άρα το $ΒΔΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Αν $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΒΓ$ και $ΔΖ$ του παραλληλογράμμου $ΒΔΓΖ$, τότε το $Ο$ είναι μέσο της $ΔΖ$.
Οι $ΒΟ$, $ΖΕ$ είναι διάμεσοι του τριγώνου $ΒΔΖ$, οπότε το $Θ$ είναι το βαρύκεντρό του.

266 Θέμα 4 - 1706



Έστω $ΒΔ$, $ΓΕ$ οι διάμεσοι του τριγώνου $ΑΒΓ$.

α. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$
- $\widehat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΔ = ΓΕ$, δηλαδή $μ_β = μ_γ$.

Άρα η Π ισχύει.

β. Διατύπωση

Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $μ_β = μ_γ$, τότε $β = γ$.

Απόδειξη

Έχουμε $μ_β = μ_γ \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}μ_β = \frac{2}{3}μ_γ \\ \frac{1}{3}μ_β = \frac{1}{3}μ_γ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΒΘ = ΓΘ \\ ΘΔ = ΘΕ \end{cases}$

Τα τρίγωνα $ΘΒΕ$ και $ΘΓΔ$ έχουν:
- $ΒΘ = ΓΘ$
- $ΘΕ = ΘΔ$
- $Β\widehat{Θ}Ε = Γ\widehat{Θ}Δ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΕ = ΓΔ \Rightarrow 2ΒΕ = 2ΓΔ \Rightarrow ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή $β = γ$.

γ. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $β = γ$ αν και μόνο αν $μ_β = μ_γ$.

267 Θέμα 4 - 1719

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$ είναι διάμεσοί του, οπότε το I είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα η AI θα διέρχεται από το μέσο της $B\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\Lambda K // = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι μέσα των ΙΒ, ΙΓ οπότε $MN // = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε $\Lambda K = // MN$, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

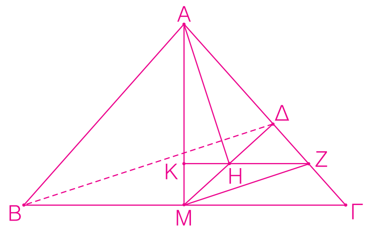
Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ΛΜ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΒΙ οπότε $\Lambda M // AI$.

Τα ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του ύψους, άρα $AI \perp B\Gamma$ και επειδή $B\Gamma // \Lambda K$, θα είναι $AI \perp \Lambda K$.

Επομένως $\Lambda M \perp \Lambda K$, οπότε $M\hat{\Lambda}K = 90^o$.

Άρα το $M\Lambda KN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

268 Θέμα 4 - 1843



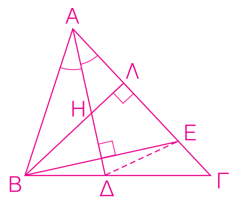
α. Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$, το H είναι το μέσο του ΔM και $HZ // M\Gamma$, οπότε το Z είναι μέσο του ΓΔ, άρα $HZ = \dfrac{M\Gamma}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

β. Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, τα M, Z είναι τα μέσα των $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$, οπότε $MZ // B\Delta$.

γ. Επειδή $ZK // B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, είναι $ZK \perp AM$.

Στο $\overset{\Delta}{AMZ}$ το H είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $AH \perp MZ$. Επειδή $AH \perp MZ$ και $MZ // B\Delta$, έχουμε $AH \perp B\Delta$.

269 Θέμα 4 - 1887



α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = AE$
- $A\Delta$ κοινή
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $AB = AE$ και $\Delta B = \Delta E$, η $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του BE.

γ. Στο τρίγωνο ABE, το H είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $EH \perp AB$.

270 Θέμα 4 - 1748

α. Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε:

- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΕ είναι $\hat{\omega} = 90^o - O\hat{E}A$.
- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\hat{\varphi} = 90^o - O\hat{E}A$.

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα OAE και OBZ έχουν:

- $OA = OB$
- $\omega = \varphi$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ = AE$ και $OZ = OE$.

Επειδή $O\Gamma = OB$ και $OZ = OE$ έχουμε $OZ + O\Gamma = OE + OB \Rightarrow \Gamma Z = BE$.

γ. Στο τρίγωνο EAB τα BZ και AO είναι τα ύψη του, άρα το Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου EAB. Οπότε το EZ είναι στο φορέα του τρίτου ύψους του τριγώνου, άρα $EZ \perp AB$.

271 Θέμα 4 - 1777

α. i. • Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΜΝ = \frac{ΒΓ}{2}$.

• Στο τρίγωνο $ΗΒΓ$ τα $Λ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΗΒ$, $ΗΓ$ οπότε $ΛΚ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα $ΜΝ = ΛΚ$.

ii. Στα τρίγωνα $ΒΑΗ$ και $ΓΑΗ$ τα $Μ, Λ$ και $Ν$, $Κ$ είναι τα μέσα των πλευρών τους.

Οπότε $ΜΛ // \frac{ΑΗ}{2}$ και $ΝΚ // = \frac{ΑΗ}{2}$. Άρα $ΜΛ = ΝΚ = \frac{ΑΗ}{2}$.

iii. Επειδή $ΜΛ // = \frac{ΑΗ}{2}$ και $ΝΚ // = \frac{ΑΗ}{2}$, έχουμε $ΜΛ // = ΝΚ$, οπότε το $ΜΝΚΛ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή το $Η$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$, έχουμε $ΑΗ \perp ΒΓ$.
Επειδή $ΜΛ // ΑΗ$ και $ΑΗ \perp ΒΓ$ είναι $ΜΛ \perp ΒΓ$.

Αφού $ΛΚ // ΒΓ$, έχουμε $ΜΛ \perp ΜΝ$, άρα $Ν\hat{Μ}Λ = 90^o$. Επομένως το $ΜΝΚΛ$ είναι ορθογώνιο.

β. • Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Μ$, $Ο$ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $ΜΟ // ΑΓ$.
• Στο τρίγωνο $ΗΒΓ$ τα $Ο$, $Κ$ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $ΟΚ // ΒΗ$.

Επειδή $ΒΗ \perp ΑΓ$, είναι και $ΟΚ \perp ΜΟ$, οπότε $Μ\hat{Ο}Κ = 90^o$.

272 Θέμα 4 - 1764

α. Είναι $ΑΔ // = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΑΕ$, οπότε $ΑΕ // = ΒΓ$, άρα το $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $ΒΑ \perp ΔΕ$ και $ΔΑ = ΑΕ$ η $ΒΑ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΕΔ$, οπότε $ΒΔ = ΒΕ$.

Είναι $ΑΓ = 2ΒΓ \Leftrightarrow ΒΔ = 2ΑΔ \Leftrightarrow ΒΔ = ΔΕ$.

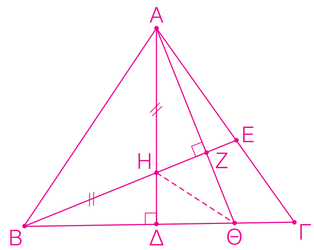
Οπότε $ΒΔ = ΔΕ = ΕΒ$, άρα το τρίγωνο $ΒΕΔ$ είναι ισόπλευρο.

γ. Στο $\overset{\triangle}{ΕΒΔ}$, τα $ΕΟ$ και $ΒΑ$ είναι ύψη, οπότε το $Ζ$ είναι το ορθόκεντρό του. Άρα $ΔΖ \perp ΕΒ$.

273 Θέμα 4 - 1754

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΔΒ$ και $ΗΖΑ$ έχουν:
• $ΗΒ = ΗΑ$
• $Β\hat{Η}Δ = Α\hat{Η}Ζ$.

Άρα είναι ίσα.



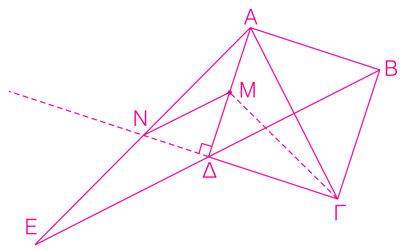
ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΔΘ$ και $ΗΖΘ$ έχουν:
• $ΗΘ$ κοινή
• $ΗΔ = ΗΖ$ από το **i.** ερώτημα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΔΘ = ΘΖ$.

iii. Στο τρίγωνο $ΑΒΘ$ το $Η$ είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $ΘΗ \perp ΑΒ$ και επειδή $ΗΑ = ΗΒ$ η $ΘΗ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$.

β. Τα $ΑΖ$ και $ΒΔ$ είναι ύψη του τριγώνου $ΑΗΒ$ που τέμνονται στο $Θ$.
Άρα το $Θ$ είναι το ορθόκεντρο του τρίγωνου $ΑΗΒ$.

274 Θέμα 4 - 1780



α. Στο τρίγωνο $ΕΑΒ$ το $Δ$ είναι μέσο του $ΒΕ$ και $ΔΝ // ΑΒ$.

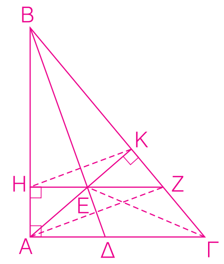
Επομένως το $Ν$ είναι μέσο του $ΑΕ$, οπότε $ΔΝ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΔ}{2} = ΔΜ$.

β. Το τρίγωνο $ΔΝΜ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\widehat{Δ} = 90^o$ και $Δ\widehat{Ν}Μ = Ν\widehat{Μ}Δ = 45^o$.

γ. i. Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ τα $Ν$, $Μ$ είναι μέσα των $ΑΕ$, $ΑΔ$, οπότε $ΜΝ // ΔΕ \Rightarrow ΜΝ // ΒΔ$.
Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$, έχουμε $ΜΝ \perp ΑΓ$.

ii. Στο τρίγωνο $ΑΝΓ$ τα $ΑΔ$ και $ΝΜ$ είναι ύψη του, άρα το $Μ$ είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε $ΓΜ \perp ΑΝ$.

275 Θέμα 4 - 1865



α. i. Επειδή η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$ έχουμε $ΕΗ = ΕΚ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΗΑ$ και $ΕΚΖ$ έχουν:
- $ΕΗ = ΕΚ$
- $Η\hat{Ε}Α = Κ\hat{Ε}Ζ$

Οπότε είναι ίσα.

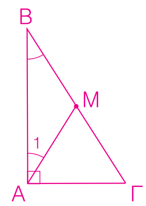
ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΒΕ$ και $ΚΒΕ$ έχουν:
- $ΒΕ$ κοινή
- $Η\hat{Β}Ε = Κ\hat{Β}Ε$

Επομένως είναι ίσα, οπότε $ΒΗ = ΒΚ$.
Άρα το τρίγωνο $ΒΚΗ$ είναι ισοσκελές.

iii. Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ τα $ΑΚ$ και $ΖΗ$ είναι ύψη του, άρα το $Ε$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.
Οπότε $ΒΔ \perp ΑΖ$.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, το ύψος του $ΑΚ$ είναι και διχοτόμος του.
Επομένως το $Ε$ είναι το έγγεντρο του τριγώνου. Άρα η $ΓΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}$.

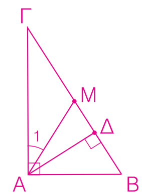
276 Θέμα 2 - 1647



α. Είναι $\hat{B} + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 55^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε
$ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΑΜ = ΜΒ$. Είναι $ΑΜ = ΜΒ$ οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Β} = 35^\circ$ και
$\hat{Α}_1 + \hat{Β} + Α\hat{Μ}Β = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + 35^\circ + Α\hat{Μ}Β = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Μ}Β = 110^\circ$.

277 Θέμα 2 - 1690



α. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^\circ$) ισχύει ότι:
$\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 90^\circ - \hat{Γ}$
Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΔΓ$ ισχύει ότι:
$Γ\hat{Α}Δ + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow Γ\hat{Α}Δ = 90^\circ - \hat{Γ}$.
Οπότε $\hat{Β} = Γ\hat{Α}Δ$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^\circ$) η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.
Οπότε $ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$, άρα $\hat{Γ} = \hat{Α}_1$.
Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΜΓ$, οπότε $Α\hat{Μ}Δ = \hat{Γ} + \hat{Α}_1 = 2\hat{Γ}$.

278 Θέμα 2 - 1586

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΟΑ$ η $ΒΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.
Άρα $ΒΜ = \dfrac{ΟΑ}{2} = ΜΑ$. Άρα το τρίγωνο $ΒΜΑ$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή $ΒΜ = ΜΟ$ έχουμε $Ο\hat{Β}Μ = Β\hat{Ο}Μ$.
Η γωνία $Β\hat{Μ}Α$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΒΜ$, οπότε
$Β\hat{Μ}Α = Ο\hat{Β}Μ + Β\hat{Ο}Μ = x\hat{Ο}Α + x\hat{Ο}Α = 2 \cdot x\hat{Ο}Α$.

279 Θέμα 2 - 1633

α. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^\circ$) η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε
$ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$, άρα $Μ\hat{Α}Γ = \hat{Γ} = 25^\circ$.

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$, οπότε $A\hat{M}B = \hat{\Gamma} + M\hat{A}\Gamma = 2\hat{\Gamma} = 50^o$.

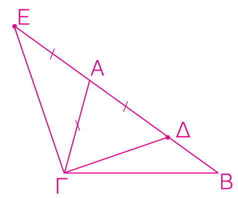
- Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} + 25^o = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 65^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο HAB είναι $H\hat{A}B + \hat{B} = 90^o \Leftrightarrow H\hat{A}B + 65^o = 90^o \Leftrightarrow H\hat{A}B = 25^o$.

- Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} = 25^o + 45^o = 70^o$.

β. Είναι:
- $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma - M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} - M\hat{A}\Gamma = 45^o - 25^o = 20^o$
- $\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{A}B - H\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} - H\hat{A}B = 45^o - 25^o = 20^o$

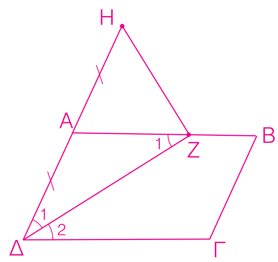
280 Θέμα 2 - 1702



α. Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι $A\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$, οπότε η διάμεσος $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.
Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Γ , άρα $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$.

β. Επειδή $A\Gamma = A\Delta$ το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$.
Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, οπότε $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta = 2A\hat{\Delta}\Gamma$.

281 Θέμα 2 - 1537



α. Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, αφού ΔZ διχοτόμος
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ . Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

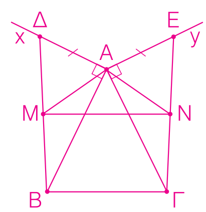
β. Στο $\overset{\triangle}{\Delta ZH}$ είναι $ZA = \frac{\Delta H}{2}$, οπότε η ZA είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.
Άρα το $\overset{\triangle}{\Delta ZH}$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.

282 Θέμα 2 - 1551

α. Στο $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma B}$ είναι $\Gamma A = \frac{B\Delta}{2}$, οπότε η ΓA είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^o$.

β. Στο $\overset{\triangle}{B\Delta E}$ τα A , Γ είναι τα μέσα των $B\Delta$, ΔE , οπότε $A\Gamma \,//\, BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

283 Θέμα 2 - 1555



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $AB = A\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ $(\hat{A} = 90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{B\Delta}{2}$ (1) .
- $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ $(\hat{A} = 90^o)$ η AN είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AN = \frac{\Gamma E}{2}$ (2) .

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$ από τις (1) και (2) προκύπτει $AM = AN$, οπότε το $\overset{\triangle}{AMN}$ είναι ισοσκελές.

284 Θέμα 2 - 1680

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και $EA\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

β.i. Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $EB\Gamma$ οι $M\Delta$ και ME είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $M\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και $ME = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $M\Delta = ME$.

ii. Τα $\overset{\Delta}{MA\Delta}$ και $\overset{\Delta}{MAE}$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $M\Delta = ME$
- MA κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\Delta\hat{M}A = E\hat{M}A$.

Επομένως η AM διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$.

285 Θέμα 2 - 1675

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα KEB και $\Lambda Z\Gamma$ έχουν:
- $KB = \Lambda\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\overset{\Delta}{EBK}$ $(\hat{E} = 90^\circ)$ η EH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $EH = \frac{KB}{2}$ (1) .
- $\overset{\Delta}{Z\Gamma\Lambda}$ $(\hat{Z} = 90^\circ)$ η $Z\Theta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $Z\Theta = \frac{\Gamma\Lambda}{2}$ (2) .

Επειδή $KB = \Gamma\Lambda$ από τις (1) και (2) προκύπτει $EH = Z\Theta$.

286 Θέμα 2 - 1655

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Άρα το $\overset{\Delta}{MA\Gamma}$ είναι ισοσκελές, επομένως $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (1) .

β. Επειδή $Ax // B\Gamma$, είναι $x\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (2) , ως εντός εναλλάξ.

Από τις (1) , (2) προκύπτει $M\hat{A}\Gamma = x\hat{A}\Gamma$, άρα η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}x$.

287 Θέμα 2 - 1685

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Gamma$ $(\hat{B} = 90^\circ)$ και $\Delta A\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$, οι BZ , ΔZ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

Επομένως $BZ = \Delta Z$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$.
Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$.

Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$
- $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

288 Θέμα 2 - 1615

α. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ είναι $\mathrm{E\Delta}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$, οπότε η διάμεσός του $\mathrm{E\Delta}$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $\mathrm{A\hat{E}B}=90^\circ$, επομένως το $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η BE είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε $\mathrm{\Delta E}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\Rightarrow \mathrm{B\Gamma}=2\mathrm{\Delta E}=2\cdot 10=20$.

Η περίμετρος Π του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι: $\Pi=\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Gamma}=20+20+16=56$.

289 Θέμα 2 - 1614

α. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ είναι $\mathrm{E\Delta}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$, οπότε η διάμεσός του $\mathrm{E\Delta}$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $\mathrm{A\hat{E}B}=90^\circ$, επομένως το $\overset{\Delta}{\mathrm{AEB}}$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε $\mathrm{\Delta E}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\Rightarrow \mathrm{B\Gamma}=2\mathrm{\Delta E}=2\cdot 10=20$.

γ. Είναι $\Pi_{\mathrm{AB\Gamma}}=\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}=20+16+20=56$.

290 Θέμα 2 - 1671

α. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ τα Δ , E είναι μέσα των $\mathrm{B\Gamma}$, AB , οπότε $\mathrm{\Delta E}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\Rightarrow \mathrm{A\Gamma}=2\mathrm{\Delta E}=2\cdot 1=2$.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{\mathrm{A}}=90^\circ)$ και $\hat{\mathrm{B}}=30^\circ$, είναι $\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\Rightarrow \mathrm{B\Gamma}=2\cdot 2=4$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $(\hat{\mathrm{A}}=90^\circ)$ η $\mathrm{A\Delta}$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{A\Delta}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=2$.

291 Θέμα 2 - 1548

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $(\hat{\mathrm{A}}=90^\circ)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{AM}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\mathrm{M\Gamma}$. Άρα $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}=\hat{\Gamma}$.

Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{MA\Gamma}}$ είναι $\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}+\hat{\Gamma}+\mathrm{M\widehat{A}\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$, επομένως $\mathrm{AB}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=4\text{ cm}$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AM\Gamma}$ το $\mathrm{M\Delta}$ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε το Δ είναι μέσο του $\mathrm{A\Gamma}$.

Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ τα M , Δ είναι μέσα των $\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε $\mathrm{M\Delta}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=2\text{ cm}$.

292 Θέμα 2 - 1638

α. Επειδή $\mathrm{\Delta B}=\mathrm{\Delta\Gamma}$ είναι $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}B}=\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε $\hat{\Gamma}=2\hat{\mathrm{B}}$.

Είναι $\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}}+2\hat{\mathrm{B}}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\mathrm{B}}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}}=30^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ είναι $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=30^\circ$, οπότε $\mathrm{A\Delta}=\dfrac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{2}=1\text{ cm}$.

Άρα $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}+\mathrm{\Delta B}=1+2=3\text{ cm}$.

293 Θέμα 2 - 1686

α. • Επειδή το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το AE είναι διάμεσος θα είναι και ύψος, οπότε $A\hat{E}\Gamma = 90^o$.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ $(\hat{E} = 90^o)$ η $E\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $E\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta\Gamma$, επομένως το $\overset{\Delta}{E\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 30^o$, $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^o$.

Στο $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ είναι $E\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma = 120^o$.

β. Είναι:

• $E\hat{A}\Delta = 90^o - \hat{\Gamma} = 90^o - 30^o = 60^o$

• $E\Delta = \Delta A$, οπότε $A\hat{E}\Delta = E\hat{A}\Delta = 60^o$.

Επομένως $A\hat{\Delta}E = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Άρα το $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.

294 Θέμα 2 - 1606

α. Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$.

Οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^o = 60^o$.

β. Επειδή στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A} = 90^o$ και AM διάμεσος προς την υποτείνουσα, προκύπτει $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$.

Οπότε το $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ είναι ισοσκελές,.

γ. Είναι $MA = M\Gamma$ άρα $M\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^o$

Στο $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ είναι $A\hat{M}\Gamma + \hat{\Gamma} + M\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{M}\Gamma + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{M}\Gamma = 120^o$

295 Θέμα 2 - 1704

α. Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 120^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 60^o$.

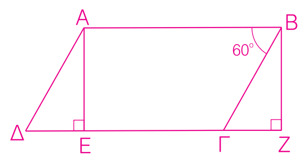
Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 60^o$. Άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ η EZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = AK$.

γ. Επειδή $EZ = Z\Gamma$, είναι $Z\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma} = 60^o$.

Άρα $E\hat{Z}\Gamma = 60^o$.

296 Θέμα 2 - 1691



α. Είναι $BZ \perp \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$ οπότε $AB \perp BZ$.

Άρα $Z\hat{B}\Gamma = A\hat{B}Z - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$, οπότε $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

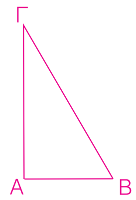
• $A\Delta = B\Gamma$

• $AE = BZ$, ως αποστάσεις παραλλήλων

Άρα είναι ίσα.

γ. Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, γιατί έχει $\hat{B} = \hat{Z} = \hat{E} = 90^o$.

297 Θέμα 2 - 1631



α. Είναι:
- $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$
- $\hat{A}=3\hat{\Gamma}=3\cdot 30^\circ=90^\circ$
- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+\hat{B}+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=60^\circ$

Άρα $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A}=90^\circ)$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$, προκύπτει $AB=\dfrac{B\Gamma}{2}=\dfrac{2}{2}=1\text{ cm}$.

298 Θέμα 2 - 1649

α. Είναι $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$.

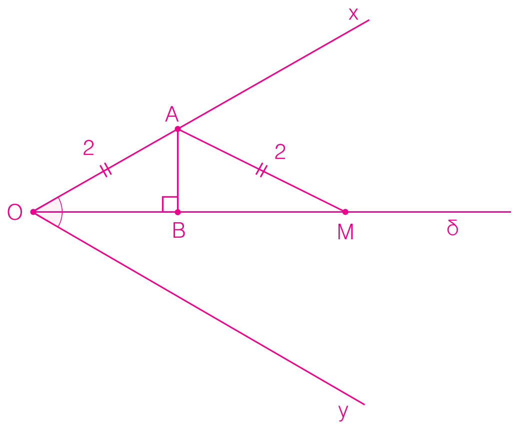
Οπότε $\hat{B}=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $B\hat{A}\Delta+\hat{B}=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=30^\circ$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ είναι $B\hat{A}\Delta=30^\circ$, οπότε $B\Delta=\dfrac{AB}{2}$.

299 Θέμα 2 - 13653

α. Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$, οπότε $x\hat{O}\delta=\delta\hat{O}y=\dfrac{60^\circ}{2}=30^\circ$.



β. Είναι:
- $A\hat{O}M=x\hat{O}\delta=30^\circ$
- $AO=AM$, άρα $A\hat{O}M=A\hat{M}O=30^\circ$
- $A\hat{O}M+A\hat{M}O+M\hat{A}O=180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ+30^\circ+M\hat{A}O=180^\circ$

$$\Leftrightarrow M\hat{A}O=120^\circ$$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $A\hat{O}B=30^\circ$, οπότε,
$AB=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

300 Θέμα 2 - 13828

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα $\Delta\hat{B}A=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta\hat{A}B+\Delta\hat{B}A=90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B=60^\circ$.

β. Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ.

Είναι $A\hat{B}\Delta=B\hat{\Delta}\Gamma=30^\circ$, ως εντός εναλλάξ άρα $A\hat{B}\Delta=B\hat{\Delta}\Gamma=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $B\hat{\Delta}\Gamma=30^\circ$, άρα $B\Gamma=\dfrac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta=2B\Gamma$.

301 Θέμα 2 - 1619

α. Επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ είναι:

- $\omega=B\hat{A}K=60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- $\varphi=180^\circ-90^\circ=90^\circ$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $A\hat{K}B = 180^{\circ} - \hat{\varphi} = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$.

Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ορθογώνιο.

γ. Το $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{K} = 90^{\circ})$ και $K\hat{B}A + K\hat{A}B = 90^{\circ} \Leftrightarrow K\hat{B}A + 60^{\circ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow K\hat{B}A = 30^{\circ}$.

Επομένως $KA = \dfrac{AB}{2} = 3$.

302 Θέμα 2 - 1625

α. Είναι $\Delta\hat{A}Z = \dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \dfrac{180^{\circ} - 60^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 90^{\circ})$ η ΔZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2} = AZ$.

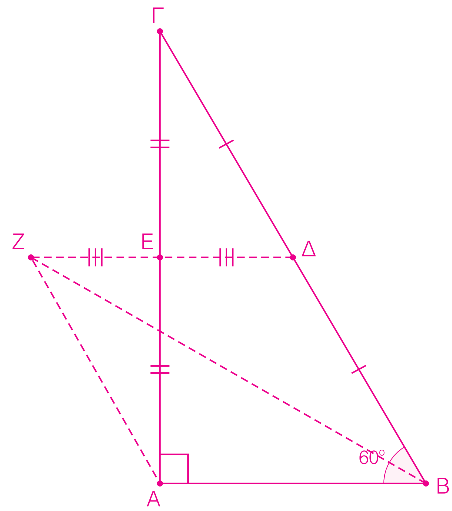
Άρα το $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ είναι ισοσκελές με $\Delta\hat{A}Z = 60^{\circ}$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β. Στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τα E , Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2} = AE$.

Είναι $AE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = \Delta Z$ και $\Delta Z = A\Delta$, οπότε $EZ = AE = \Delta Z = A\Delta$.

Άρα το $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

303 Θέμα 2 - 13837



α. Τα τρίγωνα AEZ και $\Gamma E\Delta$ έχουν:

- $AE = E\Gamma$
- $EZ = E\Delta$
- $A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AZ = \Gamma\Delta$.

β. Είναι $AZ = \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = \Delta B$, άρα $AZ = \Delta B = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 60^{\circ} + \hat{\Gamma} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^{\circ}$ οπότε $AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $AZ = AB$ και το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

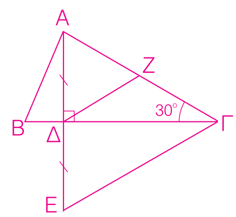
304 Θέμα 2 - 14876

α. Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^{\circ} \Leftrightarrow 120^{\circ} + \hat{\Delta} = 180^{\circ} \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^{\circ}$.

Η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, οπότε $A\hat{\Delta}E = \dfrac{\hat{\Delta}}{2} = \dfrac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ $(\hat{Z} = 90^{\circ})$ είναι $A\hat{\Delta}E = 30^{\circ}$, οπότε $AZ = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{\frac{AB}{2}}{2} = \dfrac{AB}{4}$.

305 Θέμα 2 - 1567



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 90^{\circ})$ η ΔZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

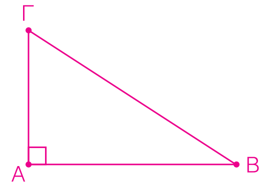
β. Στο $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ η $\Gamma\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές και η $\Gamma\Delta$ διχοτόμος του.

Επομένως $A\hat{\Gamma}E = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 30^{\circ} = 60^{\circ}$.

Άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΕ}}$ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, οπότε είναι ισόπλευρο.

306 Θέμα 2 - 13831

α. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$, οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ.



Έχουμε $ΑΒ > ΑΓ \Leftrightarrow \gamma > \beta$, άρα $\hat{\Gamma} > \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{\Gamma}$.

Οπότε, η γωνία $\hat{B}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

β. i. Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30° η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60°. Αφού η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{B}$. Έχουμε $\hat{B}=30^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$.

ii. Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον $\hat{B}=30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

307 Θέμα 4 - 1812

α. Επειδή οι ΜΔ, ΜΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{BMA}$, $\hat{AM\Gamma}$ έχουμε $\Delta\hat{M}A=\frac{B\hat{M}A}{2}$ και $A\hat{M}E=\frac{A\hat{M}\Gamma}{2}$.

Οπότε $\Delta\hat{M}E=\Delta\hat{M}A+A\hat{M}E=\frac{B\hat{M}A}{2}+\frac{A\hat{M}\Gamma}{2}=\frac{B\hat{M}A+A\hat{M}\Gamma}{2}=\frac{B\hat{M}\Gamma}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$.

β. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΜΕ $(\hat{M}=90^\circ)$ και ΔΑΕ $(\hat{A}=90^\circ)$, οι ΜΚ, ΚΑ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $MK=\frac{\Delta E}{2}$, $KA=\frac{\Delta E}{2}$. Άρα $MK=KA$.

308 Θέμα 4 - 1738

α. Επειδή $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{2\hat{\Gamma}}{2}=\hat{\Gamma}$, οπότε το $\overset{\Delta}{\text{ΒΔΓ}}$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $M\hat{N}\Gamma=\Delta\hat{B}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $M\hat{N}\Gamma=\hat{\Gamma}$, επομένως το $\overset{\Delta}{\text{ΜΝΓ}}$ είναι ισοσκελές.

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΝΓ είναι $MN=M\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}$.

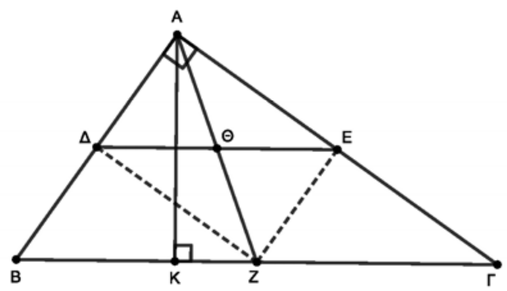
Στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΝΓ}}$, η ΝΜ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{N}=90^\circ$.
Άρα $AN \perp B\Gamma$.

309 Θέμα 4 - 14886

α)

i.



Το τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΕΖ // ΑΒ οπότε και ΕΖ // ΑΔ και $EZ = \frac{AB}{2} = A\Delta$. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΕΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον η γωνία του Α είναι ορθή, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΒΓ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται με Θ το κέντρο του. Άρα $A\Theta = \frac{AZ}{2} = \frac{\Delta E}{2} = \Theta E$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΕ ενώνει τα μέσα των ΑΖ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα $\Theta E = \frac{Z\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

β)

i. Επειδή $Z\hat{E}\Gamma = 90^o$, το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $Z\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^o$.

Η γωνία $A\hat{Z}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα: $A\hat{Z}B = Z\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 60^o$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ ή $\hat{B} = 60^o$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ έχουμε: $B\hat{A}K + \hat{B} = 90^o$ ή $B\hat{A}K = 30^o$. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ είναι $BK = \frac{AB}{2}$ και λόγω της (1) $BK = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}$ ή $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

310 Θέμα 4 - 1831

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

- $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $\hat{B} = 2\cdot 30^o = 60^o$
- $E\hat{B}\Delta = 180^o - \hat{B} = 180^o - 60^o = 120^o$

Το $\overset{\triangle}{BE\Delta}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{E}$ και $E\hat{\Delta}B + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{E} + \hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{E} = 60^o \Leftrightarrow \hat{E} = 30^o$.

Άρα $\hat{\Delta} = \hat{E} = 30^o$ και $E\hat{B}\Delta = 120^o$.

β.i. Το $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{\Delta} = 90^o)$ με $B\hat{A}\Delta = 90^o - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$.

Οπότε $B\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BE = \frac{AB}{2}$.

ii. Είναι $AE = AB + BE = AB + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$.

Οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$.

Είναι $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 2AB - BE = 2AB - \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$. Άρα $AE = \Gamma\Delta$.

311 Θέμα 4 - 1824

α. Στα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ οι διχοτόμοι BK, $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη και διάμεσοι, οπότε τα K, Λ είναι μέσα των $A\Delta$, AE.

β. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K, Λ είναι τα μέσα των $A\Delta$, AE, οπότε $K\Lambda // \Delta E$.

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ το K είναι μέσο της $A\Delta$ και $KM // \Delta B$, οπότε το M είναι μέσο της AB.

Στο $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ το Λ είναι μέσο της AE και $\Lambda N // \Gamma E$, οπότε το N είναι μέσο της $A\Gamma$.

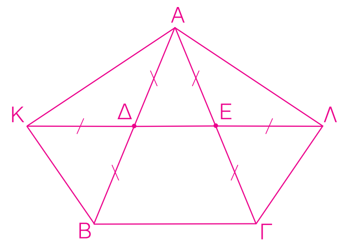
Στα ορθογώνια τρίγωνα KAB και $\Lambda A\Gamma$ οι MK, $N\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

$KM = \dfrac{AB}{2} = MA$ και $\Lambda N = \dfrac{A\Gamma}{2} = NA$. Άρα τα $\overset{\Delta}{KMA}$, $\overset{\Delta}{AN\Lambda}$ είναι ισοσκελή.

γ. Τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $MN = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $K\Lambda = KM + MN + N\Lambda = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{B\Gamma}{2} + \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

312 Θέμα 4 - 1808



α. Είναι $K\Delta = A\Delta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AKB}$ είναι $K\Delta = \dfrac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσος $K\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{K} = 90^o$.

- Στο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι $\Lambda E = \dfrac{A\Gamma}{2}$, οπότε η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\Lambda = 90^o$.

γ. Τα $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ και $\overset{\Delta}{AE\Lambda}$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $\Delta K = E\Lambda$
- $A\hat{\Delta}K = A\hat{E}\Lambda$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{E}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AK = A\Lambda$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ έχουν:
- $AK = A\Lambda$
- $AB = A\Gamma$

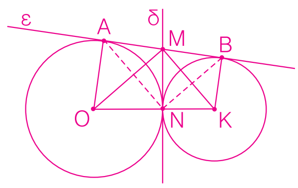
Οπότε είναι ίσα.

313 Θέμα 4 - 1771

α. Είναι:
- $MA = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (O, ρ_1)
- $MB = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (K, ρ_2)

Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB.

β. Οι MO και MK είναι διακεντρικές ευθείες οπότε είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{M}N$ και $B\hat{M}N$. Οπότε:
- $O\widehat{M}N = \dfrac{A\widehat{M}N}{2}$, $N\widehat{M}K = \dfrac{N\widehat{M}B}{2}$
- $O\widehat{M}K = O\widehat{M}N + N\widehat{M}K = \dfrac{A\widehat{M}N + N\widehat{M}B}{2} = \dfrac{A\widehat{M}B}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$



γ. Η NM είναι διάμεσος στο τρίγωνο ANB και $NM = MA = \dfrac{AB}{2}$.

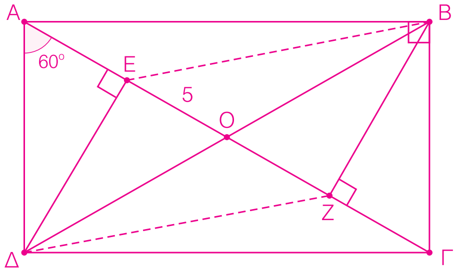
Άρα το τρίγωνο ANB είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}B = 90^o$.

314 Θέμα 4 - 13852

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ έχουν:

- $\Delta\hat{E}O = B\hat{Z}O = 90^\circ$
- $E\hat{O}\Delta = Z\hat{O}B$ (ως κατακορυφήν)
- ΔΟ = ΟΒ (Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



β. Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $O\hat{\Delta}E$ και $O\hat{B}Z$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $E\hat{O}\Delta$ και $Z\hat{O}B$.

Από τη σύγκριση του α. ερωτήματος έχουμε ΕΟ = ΖΟ.

Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$, άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$.

Στο ορθογώνο ΑΒΓΔ είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma O = \Delta O$.

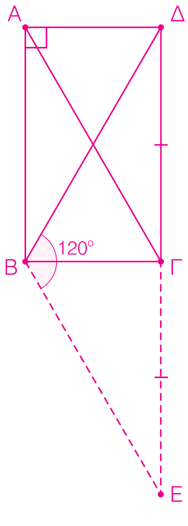
Επομένως το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ και $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$, άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = 120^\circ$ και $\Delta\hat{O}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΟ με ΑΕ = ΕΟ = 5.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $\Delta\hat{A}E = 60^\circ$, οπότε $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$, άρα η $AE = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2AE \Leftrightarrow A\Delta = 10$.

315 Θέμα 4 - 13851

α. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ, ενώ έχουμε ότι ΓΔ = ΓΕ, άρα ΑΒ = ΓΕ. Είναι ΑΒ//ΓΔ άρα και ΑΒ//ΓΕ. Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.



β. Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε ΑΓ = ΒΕ και στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΓ = ΒΔ.

Άρα ΒΕ = ΒΔ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

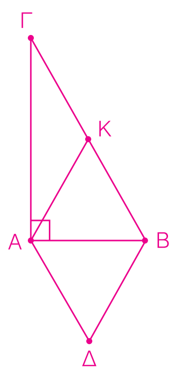
γ. • Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, οπότε ΒΔ = ΒΕ και $B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta = 30^\circ$ αφού $E\hat{B}\Delta = 120^\circ$.

- Το ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΑΓ//ΒΕ συνεπώς $B\hat{E}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$ άρα

$A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta$.

316 Θέμα 4 - 13853

α. Είναι $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$, ως εντός και εναλλάξ.



Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως $\Delta\hat{A}B = 60^\circ$ άρα $A\hat{B}\Gamma = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\hat{\Gamma}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

β. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $AB = A\Delta = B\Delta = \frac{12}{3} = 4$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B = 30^\circ$, επομένως $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ άρα

$B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 4 = 8$.

γ. Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του.

Άρα $ΒΚ = ΑΔ$. Είναι $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε $ΒΚ = ΑΔ = ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$, δηλαδή το Κ είναι το μέσο της ΒΓ.

Η ΑΚ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΑΚ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Είναι $ΒΔ = ΑΒ$ και $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αρα $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε $ΒΔ = ΑΚ$.

Αρα, αν Κ μέσο της ΒΓ τότε ότι ΑΔ = ΒΚ και ΒΔ = ΑΚ, δηλαδή το ΑΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον, εφόσον ΑΔ = ΒΔ το παραλληλόγραμμο ΑΔΒΚ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

317 Θέμα 4 - 1796

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, άρα $ΚΑ \perp ΟΑ$ και $ΚΒ \perp ΟΒ$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΚ $(\hat{Α} = 90^o)$ και ΒΟΚ $(\hat{Β} = 90^o)$ οι ΑΕ , ΒΕ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΕ = \frac{ΟΚ}{2}$ και $ΒΕ = \frac{ΟΚ}{2}$. Άρα $ΑΕ = ΒΕ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι $ΑΚ = ρ = ΕΚ = \frac{ΟΚ}{2}$, οπότε $Α\hat{Ο}Κ = 30^o$.

γ. Είναι $ΑΕ = \frac{ΟΚ}{2}$ και $ΑΚ = \frac{ΟΚ}{2}$ άρα $ΑΕ = ΑΚ$.

Οπότε $ΑΕ = ΑΚ = ΚΒ = ΒΕ$, άρα το ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

318 Θέμα 4 - 1811

α. Οι ΒΔ , ΑΔ είναι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών $Β\hat{Α}Γ$ και $Α\hat{Β}Ε$, οπότε

$$Β\hat{Α}Δ + Α\hat{Β}Δ = \frac{Β\hat{Α}Γ}{2} + \frac{Α\hat{Β}Ε}{2} = \frac{Β\hat{Α}Γ + Α\hat{Β}Ε}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $Β\hat{Α}Δ + Α\hat{Β}Δ + Β\hat{Δ}Α = 180^o \Leftrightarrow 90^o + Β\hat{Δ}Α = 180^o \Leftrightarrow Β\hat{Δ}Α = 90^o$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ $(\hat{Δ} = 90^o)$ η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΜ$.

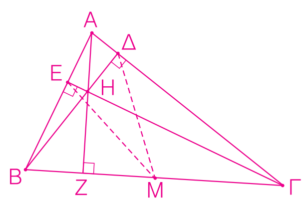
Άρα $Μ\hat{Δ}Α = Μ\hat{Α}Δ$ (1). Στο τρίγωνο ΜΑΔ η γωνία $Β\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική, οπότε

$Β\hat{Μ}Δ = Μ\hat{Δ}Α + Μ\hat{Α}Δ \overset{(1)}{=} 2Μ\hat{Δ}Α$.

γ. Έχουμε $Γ\hat{Α}Δ = Μ\hat{Α}Δ \overset{(1)}{=} Μ\hat{Δ}Α$, οπότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $ΜΔ // ε$.

319 Θέμα 4 - 1716

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ τα ΔΜ , ΕΜ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΕΜ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα $ΜΔ = ΜΕ$.



ii. Επειδή το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $ΑΗ \perp ΒΓ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ είναι $Α\hat{Η}Δ + Η\hat{Α}Δ = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Η}Δ = 90^o - Η\hat{Α}Δ$, (1).

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΑΗ με τη ΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ είναι

$\hat{Γ} + Ζ\hat{Α}Γ = 90^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 90^o - Ζ\hat{Α}Γ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 90^o - Η\hat{Α}Δ$ (2).

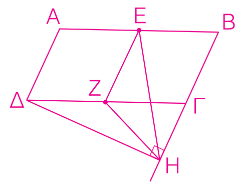
Από τις (1) , (2) έχουμε $Α\hat{Η}Δ = \hat{Γ}$.

2^{ος} τρόπος

Οι γωνίες $A\widehat{H}\Delta$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, άρα $A\widehat{H}\Delta = \widehat{\Gamma}$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος στην ΑΒ είναι το ΗΕ και το ύψος στην ΒΗ είναι το ΑΔ, οι φορείς των οποίων τέμνονται στο Γ. Άρα το ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{AB H}$ είναι το Γ .

320 Θέμα 4 - 1759



α. Είναι $AB // = \Gamma\Delta$, οπότε $\frac{AE}{2} // = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, άρα $AE // = \Delta Z$, επομένως το ΑΕΖΔ .
Είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού επιπλέον $A\Delta = \frac{AB}{2} = AE$, το ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το ΑΕΖΔ είναι ρόμβος, έχουμε $EZ = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΓ $(\hat{H} = 90^o)$, η ΗΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $HZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $EZ = HZ$, οπότε το $\overset{\Delta}{EZH}$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $EZ = HZ$, έχουμε $Z\hat{H}E = Z\hat{E}H$. Αφού $EZ // B\Gamma$, είναι $Z\hat{E}H = E\hat{H}B$ ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Z\hat{H}E = E\hat{H}B$, οπότε η ΗΕ είναι η διχοτόμος της $Z\hat{H}\Gamma$.

321 Θέμα 4 - 1787

α. Είναι $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = B\Gamma = A\Delta$, οπότε $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{M}A$.

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$, είναι $\Delta\hat{M}A = M\hat{A}B$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}B$, οπότε η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$.

β. Τα $\overset{\Delta}{M\Delta E}$ και $\overset{\Delta}{M\Gamma H}$ έχουν:

- $M\Delta = M\Gamma$
- $\Delta\hat{M}E = H\hat{M}\Gamma$
- $E\hat{\Delta}M = M\hat{\Gamma}H$, ως εντός εναλλάξ .

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) , οπότε $ME = MH$.
Επομένως το Μ είναι το κοινό μέσο των ΓΔ και ΕΗ .

γ. Το $\overset{\Delta}{EAH}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90^o)$ και η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{HE}{2} = ME$.

Άρα $\hat{E} = E\hat{A}M$. και αφού $E\hat{A}M = \Delta\hat{M}A$ έχουμε $\hat{E} = \Delta\widehat{M}A$.

322 Θέμα 4 - 1881

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta M = \frac{AB}{2} = MB$.

Επομένως το $\overset{\Delta}{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = M\hat{\Delta}B$.
Είναι $M\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}E$ ως κατακορυφήν και $\Gamma\hat{\Delta}E = \hat{E}$, αφού $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
Άρα $\hat{B} = \hat{E}$.

β. • Η γωνία $\hat{ΑΓΒ}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΕΔ, οπότε $\hat{ΑΓΒ} = \hat{Ε} + \hat{ΓΔΕ} = 2\hat{Ε} \overset{α.}{=} 2\hat{Β}$

• Η γωνία $\hat{ΑΜΔ}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΒ, οπότε $\hat{ΑΜΔ} = \hat{Β} + \hat{ΜΔΒ} = 2\hat{Β}$.
Άρα $\hat{Γ} = 2\hat{Β} = \hat{ΑΜΔ}$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $ΓΔ < ΑΓ$ είναι $ΓΔ = ΓΕ$, οπότε $ΓΕ < ΑΓ$.

323 Θέμα 4 - 1862

α. Το Ο είναι μέσο της ΑΓ, οπότε στο $\overset{\Delta}{ΑΕΓ}$ η ΕΟ είναι διάμεσος και ύψος.
Επομένως το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΒΓ // = ΔΕ$.

Επομένως το ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΕ $(\hat{Ο} = 90^{o})$, η ΟΔ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΟΔ = \frac{ΑΕ}{2} = ΔΑ$, (1).

Επειδή $ΟΔ = ΟΒ$ και $ΔΑ = ΒΓ$, από την (1) έχουμε $ΟΒ = ΒΓ$.

Οπότε το $\overset{\Delta}{ΒΟΓ}$ είναι ισοσκελές.

324 Θέμα 4 - 14881

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΜ, η ΚΝ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2} = ΝΜ$.

Άρα $\hat{ΝΚΜ} = \hat{ΝΜΚ}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^{o})$ η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

Άρα το ΜΑΒ είναι ισοσκελές και επειδή το ΜΚ είναι ύψος θα είναι και η διχοτόμος της $\hat{ΝΜΑ}$.

γ. Έχουμε $ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΜΓ, η ΛΡ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΛΡ = \frac{ΜΓ}{2}$.

Οπότε $ΚΝ + ΛΡ = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΑΜ$.

325 Θέμα 4 - 1880

α. • Στο τρίγωνο ΒΔΚ είναι $ΔΚ = ΚΒ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{ΒΔΚ}$ και η γωνία $\hat{ΔΚΛ}$ είναι εξωτερική,

άρα $\hat{ΔΚΛ} = \hat{Β} + \hat{ΒΔΚ} = 2\hat{Β}$.

• Στο τρίγωνο ΕΛΓ είναι $ΕΛ = ΛΓ$, οπότε $\hat{ΛΕΓ} = \hat{Γ}$ και η γωνία $\hat{ΕΛΚ}$ είναι εξωτερική, άρα

$\hat{ΕΛΚ} = \hat{Γ} + \hat{ΛΕΓ} = 2\hat{Γ}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $ΔΕ // ΒΓ$, άρα $ΔΕ // ΚΛ$ (1) και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Είναι $\hat{ΔΚΛ} + \hat{ΕΛΚ} = 2\hat{Β} + 2\hat{Γ} = 2(\hat{Β} + \hat{Γ}) = 2 \cdot 90^{o} = 180^{o}$.

Επειδή οι $\hat{ΔΚΛ}$, $\hat{ΕΛΚ}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΚΔ, ΕΛ που τέμνονται από την ΚΛ και είναι παραπληρωματικές, έχουμε $ΔΚ // ΕΛ$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι: • $KB = K\Delta = E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

• $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2}$

Οπότε $2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

326 Θέμα 4 - 1859

α. **i.** Επειδή $M \in \mu_1$, έχουμε $MA = MB = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$.

ii. Στο $A\Lambda MK$ είναι $\hat{K} = \hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το $A\Lambda MK$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι $K\Lambda = AM$.

Οπότε $\Lambda\Theta = \dfrac{K\Lambda}{2} = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $K\Lambda // B\Gamma$, άρα $K\Theta // BI$.

Στο ορθογώνιο $A\Lambda MK$ είναι $K\Theta = \Lambda\Theta = \dfrac{B\Gamma}{4} = BI$.

Οπότε $K\Theta // = BI$, άρα το $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

327 Θέμα 4 - 1710

α. **i.** Επειδή $O\Gamma = \Gamma\Delta = O\Delta$, το $\overset{\Delta}{O\Gamma\Delta}$ είναι ισόπλευρο, άρα $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^o$.

ii. Επειδή το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο είναι $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma = 60^o$

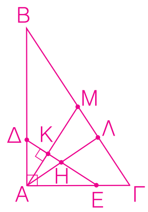
• Στο τρίγωνο ΓOA είναι $O\Gamma = A\Gamma$, οπότε $\Gamma\hat{O}A = \hat{A}$ και η γωνία $O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} + \Gamma\hat{O}A \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} = 30^o$

• Στο τρίγωνο $BO\Delta$ είναι $O\Delta = \Delta B$, οπότε $\Delta\hat{O}B = \hat{B}$ και η γωνία $O\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική , άρα $O\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \Delta\hat{O}B \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^o$.

Άρα $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta = 30^o$.

β. Επειδή $\hat{A} = \hat{B}$ το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $OA = OB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB η διάμεσος OM είναι και ύψος, άρα $OM \perp AB$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο MOA $(\hat{M} = 90^o)$ είναι $\hat{A} = 30^o$, οπότε $OM = \dfrac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$.

328 Θέμα 4 - 1806



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = MB$, άρα $\hat{B} = B\hat{A}M$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ $(\hat{A} = 90^o)$, η AH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AH = \dfrac{\Delta E}{2} = H\Delta$, άρα $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$.

γ. Έστω ότι η AH τέμνει την $B\Gamma$ στο Λ .

Στο τρίγωνο $AB\Lambda$ είναι $B\hat{\Lambda}A + \hat{B} = \Delta\hat{A}H + B\hat{A}M = A\hat{\Delta}K + \Delta\hat{A}K = 90^o$, αφού το τρίγωνο $K A\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Άρα $B\hat{\Lambda}A = 90^o$, οπότε $AH \perp B\Gamma$.

329 Θέμα 4 - 1713

α. i. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=60^\circ$.

Οπότε $A\hat{B}Z=\frac{\hat{B}}{2}=30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{B}+B\hat{A}\Delta=90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+B\hat{A}Z=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}Z=30^\circ$.

Επειδή $A\hat{B}Z=B\hat{A}Z$, το $\overset{\Delta}{ZAB}$ είναι ισοσκελές με $AZ=BZ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔBZ $(\hat{\Delta}=90^\circ)$ είναι $Z\hat{B}\Delta=30^\circ$,

οπότε $Z\Delta=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta-AZ=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta-BZ=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow 2A\Delta-2BZ=BZ \Leftrightarrow 2A\Delta=3BZ \Leftrightarrow A\Delta=\frac{3}{2}BZ$

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{AZE}$ είναι ισόπλευρο, έχουμε $Z\hat{A}E=60^\circ$, οπότε:

- $\hat{A}=30^\circ+60^\circ=90^\circ$
- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+60^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$

330 Θέμα 4 - 14879

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα EAB και $EA\Delta$ $(\hat{E}=90^\circ)$, οι EK και $E\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα.

Οπότε $EK=\frac{AB}{2}=AK$ και $E\Lambda=\frac{A\Delta}{2}=A\Lambda$.

Άρα τα τρίγωνα KEA και ΛEA είναι ισοσκελή, οπότε $A\hat{E}K=E\hat{A}K$ και $\Lambda\hat{E}A=E\hat{A}\Lambda$.

Είναι $K\hat{E}\Lambda=K\hat{E}A+\Lambda\hat{E}A=E\hat{A}K+E\hat{A}\Lambda=K\hat{A}\Lambda=90^\circ$.

ii. Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, $A\Delta$, οπότε $K\Lambda=\frac{B\Delta}{2}$. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο έχουμε $B\Delta=A\Gamma$, οπότε $K\Lambda=\frac{A\Gamma}{2}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ $(\hat{B}=90^\circ)$ έχουμε $B\hat{A}\Gamma=30^\circ$, οπότε $B\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}\overset{\alpha.ii.}{=}K\Lambda$.

331 Θέμα 4 - 1866

α. Είναι:
- $\Delta A=\Delta B$, αφού το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές
- $\Gamma A=\Gamma B$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

Άρα η $\Delta\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του AB .

β. Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $A\hat{\Delta}\Theta=\Theta\hat{\Delta}B=60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta Z=\frac{A\Delta}{2}=ZA$.

Οπότε $Z\hat{\Theta}\Delta=A\hat{\Delta}\Theta=60^\circ$.

Στο ΑΘΓ, είναι: $A\hat{\Gamma}\Theta+\Theta\hat{A}\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta H=\frac{A\Gamma}{2}=H\Gamma$.

Οπότε $H\hat{\Theta}\Gamma=A\hat{\Gamma}\Theta=30^\circ$.

Είναι $Z\hat{\Theta}\Delta+Z\hat{\Theta}H+H\hat{\Theta}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+Z\hat{\Theta}H+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Theta}H=90^\circ$.

2ος τρόπος

- Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔAB έχουμε $\hat{\Delta}=120^\circ$, οπότε $\Delta\hat{B}A=30^\circ$, άρα $\Delta\hat{B}\Gamma=30^\circ+60^\circ=90^\circ$.
- Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$, τα Z, Θ είναι τα μέσα των $A\Delta$, AB, οπότε $Z\Theta \parallel B\Delta$

- Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τα Θ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\Theta H // B\Gamma$

Επειδή $\Delta B \perp B\Gamma$ είναι και $Z\Theta \perp \Theta H$, οπότε $Z\hat{\Theta}H = 90^o$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ είναι $\Theta\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}\Theta = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \Delta\hat{A}\Theta = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Theta = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΖ $(\hat{K} = 90^o)$, είναι $\hat{A} = 30^o$, οπότε

$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{A\Delta}{4}$.

332 Θέμα 4 - 1871

α. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 120^o$, έχουμε:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 60^o \Leftrightarrow \hat{B} = 30^o$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^o$
- $B\hat{A}\Delta = 120^o - 90^o = 30^o$

Άρα $\hat{B} = B\hat{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ $(\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o)$, έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε

$$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} B\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2B\Delta$$

γ. Είναι $\Delta\Gamma = 2\Delta B \Leftrightarrow 2\Delta K = 2\Delta B \Leftrightarrow \Delta K = \Delta B$.

Στο $\overset{\Delta}{ABK}$ τα Λ, Δ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΚ, οπότε $\Lambda\Delta // AK$.

δ. Από το **γ.** ερώτημα είναι και $\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Lambda\Delta$.

333 Θέμα 4 - 1872

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ έχουμε $\hat{B} = 60^o$ και

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$$

Είναι $\Gamma\hat{B}Z = \frac{\hat{B}}{2} = 30^o$, οπότε $\Gamma\hat{B}Z = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.

β. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι $Z\hat{B}A = \frac{\hat{B}}{2} = 30^o$ και ΑΜ η διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AZ = \frac{BZ}{2}$ και $AM = \frac{BZ}{2}$.

Άρα $AM = AZ$.

- Στο $\overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ τα Κ, Μ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΖ, οπότε $KM // \Gamma Z$ και

$$KM = \frac{\Gamma Z}{2} \overset{\alpha.}{=} \frac{BZ}{2} = AZ$$

Άρα $KM // = AZ$, οπότε το ΑΜΚΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $AM = AZ$, είναι ρόμβος.

γ. Στο **β.** ερώτημα έχουμε $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow ZA = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2ZA$.

δ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΛΒΓ $(\hat{\Lambda} = 90^o)$ έχουν:

- ΒΓ κοινή
- $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}\Lambda \ (= 30^o)$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Lambda = A\Gamma$.

334 Θέμα 4 - 1721

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτόμενη, άρα $KB \perp \varepsilon$ και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$.
Είναι $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$ και $K\Delta // B\Gamma$, οπότε $K\Delta \perp \Gamma\Delta$.

Άρα στο $B\Gamma\Delta K$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Gamma\Delta = BK = \rho$.

Είναι:
- $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$.
- $K\Lambda = KA + A\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ $(\hat{\Delta} = 90^o)$ είναι $\Lambda\Delta = 2\rho = \dfrac{4\rho}{2} = \dfrac{K\Lambda}{2}$, οπότε $\Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$.

γ. Επειδή $K\Delta // B\Gamma$, έχουμε $\hat{E} = \Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma E\Lambda$ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ είναι $\hat{E} = 30^o$, οπότε

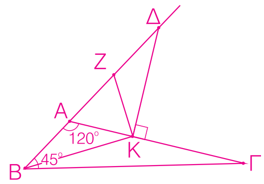
$$\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow 3\rho = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 6\rho$$

335 Θέμα 4 - 1761

α. Είναι $\Delta\hat{A}K = 180^o - 120^o = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{KA\Delta}$ είναι $A\hat{\Delta}K + \Delta\hat{A}K = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K = 30^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$ $(\hat{K} = 90^o)$, είναι $\hat{\Delta} = 30^o$, οπότε $AK = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{2AB}{2} = AB$.



Άρα το $\overset{\Delta}{KAB}$ είναι ισοσκελές.

γ. Το Z είναι το μέσο της $A\Delta$, οπότε $AZ = \dfrac{A\Delta}{2} = AB$.

Οπότε στο $\overset{\Delta}{ZKB}$ η KA είναι διάμεσος και $KA = AB = \dfrac{BZ}{2}$, άρα $Z\hat{K}B = 90^o$.

δ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$, η KZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $KZ = \dfrac{A\Delta}{2} = AK$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $KA\Delta$ και KZB έχουν:
- $A\Delta = BZ$
- $AK = KZ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $KB = K\Delta$. Επομένως το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

336 Θέμα 4 - 1835

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $AB = \dfrac{B\Gamma}{2} = BM$.

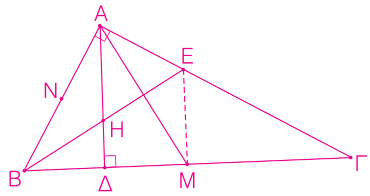
Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE , MBE έχουν:
- $AB = MB$
- BE κοινή

Οπότε είναι ίσα, επομένως $A\hat{B}E = E\hat{B}M$. Άρα η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.

ii. Επειδή η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$, έχουμε $AE = EM$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ $(\hat{M} = 90^o)$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $EM = \dfrac{\Gamma E}{2} \Leftrightarrow AE = \dfrac{\Gamma E}{2}$.

iii. Επειδή $BA = BM$ και $EA = EM$, η BE είναι η μεσοκάθετος του AM .

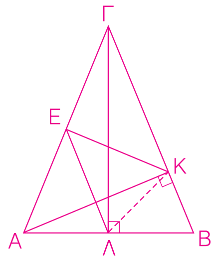
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = MB$.



Επομένως το $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι ισοσκελές με κορυφή M, άρα η διάμεσος MN είναι και ύψος.

Αφού επιπλέον το H είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{ABM}$ το ύψος MN διέρχεται από το H, άρα τα M, H και N είναι συνευθειακά.

337 Θέμα 4 - 1895



α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $K A\Gamma$ $(\widehat{K}=90^{\circ})$ και $\Lambda\Gamma A$ $(\widehat{\Lambda}=90^{\circ})$, οι KE, ΛE είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $KE=\dfrac{A\Gamma}{2}$ (2) και $\Lambda E=\dfrac{A\Gamma}{2}$.

Άρα $KE=\Lambda E$, οπότε το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.

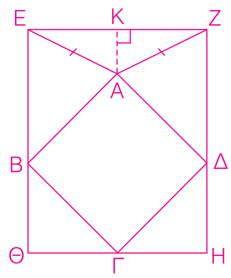
β. Είναι:
- $\Lambda\widehat{K}E=K\widehat{\Lambda}E$, αφού $KE=\Lambda E$
- Λ, E μέσα AB, $A\Gamma$ οπότε $E\Lambda // B\Gamma$, άρα $K\widehat{\Lambda}E=\Lambda\widehat{K}B$, ως εντός εναλλάξ.

Επομένως $\Lambda\widehat{K}E=\Lambda\widehat{K}B$. Άρα η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{K}E$.

338 Θέμα 4 - 1850

α. i. Επειδή το σημείο A βρίσκεται στη μεσοκάθετο του EZ, έχουμε $AE=AZ$, οπότε $A\widehat{E}Z=A\widehat{Z}E$.
Επομένως $A\widehat{E}B=A\widehat{Z}\Delta$, ως διαφορές ίσων γωνιών.
Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ έχουν $A\widehat{E}B=A\widehat{Z}\Delta$ και $E\widehat{B}A=Z\widehat{\Delta}A=45^{\circ}$, οπότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $E\widehat{A}B=Z\widehat{A}\Delta$.
Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ έχουν:
- $AE=AZ$
- $A\widehat{E}B=A\widehat{Z}\Delta$
- $E\widehat{A}B=Z\widehat{A}\Delta$

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).



ii. Επειδή τα τρίγωνα EAB και $ZA\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $AB=A\Delta$.
Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45°, οπότε
$A\widehat{B}E=\Theta\widehat{B}\Gamma=B\widehat{\Gamma}\Theta=\Delta\widehat{\Gamma}H=H\widehat{\Delta}\Gamma=A\widehat{\Delta}Z=45^{\circ}$
Άρα $A\widehat{B}\Gamma=B\widehat{\Gamma}\Delta=\Gamma\widehat{\Delta}A=90^{\circ}$.
Επομένως το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

β. Έστω AK η απόσταση του A από την πλευρά EZ. Είναι $AZ=2AK \Leftrightarrow AK=\dfrac{AZ}{2}$.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο AKZ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως $A\widehat{Z}K=30^{\circ}$.

Επειδή $AE=AZ$ έχουμε $A\widehat{Z}K=A\widehat{E}Z=30^{\circ}$.

Στο τρίγωνο AEZ, είναι $E\widehat{A}Z+A\widehat{E}Z+A\widehat{Z}K=180^{\circ} \Leftrightarrow E\widehat{A}Z+30^{\circ}+30^{\circ}=180^{\circ} \Leftrightarrow E\widehat{A}Z=120^{\circ}$

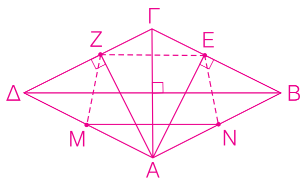
339 Θέμα 4 - 1742

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:
- $AB=A\Delta$, ως πλευρές ρόμβου
- $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες ρόμβου

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ=AE$, επομένως το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

β. Επειδή τα $\overset{\Delta}{ZA\Delta}$ και $\overset{\Delta}{EAB}$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta Z=BE$.
Οπότε και $\Gamma Z=\Gamma E$, αφού $\Gamma\Delta=\Gamma B$.
Επειδή $AZ=AE$ και $\Gamma Z=\Gamma E$, η $A\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του ZE.

γ. Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΔ, ΑΒ, οπότε $MN // B\Delta$.



Είναι: • $ZE \perp A\Gamma$, αφού η ΑΓ μεσοκάθετος του ΖΕ

• $B\Delta \perp A\Gamma$, ως διαγώνιοι του ρόμβου

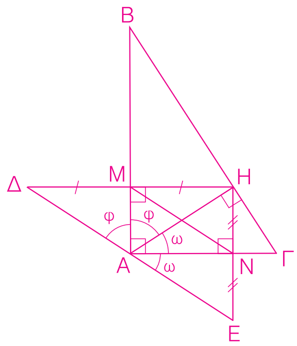
Άρα έχουμε $ZE // B\Delta$, οπότε $ZE // MN$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΖΑΔ ($\hat{Z} = 90^o$), ΕΑΒ ($\hat{E} = 90^o$), οι ΖΜ, ΕΝ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε

$ZM = \dfrac{A\Delta}{2}$ και $EN = \dfrac{AB}{2}$.

Είναι $A\Delta = AB$, οπότε $ZM = EN$.

340 Θέμα 4 - 1737



α. Στο $\overset{\Delta}{A\Delta H}$ το ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΗ, άρα $AH = A\Delta$.

Όμοια το $\overset{\Delta}{AEH}$ είναι ισοσκελές, οπότε $AH = AE$. Άρα $AH = A\Delta = AE$.

β. Το ΑΜΗΝ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, οπότε $M\hat{H}N = 90^o$, άρα το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο.

γ. Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΗΕ οι ΑΜ, ΑΝ είναι ύψη άρα και διχοτόμοι τους.

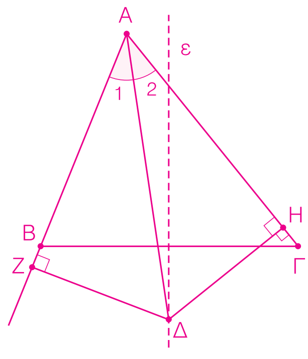
Οπότε $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}H = \varphi$ και $E\hat{A}N = H\hat{A}N = \omega$.

Είναι $\Delta\hat{A}E = 2\varphi + 2\omega = 2(\varphi + \omega) = 2B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

Άρα τα Ε, Α, Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΔΗΕ τα Μ, Ν είναι μέσα των ΗΔ και ΗΕ οπότε $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$.

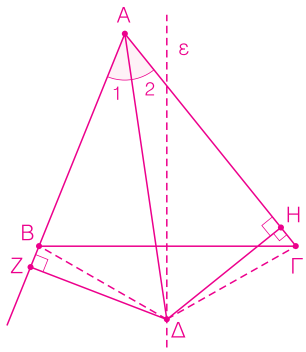
341 Θέμα 4 - 13522



α. Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, επειδή ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.
- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}\Delta = 90^o$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.



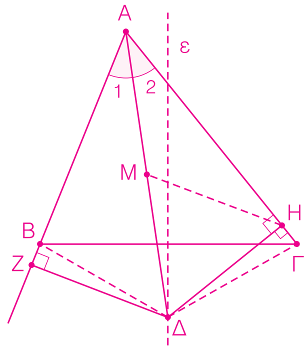
β. Φέρνουμε τις ΔΒ, ΔΓ. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΒΓ θα ισαπέχει από τα Β και Γ,

άρα $B\Gamma = \Gamma\Delta$, (1).

Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΔ έχουν:

- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}\Delta = 90^o$
- $B\Delta = \Gamma\Delta$
- $\Delta Z = H\Delta$, (2) επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΖΔ και ΑΗΔ, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ αντίστοιχα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ZB = H\Gamma$.



γ. Είναι $A = 60^o$, οπότε $A_2 = 30^o$.

Στο ορθογώνιο $A\Delta H$, η γωνία $A_2 = 30^o$, οπότε $H\Delta = \frac{A\Delta}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο $AH\Delta$, η HM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $HM = \frac{A\Delta}{2}$ (4).

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $HM = H\Delta$ (5).

Από (5) και (2) έχουμε ότι $HM = \Delta Z$.

342 Θέμα 4 - 13672

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η $A\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, οπότε $A\Delta = \Delta B = \Delta\Gamma$,

και είναι $\hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZA\Gamma$ είναι $\Gamma\hat{A}Z = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\Gamma\hat{A}Z = \hat{B}$.

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta B$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{A}B = \hat{B}$.

Επομένως $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$ (3).

β. Η AH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε $\Gamma\hat{A}H = H\hat{A}B$ (4).
Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\Gamma\hat{A}H - \Gamma\hat{A}Z = H\hat{A}B - \Delta\hat{A}B \Leftrightarrow Z\hat{A}H = H\hat{A}\Delta \quad (5).$$

Είναι, $AZ // \Delta E$ αφού είναι κάθετες στη $B\Gamma$, άρα, $Z\hat{A}H = \hat{E}$ (6), ως εντός εναλλάξ.

Από τις (5) και (6) προκύπτει ότι $H\hat{A}\Delta = \hat{E}$, οπότε στο τρίγωνο $A\Delta E$, είναι $\Delta E = A\Delta$.

γ. Είναι $\Gamma\hat{A}Z + Z\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B = \hat{A}$, οπότε:

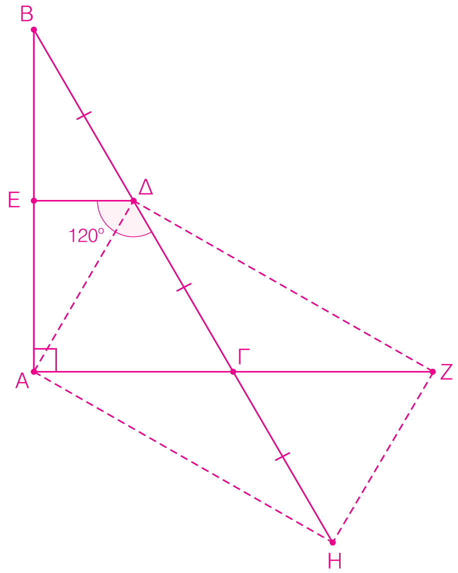
$$Z\hat{A}\Delta = \hat{A} - \Gamma\hat{A}Z - \Delta\hat{A}B = 90^o - \hat{B} - \hat{B} = \hat{\Gamma} - \hat{B} \text{ αφού είναι}$$

$$\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B = \hat{B} \text{ και } \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B}.$$

343 Θέμα 4 - 13855

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΔΕ//ΑΓ άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά άρα

$E\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$.



β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma} = 30^o$.

Οπότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = \Delta\Gamma$.

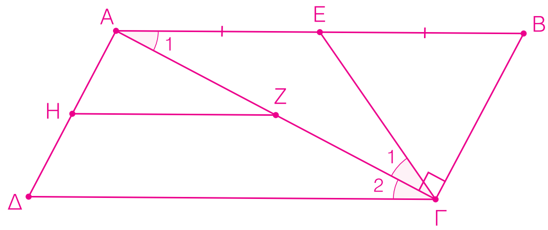
Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο αφού ΑΔ = ΑΓ = ΔΓ.

γ. • Στο τετράπλευρο ΑΗΖΔ οι διαγώνιοι ΔΗ και ΑΖ διχοτομούνται στο Γ αφού $\Delta\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma H$ και $A\Gamma = \Gamma Z$.

Άρα ΑΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

• Είναι $ΑΓ = ΓΔ \Leftrightarrow 2ΑΓ = 2ΓΔ \Leftrightarrow ΑΖ = ΔΗ$, άρα το παραλληλόγραμμο ΑΗΖΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγωνίους, οπότε $Α\widehat{Η}Ζ = 90^o$.

344 Θέμα 4 - 13540



α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΕ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΑΒ, οπότε $ΓΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι

$ΖΗ = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΓΕ = ΖΗ$.

ii. Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με $ΑΕ = ΓΕ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1$ (3).

Είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_2$ (4), ως εντός εναλλάξ γωνίες, οπότε $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$.

Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Ε$.

β. Έχουμε $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4} \Leftrightarrow 2ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η κάθετη πλευρά ΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, οπότε $\hat{Α}_1 = 30^o$, άρα $\hat{Β} = 90^o - 30^o = 60^o$.

Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $ΓΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα $Ε\hat{Γ}Β = \hat{Β} = 60^o$ και $Β\hat{Ε}Γ = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.

345 Θέμα 4 - 1870

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $ΑΔ = ΑΕ$
- $ΑΒ = ΑΓ$

Οπότε είναι ίσα.

ii. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ $(\hat{Α} = 90^o)$ και ΑΕΓ $(\hat{Α} = 90^o)$, οι ΑΖ, ΑΗ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΖ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΑΗ = \frac{ΕΓ}{2}$.

Επειδή τα $\overset{\triangle}{ΑΔΒ}$, $\overset{\triangle}{ΑΕΓ}$ είναι ίσα έχουμε $ΒΔ = ΕΓ$.

Οπότε $ΑΖ = ΑΗ$, επομένως το $\overset{\triangle}{ΖΑΗ}$ είναι ισοσκελές.

iii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα έχουν $ΒΔ = ΕΓ$ και $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$.

Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$
- $ΒΖ = ΗΓ$, ως μισά των ίσων πλευρών ΔΒ και ΕΓ
- $Ζ\hat{Β}Μ = Μ\hat{Γ}Η$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών αφού $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΜΖ = ΜΗ$.

Επειδή $ΑΖ = ΑΗ$ και $ΜΖ = ΜΗ$ η ΑΜ είναι η μεσοκάθετος του ΖΗ.

β. Το λάθος είναι ότι οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $E\hat{A}\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι οξυγώνιο οπότε οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

346 Θέμα 2 - 1549

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $HB\Gamma$ είναι $\hat{B}+H\hat{\Gamma}B=90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+H\hat{\Gamma}B=90^\circ \Leftrightarrow H\hat{\Gamma}B=30^\circ$.

Οπότε $HB=\dfrac{B\Gamma}{2}=\dfrac{4\Gamma\Delta}{2}=2\Gamma\Delta$.

β. Το $\Delta\Gamma HA$ έχει $\hat{\Delta}=\hat{A}=\hat{H}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\Gamma\Delta=AH$.

Είναι $HB=2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta=\dfrac{1}{2}HB \Leftrightarrow AH=\dfrac{1}{2}HB$.

347 Θέμα 2 - 1612

α. Είναι $\Pi_{AB\Gamma}=AB+B\Gamma+\Gamma A=2\cdot 9+30+2\cdot 10=68$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // B\Gamma$, άρα το $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

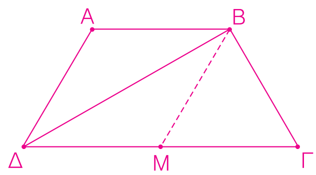
γ. Από το **β.** ερώτημα είναι $\Delta E=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{30}{2} \Leftrightarrow x=15$.

348 Θέμα 2 - 1697

α. Επειδή $AB=A\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Delta}B$. Αφού $AB//\Gamma\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta=B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $A\hat{\Delta}B=B\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε η ΔB είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

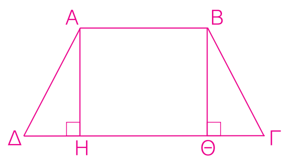
β. Επειδή $AB \mathbin{/\!/=} \Delta M$, το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον είναι $AB=A\Delta$, έχουμε ότι το $ABM\Delta$ είναι ρόμβος.



Είναι:
- $BM//A\Delta$, οπότε $B\hat{M}\Gamma=\hat{\Delta}=60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $BM=M\Delta \Leftrightarrow BM=M\Gamma$

Οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρο.

349 Θέμα 2 - 1694



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $HA\Delta$ και $\Theta B\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta=B\Gamma$
- $\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta H=\Theta\Gamma$.

β. Η διάμεσος του τραπεζίου EZ είναι: $EZ=\dfrac{AB+\Gamma\Delta}{2}=\dfrac{8+12}{2}=10$

350 Θέμα 2 - 1629

α. Είναι:
- $\hat{A}=\hat{B}=135^\circ$
- $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^\circ$
- $\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}=45^\circ$

β. Είναι $AE=BZ$, ως αποστάσεις των παράλληλων AB και $\Gamma\Delta$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι:
- $\hat{\Delta}+\Delta\hat{A}E=90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ+\Delta\hat{A}E=90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E=45^\circ$, άρα $\hat{\Delta}=\Delta\hat{A}E$
- $\hat{\Gamma}+\Gamma\hat{B}Z=90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ+\Gamma\hat{B}Z=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{B}Z=45^\circ$, άρα $\hat{\Gamma}=\Gamma\hat{B}Z$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι ισοσκελή, οπότε $\Delta E=AE$ και $Z\Gamma=BZ$.

Άρα $AE=E\Delta=BZ=\Gamma Z$.

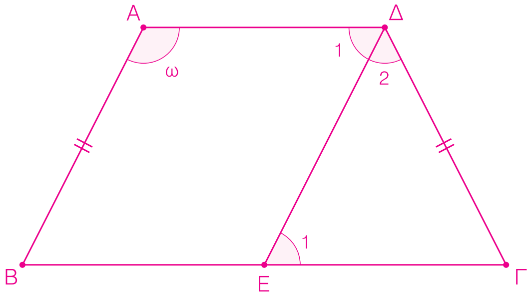
351 Θέμα 2 - 1644

α. Είναι: • $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$

• $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta + EB}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$.

β. Είναι $K\Lambda // EB$, οπότε $K\Lambda // AB$ και $K\Lambda = AB = 3$, οπότε το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

352 Θέμα 2 - 13497



α. Είναι: • $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (1), ως εντός εναλλάξ.

• $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (2), ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

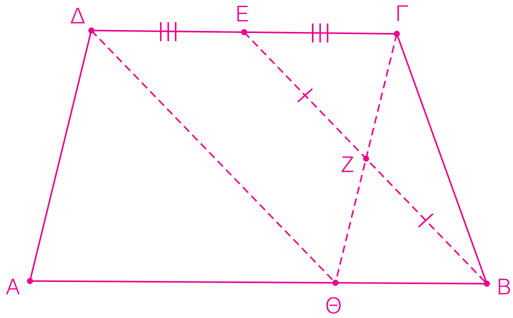
Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.

β. Αν $\hat{A} = 120^o$, τότε, επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = 120^o$.

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$, θα είναι $\hat{\Delta}_2 = 60^o$ οπότε η (2) $\Leftrightarrow \hat{E}_1 = 60^o$.

Επομένως, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες 60^o , οπότε και η τρίτη γωνία $\hat{\Gamma}$ θα είναι 60^o .

353 Θέμα 2 - 13824



α. Τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουν:

i. $EZ = ZB$,

ii. $Z\hat{E}\Gamma = Z\hat{B}\Theta$, ως εντός αναλλάξ

iii. $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι $E\Gamma = \Theta B$.

γ. Είναι: • $\Delta E // B\Theta$ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

• $E\Gamma = B\Theta$ και $E\Gamma = \Delta E$, άρα $B\Theta = \Delta E$.

Επομένως το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

354 Θέμα 2 - 1669

α. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε ότι $A\Delta = B\Gamma$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Τα τρίγωνα ΜΚΔ και ΜΛΓ έχουν:
• $M\Delta = M\Gamma$
• $\Delta K = \Gamma\Lambda$, ως μισά ίσων τμημάτων
• $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $KM = \Lambda M$.

β. Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:
• $M\Delta = M\Gamma$
• $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$
• $A\Delta = B\Gamma$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) , οπότε $AM = BM$.

355 Θέμα 2 - 1634

α. Είναι:
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ$
- $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

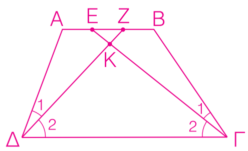
Οπότε είναι ίσα.

γ. Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $EZ = AB = 6$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι $\Gamma\hat{B}Z = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Οπότε $Z\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = 2$.

Επειδή τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta E = Z\Gamma = 2$.
Οπότε $\Gamma\Delta = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$.
Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Pi_{AB\Gamma\Delta} = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24$.

356 Θέμα 2 - 1579



α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{B}$.

Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $AZ = BE$
- $\hat{A} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως $\Delta Z = \Gamma E$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2$.
Άρα το τρίγωνο $K\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές , οπότε $K\Delta = K\Gamma$.
Επειδή $\Delta Z = \Gamma E$ και $K\Delta = K\Gamma$ είναι και $KZ = KE$.
Οπότε το τρίγωνο KZE είναι ισοσκελές.

357 Θέμα 2 - 1563

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Gamma Z$.

β. Είναι $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$, οπότε $AE \perp AB$, άρα $E\hat{A}B = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο $ABZE$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $AB = EZ$.

358 Θέμα 2 - 1666

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , Z είναι τα μέσα των BA , $B\Gamma$, οπότε $\Delta Z // = \dfrac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z // = AE$.

Επομένως το $AEZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\hat{A} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε ΔΕ // ΒΓ.
Άρα το ΕΔΒΓ είναι τραπέζιο και επειδή ΒΔ = ΕΓ, ως μισά ίσων τμημάτων, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

359 Θέμα 2 - 1536

α. Για να είναι τραπέζιο το ΒΔΕΓ, αρκεί ΔΕ // ΒΓ.
Επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΒ, θα είναι το Ε το μέσο του ΑΓ.

β. Για να είναι το ΒΔΕΓ ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί $\hat{Β} = \hat{Γ}$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.

360 Θέμα 2 - 1529

α. Επειδή η ΕΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ, έχουμε ΑΕ = ΒΕ.
β. Επειδή ΖΕ // ΒΓ, το ΒΓΕΖ είναι τραπέζιο.
Αφού επιπλέον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$, οπότε το ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

361 Θέμα 2 - 1550

α. Είναι

$$ΜΝ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{(3x+2)+(x+2)}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

β. Έχουμε $\hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και επειδή ΑΒ // ΓΔ είναι
$\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} + 2\hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 60^\circ$.

Οπότε $\hat{Γ} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β} = 60^\circ$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 120^\circ$.

362 Θέμα 2 - 1562

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΒΓ έχουν: ΑΔ = ΒΓ και $\hat{Δ} = \hat{Γ}$.
Οπότε είναι ίσα, άρα ΔΕ = ΓΖ.
β. Είναι ΑΕ ⊥ ΓΔ και ΑΒ // ΓΔ, οπότε ΑΕ ⊥ ΑΒ, άρα $Ε\hat{Α}Β = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι $\hat{Α} = \hat{Ε} = \hat{Ζ} = 90^\circ$.
Οπότε είναι ορθογώνιο.

363 Θέμα 4 - 1577

Επειδή ΑΒ // ΓΔ είναι $Α\hat{Β}Γ = 180^\circ - \hat{Γ} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Β}Γ - Δ\hat{Β}Γ = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$. Αφού ΔΑ = ΔΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Α} = Α\hat{Β}Δ = 40^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $Α\hat{Δ}Β + \hat{Α} + Α\hat{Β}Δ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Β + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Β = 100^\circ$.

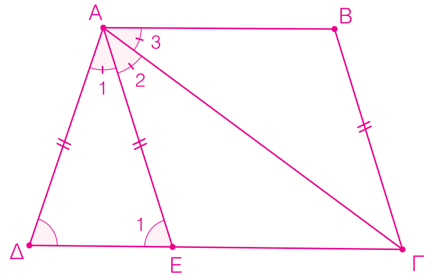
364 Θέμα 4 - 1650

α. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ, άρα $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Γ}$.
Στο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε

$$Β\hat{Δ}Γ + \hat{Γ} + Δ\hat{Β}Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 35^\circ$$

β. Είναι $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Γ} = 35^\circ$ οπότε $Α\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Β + Β\hat{Δ}Γ = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$.
Οι γωνίες $\hat{Α}$ και $Α\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{Α} + Α\hat{Δ}Γ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 120^\circ$

365 Θέμα 4 - 13539



α. Αφού τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}=108^o$, θα είναι

$\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{A}_3=\frac{\hat{A}}{3}=\frac{108^o}{3}=36^o$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, άρα

$\hat{\Delta}=180^o-\hat{A}=180^o-108^o=72^o$.

Είναι $\hat{E}_1=B\hat{A}E$, ως εντός εναλλάξ, άρα

$\hat{E}_1=B\hat{A}E=\hat{A}_2+\hat{A}_3=36^o+36^o=72^o$.

β. i. Από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι $\hat{\Delta}=\hat{E}_1=72^o$ (1), οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $A\Delta=AE$ (2).

ii. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, άρα $B\hat{\Gamma}\Delta=\hat{\Delta}$ (3).

Από τις ισότητες (1), (3) προκύπτει $B\hat{\Gamma}\Delta=\hat{E}_1$, οπότε $AE//B\Gamma$, γιατί σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
Είναι $A\Delta=B\Gamma$ (4) και $A\Delta=AE$, οπότε $AE=B\Gamma$.
Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}E$, αφού $\hat{A}_2=\hat{A}_3=36^o$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

366 Θέμα 4 - 1635

α. Είναι:
- $\hat{B}=180^o-\hat{\Gamma}=180^o-60^o=120^o$, αφού $AB//\Gamma\Delta$.
- $A\Delta\perp AB$ και $AB//\Gamma\Delta$, οπότε $A\Delta\perp\Gamma\Delta$, άρα $\hat{\Delta}=90^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ είναι $E\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma+60^o=90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma=30^o$

Οπότε $E\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow 2E\Gamma=B\Gamma$.

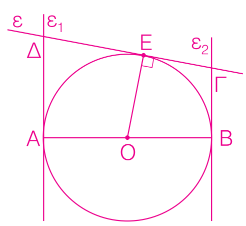
γ. Η ΜΝ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Οπότε $MN=\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$.

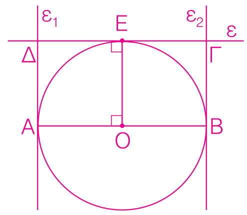
Είναι:
- $\Delta E=AB=4$, αφού το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο
- $E\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{4}{2}=2$
- $\Gamma\Delta=\Delta E+E\Gamma=4+2=6$.

Οπότε $MN=\frac{4+6}{2}=5$.

367 Θέμα 4 - 1747



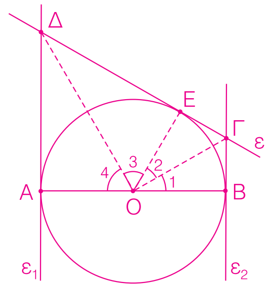
α i. Είναι $\varepsilon_1\perp AB$ και $\varepsilon_2\perp AB$, οπότε $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.
Επειδή το Ε δεν είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, έχουμε $B\hat{O}E\neq 90^o$ και αφού $\hat{E}=90^o$ προκύπτει $\Gamma\Delta \nparallel AB$.
Οπότε το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
ii. Είναι $\Delta E=\Delta A$ και $\Gamma E=\Gamma B$, ως εφαπτόμενα τμήματα.
Οπότε $\Gamma\Delta=\Gamma E+\Delta E=\Gamma B+\Delta A=A\Delta+B\Gamma$



β. Αν το E είναι το μέσο του $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, τότε $\mathrm{EO} \perp \mathrm{AB}$.
Επειδή $\mathrm{EO} \perp \Gamma\Delta$ έχουμε $\mathrm{EO}//\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{EO}//\mathrm{B}\Gamma$.
Το $\mathrm{OB\Gamma E}$ είναι τετράγωνο αφού $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{O}} = \hat{\mathrm{E}} = 90^\circ$ και $\mathrm{OB} = \mathrm{OE} = \mathrm{R}$

Το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο, αφού $\mathrm{A\Delta} //= \mathrm{B\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$
Άρα $\Pi_{\mathrm{A\Delta\Gamma B}} = 2(\mathrm{AB} + \mathrm{A\Delta}) = 2(2\mathrm{R} + \mathrm{R}) = 6\mathrm{R}$.

368 Θέμα 4 - 1758



α. Είναι $\Gamma\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{B}$ και $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{A}$, ως εφαπτόμενα τμήματα.
Οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} + \mathrm{E}\Delta = \Gamma\mathrm{B} + \Delta\mathrm{A} = \mathrm{A}\Delta + \mathrm{B}\Gamma$.

β. Οι $\mathrm{O}\Gamma$, $\mathrm{O}\Delta$ είναι διακεντρικές ευθείες, οπότε είναι οι διχοτόμοι των $\mathrm{B\hat{O}E}$, $\mathrm{E\hat{O}A}$.
Άρα $\hat{\mathrm{O}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_2$ και $\hat{\mathrm{O}}_3 = \hat{\mathrm{O}}_4$
Είναι $\hat{\mathrm{O}}_1 + \hat{\mathrm{O}}_2 + \hat{\mathrm{O}}_3 + \hat{\mathrm{O}}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\mathrm{O}}_2 + 2\hat{\mathrm{O}}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{O}}_2 + \hat{\mathrm{O}}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$.

Άρα $\mathrm{O}\Gamma \perp \mathrm{O}\Delta$, οπότε το $\overset{\Delta}{\Gamma\mathrm{O}\Delta}$ είναι ορθογώνιο.

γ. Οι $\mathrm{A}\Delta$, $\mathrm{B}\Gamma$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, οπότε $\mathrm{A}\Delta \perp \mathrm{AB}$ και $\mathrm{B}\Gamma \perp \mathrm{AB}$.
Άρα $\mathrm{A}\Delta // \mathrm{B}\Gamma$.

- Αν το σημείο E δεν είναι μέσο του ημικυκλίου AB τότε οι $\Gamma\Delta$ και AB δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι τραπέζιο.
- Αν το E είναι μέσο του ημικυκλίου AB , τότε $\mathrm{B\hat{O}E} = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $\mathrm{E}\Gamma \perp \mathrm{OE}$, άρα $\mathrm{E}\Gamma // \mathrm{AB}$. Οπότε το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

369 Θέμα 4 - 1783

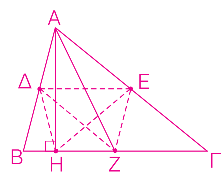
α. Είναι:
- $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$, αφού AE διχοτόμος
- $\mathrm{AB} // \Gamma\Delta$, άρα $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$, επομένως το $\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{AZ}}$ είναι ισοσκελές.

β. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\mathrm{AZ}$ έχουμε $\mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{AB} + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + \Gamma\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{AB} = \Gamma\mathrm{Z}$.
Επειδή επιπλέον $\mathrm{AB} // \Gamma\mathrm{Z}$ το $\mathrm{ABZ\Gamma}$ είναι παραλληλόγραμμο.
Οπότε το E είναι το μέσο της διαγωνίου του $\mathrm{B}\Gamma$.

γ. Το E είναι το μέσο και της διαγωνίου AZ , του παραλληλογράμμου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$.
Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\mathrm{AZ}$, το $\Delta\mathrm{E}$ είναι διάμεσος, οπότε η $\Delta\mathrm{E}$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

370 Θέμα 4 - 1885



α. • Στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε $\Delta\mathrm{E} // \mathrm{B}\Gamma$.
Άρα το $\Delta\mathrm{EZH}$ είναι τραπέζιο.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο HAB $(\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ)$, η $\mathrm{H}\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{H}\Delta = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ (1) .
- Στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, τα E , Z είναι τα μέσα των $\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma}$, οπότε $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ (2) .

Από τις (1) και (2) έχουμε $\mathrm{H}\Delta = \mathrm{EZ}$.
Άρα το τραπέζιο $\Delta\mathrm{EZH}$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $\mathrm{H}\Delta\mathrm{Z}$ και HEZ έχουν:
- $\mathrm{EZ} = \mathrm{H}\Delta$
- HZ κοινή
- $\Delta\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ) , άρα $\mathrm{H}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$.

γ. Είναι:
- $E\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{Z}H$, ως εντός εναλλάξ
- $\Delta\hat{Z}H = E\hat{H}Z$, από την ισότητα των τριγώνων ΔHZ και EHZ.

Άρα $E\hat{\Delta}Z = E\hat{H}Z$

371 Θέμα 4 - 1815

α. Είναι:
- $A\hat{\Delta}M = M\hat{\Delta}\Gamma$ αφού ΔM διχοτόμος
- $A\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta\Gamma // AB$.

Άρα $A\hat{\Delta}M = A\hat{M}\Delta$, οπότε το $\overset{\Delta}{A\Delta M}$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AM$.

β. Έχουμε $AB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow AM + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow A\Delta + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow MB = B\Gamma$.

Άρα το $\overset{\Delta}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή:
- $\Delta\Gamma // AB$, είναι $\Delta\hat{\Gamma}M = \Gamma\hat{M}B$, ως εντός εναλλάξ
- το $\overset{\Delta}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\Gamma\hat{M}B = M\hat{\Gamma}B$

Άρα $\Delta\hat{\Gamma}M = M\hat{\Gamma}B$, οπότε η ΓM είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου.

372 Θέμα 4 - 1860

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$ $(\hat{E} = 90^o)$ είναι

$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 30^o$,

Οπότε $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$.

Επειδή $AB // = E\Gamma$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$ έχουμε $AE = B\Gamma = 2AB$. Είναι $ZE = \Gamma\Delta - E\Gamma - \Delta Z =$
$= 4AB - AB - AB = 2AB$. Άρα $AE = EZ$ και $A\hat{E}Z = \hat{\Gamma} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, αφού $AE // B\Gamma$.

Επομένως το $\overset{\Delta}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο.

γ. Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE έχουν:
- $AZ = AE$, αφού το $\overset{\Delta}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο
- $\Delta Z = E\Gamma$, αφού $\Delta Z = AB$ και $AB = E\Gamma$
- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{E}\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{Z}E = 60^o$ και $A\hat{E}Z = 60^o$.

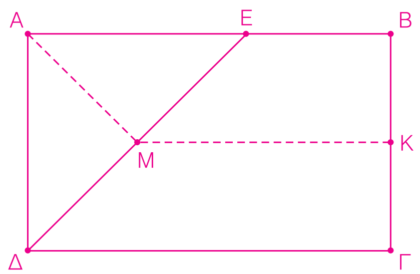
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

373 Θέμα 4 - 13519

α. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, γιατί $A\Delta = AE$.

Επομένως, η διάμεσος AM που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, $AM \perp \Delta E$.



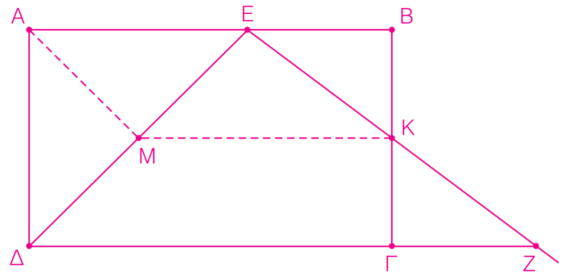
β. Το $EB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο γιατί $EB // \Delta\Gamma$ και η ΔE δεν είναι παράλληλη με την $B\Gamma$.

Από το μέσο M της ΔE φέραμε $MK // \Delta\Gamma$, άρα το K είναι το μέσο πλευράς $B\Gamma$.

Η MK είναι διάμεσος του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$, οπότε

$$MK = \frac{\Delta\Gamma + EB}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta\Gamma + EB \Leftrightarrow 2MK = AB + AB - AE$$

$$\Leftrightarrow 2MK = 2AB - A\Delta \ , \ (5).$$



γ Στο τρίγωνο $ΔΕΖ$ το $Μ$ είναι μέσο της $ΔΕ$ και $ΜΚ//ΔΖ$, άρα η $ΜΚ$ διέρχεται από το μέσο $Κ$ της $ΕΖ$. Επομένως:

$$ΜΚ=\frac{ΔΖ}{2} \Leftrightarrow 2ΜΚ=ΔΖ \overset{β.}{\Leftrightarrow} 2ΑΒ-ΑΔ=ΔΓ+ΓΖ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ΑΒ-ΑΔ=ΑΒ+ΓΖ \Leftrightarrow ΓΖ=ΑΒ-ΑΔ$$

374 Θέμα 4 - 1711

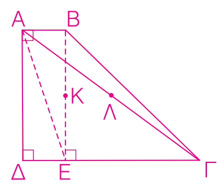
α. Είναι $ΕΓ=\frac{ΓΔ}{2}=\frac{2ΑΒ}{2}=ΑΒ$ και $ΕΓ//ΑΒ$, οπότε το $ΑΒΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ η $ΖΗ$ είναι διάμεσος, οπότε $ΖΗ//ΓΔ//ΑΒ$.

- Στο $\overset{\Delta}{ΑΔΕ}$, το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΑΔ$ και $ΖΘ//ΔΕ$, οπότε το $Θ$ μέσο του $ΑΕ$.
- Στο $\overset{\Delta}{ΒΕΓ}$, το $Η$ είναι το μέσο του $ΒΓ$ και $ΗΙ//ΕΓ$, οπότε το $Ι$ είναι το μέσο του $ΒΕ$.

γ. Είναι $ΖΗ=\frac{ΓΔ+ΑΒ}{2}=\frac{2ΑΒ+ΑΒ}{2}=\frac{3}{2}ΑΒ$.

375 Θέμα 4 - 1757



α. Στο τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ είναι $\hat{Α}=\hat{Ε}=\hat{Δ}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΔΕ=ΑΒ$ και $ΒΕ=ΑΔ$.

Είναι:

- $ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=4ΑΒ-ΑΒ=3ΑΒ$
- $ΒΕ=ΑΔ=3ΑΒ$

Άρα $ΕΓ=ΒΕ$, οπότε το $\overset{\Delta}{ΒΕΓ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ. Στο τραπέζιο $ΑΒΓΕ$, τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε

$$ΚΛ=\frac{ΕΓ-ΑΒ}{2}=\frac{3ΑΒ-ΑΒ}{2}=ΑΒ \text{ και } ΚΛ//ΑΒ.$$

Άρα το $ΑΒΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η $ΑΓ$ διέρχεται από το μέσο του $ΒΚ$.

376 Θέμα 4 - 1767

α. Είναι $\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Rightarrow 3\hat{Γ}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=45^\circ$.

β. Το $ΑΒΕΔ$ έχει $\hat{Α}=\hat{Δ}=\hat{Ε}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $ΔΕ=ΑΒ$.

Έχουμε $ΔΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΔΕ+ΕΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ+ΕΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΕΓ=ΑΒ$.

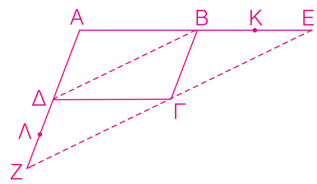
Επειδή επιπλέον $ΑΒ//ΕΓ$, το $ΑΒΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $\hat{Γ}=45^\circ$, στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι $\hat{Β}=90^\circ-\hat{Γ}=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Οπότε το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές με $ΒΕ=ΕΓ$, άρα $ΒΕ=ΕΔ$.

Επομένως το ορθογώνιο $ΑΒΕΔ$ είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $ΑΕ\perp ΒΔ$.

377 Θέμα 4 - 1842



α. i. Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

- $ΑΒ//=ΓΔ \Leftrightarrow ΒΕ//=ΓΔ$
- $ΑΔ//=ΒΓ \Leftrightarrow ΔΖ//=ΒΓ$

Άρα τα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Από τα παραλλληλόγραμμα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$, έχουμε $ΓΖ//ΔΒ$ και $ΓΕ//ΔΒ$, άρα τα $Ε$, $Γ$, $Ζ$ είναι συνευθειακά.

β. Στο τρίγωνο $ΑΖΕ$ τα $Δ, Β$ είναι μέσα των $ΑΖ, ΑΕ$, οπότε $ΔΒ // ΖΕ$.

Επειδή $ΔΒ // ΖΕ$, το τετράπλευρο $ΔΒΕΖ$ είναι τραπέζιο.
Η $ΚΛ$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου $ΔΒΕΖ$, οπότε:

- $ΚΛ // ΔΒ$
- $ΚΛ = \dfrac{ΔΒ + ΖΕ}{2} = \dfrac{ΔΒ + ΖΓ + ΓΕ}{2} = \dfrac{ΔΒ + ΔΒ + ΔΒ}{2} = \dfrac{3}{2}ΔΒ$.

378 Θέμα 4 - 1838

α. Οι $Βx$, $Βy$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Β}_{εξ}$, οπότε είναι $Γ\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Α$ και $Α\hat{Β}Ε = Ε\hat{Β}Ζ$

Είναι $Γ\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Ε + Ε\hat{Β}Ζ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Δ\hat{Β}Α + 2Α\hat{Β}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Ε = 90^\circ$.

Το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ έχει $\hat{Β} = \hat{Δ} = \hat{Ε} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $ΑΔΒΕ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΒ = ΕΔ \Leftrightarrow \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{ΕΔ}{2} \Leftrightarrow ΚΒ = ΚΔ$.

Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές, επομένως $Κ\hat{Δ}Β = Κ\hat{Β}Δ$.

Είναι $Κ\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Γ$, οπότε $Κ\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Γ$

Επομένως οι $ΕΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα $ΕΔ // ΒΓ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Κ$ είναι το μέσο της $ΑΒ$ και $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $Μ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.

γ. Από το **β.** ερώτημα έχουμε $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και $ΚΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = \dfrac{α}{2}$. Η διάμεσος του τραπεζίου $ΚΜΓΒ$ είναι ίση με

$$\frac{ΒΓ + ΚΜ}{2} = \frac{α + \frac{α}{2}}{2} = \frac{3α}{4}.$$

379 Θέμα 4 - 14888

α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε:

- $ΔΕ = \dfrac{ΒΓ}{2} = \dfrac{2ΚΛ}{2} = ΚΛ$
- $ΔΕ // ΒΓ$, οπότε $ΔΕ // ΚΛ$

Οπότε το $ΔΕΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο $ΑΒΜ$, τα $Δ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΜ$, οπότε $ΔΚ // ΑΜ$.

Άρα το $ΚΔΑΜ$ είναι τραπέζιο.

Για τη διάμεσο $δ$ του τραπεζίου $ΚΔΑΜ$, έχουμε $δ = \dfrac{ΑΜ + ΔΚ}{2}$.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$, η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.
- Στο τρίγωνο $ΑΒΜ$ τα $Δ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΜ$, οπότε $ΔΚ = \dfrac{ΑΜ}{2} = \dfrac{ΒΓ}{4}$.

Άρα $δ = \dfrac{\frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΒΓ}{4}}{2} = \dfrac{\frac{3ΒΓ}{4}}{2} = \dfrac{3}{8}ΒΓ$.

380 Θέμα 4 - 1821

α. Το $Λ$ είναι μέσο του $ΓΔ$, οπότε $ΓΔ = 2ΓΛ \Leftrightarrow 2AB = 2ΓΛ \Leftrightarrow AB = ΓΛ$.

Επομένως $AB // = ΓΛ$, άρα το $ABΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $AΛ // BΓ$.

Τα τετράπλευρα $ABKZ$, $ZKΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οπότε $BK = AZ$ και $KΓ = ZΛ$.

Αφού $BK = KΓ$ έχουμε $AZ = ZΛ$.

Άρα το Z θα είναι το μέσο του $AΛ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔAΛ$ $(\hat{Δ} = 90^\circ)$, η $ΔZ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΔZ = \dfrac{AΛ}{2} \Leftrightarrow ΔZ = \dfrac{BΓ}{2} \Leftrightarrow BΓ = 2ΔZ$.

γ. Το $ZKΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο και $KΓ = \dfrac{BΓ}{2} = \dfrac{2AB}{2} = AB = ZK$, άρα είναι ρόμβος.

δ. Στο τρίγωνο $AKΛ$, η KZ είναι διάμεσος και $KZ = ΛZ = \dfrac{AΛ}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο $AKΛ$ είναι ορθογώνιο με $A\hat{K}Λ = 90^\circ$.

381 Θέμα 4 - 1834

α. Τα τρίγωνα $AΔΓ$ και $BΔΓ$ έχουν:

- $AΔ = BΓ$
- $AΓ = BΔ$
- $ΓΔ$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), επομένως $A\hat{Γ}Δ = B\hat{Δ}Γ$.
Οπότε το τρίγωνο $ΔOΓ$ είναι ισοσκελές με $OΓ = OΔ$.
Επειδή $BΔ = AΓ$ και $OΓ = OΔ$ έχουμε $OA = OB$, δηλαδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο ABO, είναι $OA = OB$ οπότε $Γ\hat{A}B = A\hat{B}Δ$.

Επειδή τα τρίγωνα $AΓΔ$ και $BΓΔ$ είναι ίσα, έχουμε $Δ\hat{A}Γ = Δ\hat{B}Γ$.

Άρα $Δ\hat{A}B = Δ\hat{A}Γ + Γ\hat{A}B = Δ\hat{B}Γ + A\hat{B}Δ = A\hat{B}Γ$

γ. Τα τρίγωνα $AΓΔ$ και $BΓΔ$ είναι ίσα, οπότε $A\hat{Δ}Γ = B\hat{Γ}Δ$

Στο τετράπλευρο $ABΓΔ$ έχουμε:

$Δ\hat{A}B + A\hat{B}Γ + A\hat{Δ}Γ + B\hat{Γ}Δ = 360^\circ \Leftrightarrow 2Δ\hat{A}B + 2A\hat{Δ}Γ = 360^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{A}B + A\hat{Δ}Γ = 180^\circ$

Οι γωνίες $Δ\hat{A}B$ και $A\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των AB, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $AΔ$ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $AB // ΓΔ$.
Άρα το $ABΓΔ$ είναι τραπέζιο και επειδή $AΔ = BΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

382 Θέμα 4 - 1778

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEB έχουμε $O\hat{B}E = 90^\circ - B\hat{O}E$

Είναι $A\hat{O}Δ + 90^\circ + B\hat{O}E = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{O}Δ = 90^\circ - B\hat{O}E \Leftrightarrow A\hat{O}Δ = B\hat{O}E$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $OAΔ$ και OBE έχουν:

- $OA = OB$
- $A\hat{O}Δ = O\hat{B}E$

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $OAΔ$ και OBE είναι ίσα, έχουμε $AΔ = OE$ και $OΔ = BE$.
Είναι $AΔ + BE = OE + OΔ = ΔE$.

γ. Είναι $Α\Delta \perp \Delta Ε$ και $ΒΕ \perp \Delta Ε$, οπότε $Α\Delta // ΒΕ$, άρα το $Α\Delta ΕΒ$ είναι τραπέζιο.
Η $ΜΝ$ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε $ΜΝ = \dfrac{Α\Delta + ΒΕ}{2} \overset{β.}{=} \dfrac{\Delta Ε}{2}$.

δ. Είναι $ΜΝ // Α\Delta$ και $Α\Delta \perp \Delta Ε$, οπότε $ΜΝ \perp \Delta Ε$. Στο $\overset{\Delta}{\Delta ΜΕ}$ η $ΜΝ$ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το $\overset{\Delta}{\Delta ΜΕ}$ είναι ισοσκελές. Επειδή στο $\overset{\Delta}{\Delta ΜΕ}$ η διάμεσος $ΜΝ$ είναι ίση με $\dfrac{\Delta Ε}{2}$, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta ΜΕ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

383 Θέμα 4 - 1861

α. Τα τρίγωνα $ΑΒ\Delta$ και $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελή και τα $ΑΕ$, $ΒΖ$ είναι ύψη τους, οπότε είναι και διάμεσοί τους. Άρα τα $Ζ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΓ$, $Β\Delta$ αντίστοιχα.

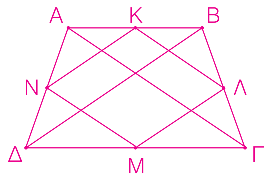
β. Επειδή το $ΑΒΓ\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΓ = Β\Delta$, οπότε και $ΕΒ = ΖΑ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΖΑΒ$ έχουν:
- $ΕΒ = ΖΑ$
- $ΑΒ$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΕ = ΒΖ$.

γ. Στο τραπέζιο $ΑΒΓ\Delta$ τα $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε $ΕΖ // ΑΒ$.
Άρα το $ΑΕΖΒ$ είναι τραπέζιο και επειδή $ΑΕ = ΒΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ. Το τρίγωνο $ΑΒ\Delta$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = Α\Delta$, οπότε $Α\hat{\Delta}Β = Α\hat{Β}\Delta$. Επειδή $ΑΒ // Γ\Delta$ έχουμε $Α\hat{Β}\Delta = Β\hat{\Delta}Γ$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Α\hat{\Delta}Β = Β\hat{\Delta}Γ$, οπότε η $Β\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

384 Θέμα 4 - 1797

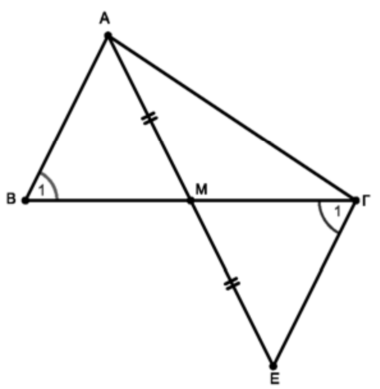


α. Επειδή τα $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $ΑΒΓ\Delta$, το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού το $ΑΒΓ\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΓ = Β\Delta$.
Στο $\overset{\Delta}{ΑΒ\Delta}$, τα $Κ$, $Ν$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $Α\Delta$, οπότε $ΚΝ = \dfrac{Β\Delta}{2}$.
Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$, οπότε $ΚΛ = \dfrac{ΑΓ}{2}$. Άρα $ΚΛ = ΚΝ$, οπότε το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος, έχουμε $ΚΝ = ΚΛ$ και από το **α.** ερώτημα $ΑΓ = Β\Delta$.
Οπότε για να σχηματίζεται ρόμβος, αρκεί το $ΑΒΓ\Delta$ να έχει ίσες διαγωνίους.
Άρα δεν είναι υποχρεωτικό το $ΑΒΓ\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο.

385 Θέμα 4 - 14885

α)

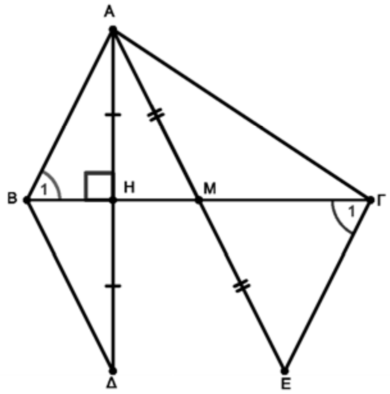


i. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ έχουν:

- ΑΜ = ΕΜ, από υπόθεση
- ΒΜ = ΓΜ, το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\text{Β} = \text{Ε}\widehat{\text{Μ}}\text{Γ}$, ως κατακορυφήν γωνίες ίσες

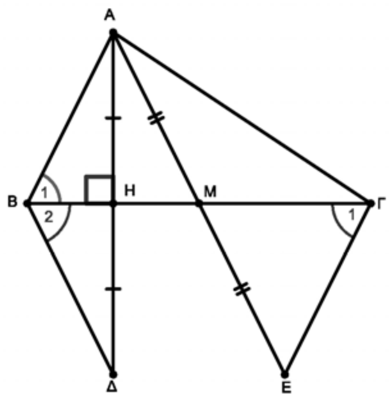
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΕ.

ii.



Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΗ ⊥ ΒΓ αφού ΑΗ ύψος, άρα ΒΗ ⊥ ΑΔ (1). Επίσης ΑΗ = ΗΔ από κατασκευή, άρα το σημείο Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση ΑΔ και ΑΒ = ΒΔ.

β)

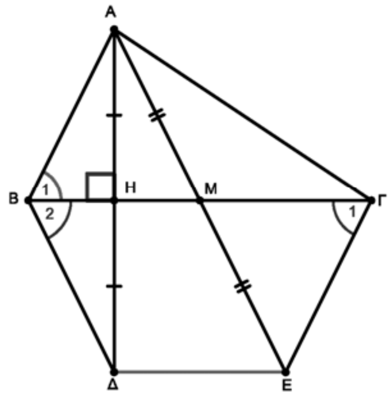


Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ του α) ii. ερωτήματος το τμήμα ΒΗ θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\text{Α}\widehat{\text{Β}}\text{Δ}$, άρα $\widehat{\text{Β}}_1 = \widehat{\text{Β}}_2$. Στα ίσα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ του α) i. ερωτήματος απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΜ και ΜΕ θα βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{\text{Β}}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Οπότε τελικά $\widehat{\text{Β}}_2 = \widehat{\Gamma}_1$ ή $\Gamma\widehat{\text{Β}}\Delta = \text{Β}\widehat{\Gamma}\text{Ε}$.

γ)

i. Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{\text{Β}}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ που είναι γωνίες εντός εναλλάξ των των ΑΒ και ΓΕ τεμνομένων από το ΑΒ συμπεραίνουμε ότι ΑΒ // ΓΕ. Επειδή το τμήμα ΒΔ τέμνει το τμήμα ΑΒ, θα τέμνει και το παράλληλό του τμήμα ΓΕ. Άρα το ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλο στο ΓΕ.

ii.



Στο τρίγωνο ΑΔΕ το Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ από κατασκευή. Άρα το τμήμα ΗΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά, δηλαδή ΗΜ // ΔΕ ή ΒΓ // ΔΕ. Άρα το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού δείξαμε ότι στο γ) i. ερώτημα ότι η ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα είναι τραπέζιο. Συγχρόνως από το β) ερώτημα οι γωνίες της βάσης του ΒΓ είναι ίσες, αφού $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$, άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

386 Θέμα 4 - 1854

α. Είναι $MN = MA + AN = \frac{A\Delta}{2} + \frac{A\Delta}{2} = A\Delta = B\Gamma$.

Επειδή $MN // = B\Gamma$, το $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα K , Λ είναι τα μέσα των παράλληλων τμημάτων $M\Gamma$, NB , οπότε $MK // = N\Lambda$, άρα το $MN\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως $K\Lambda // = MN$, άρα $K\Lambda // = A\Delta$.

Οπότε το $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $AM // K\Lambda$, το $AMK\Lambda$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABN $(\hat{A} = 90^o)$ η $A\Lambda$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $A\Lambda = \frac{BN}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK$.

Επομένως το $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

387 Θέμα 4 - 1830

α. Στο τρίγωνο AKE , το KH είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $AE\Gamma$, τα H , K είναι τα μέσα των AE , $A\Gamma$, οπότε $HK // E\Gamma$.

Επειδή $HK \perp AE$, είναι $E\Gamma \perp AE$.

Άρα το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ. Επειδή $\Delta B \perp AE$ και $\Gamma E \perp AE$, έχουμε $\Delta B // \Gamma E$, οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο.

Η ΔB είναι η μεσοκάθετος του AE , οπότε $\Delta E = \Delta A$.

Είναι $\Delta A = \Gamma B$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Delta E = B\Gamma$.

Οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

388 Θέμα 4 - 1789

α. Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, τα K , M είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, οπότε $KM // = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow KM // = \Delta N$.

Άρα το $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $KM // AB$, το $AKMN$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ η AK είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AK=\frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Επειδή το $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $MN=K\Delta=\frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $AK=MN$, οπότε το $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι $\delta=\frac{KM+AN}{2}=\frac{\Delta N+AN}{2}=\frac{NB+AN}{2}=\frac{AB}{2}$.

389 Θέμα 4 - 1841

α. Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το ΔE είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, τα E, O είναι τα μέσα των AZ, $A\Gamma$, οπότε $OE//Z\Gamma$ και $OE=\frac{Z\Gamma}{2}\Leftrightarrow Z\Gamma=2OE$.

γ. Είναι $OE//Z\Gamma$, άρα $B\Delta//Z\Gamma$, οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι τραπέζιο.
Η ΔB είναι η μεσοκάθετος του AZ, οπότε $BA=BZ$
Είναι $AB=\Gamma\Delta$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BZ=\Delta\Gamma$.
Οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

390 Θέμα 4 - 1790

α. Στο τρίγωνο ABZ, το AE είναι ύψος και διάμεσος.
Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AZ=AB$.
Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $AB=\Delta\Gamma$, οπότε $AZ=\Delta\Gamma$.
Επειδή $Z\Gamma//A\Delta$ και $AZ=\Delta\Gamma$ το $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Είναι:
- $\hat{\Delta}=\hat{B}=70^o$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $Z\hat{A}\Delta=\hat{\Delta}=70^o$
- $\hat{\Gamma}=180^o-\hat{B}=180^o-70^o=110^o$
- $A\hat{Z}\Gamma=\hat{\Gamma}=110^o$

Άρα οι γωνίες του τραπεζίου $AZ\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta}=Z\hat{A}\Delta=70^o$ και $\hat{\Gamma}=A\hat{Z}\Gamma=110^o$.

γ. Στο ισοσκελές τραπέζιο $A\Delta\Gamma Z$ είναι $A\Gamma=\Delta Z$.

Στο τρίγωνο $BZ\Delta$ τα M, E τα μέσα των $B\Delta$, BZ, οπότε $EM=\frac{\Delta Z}{2}$. Άρα $EM=\frac{A\Gamma}{2}$.

391 Θέμα 4 - 1791

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}=MB$.

Άρα το $\overset{\triangle}{MAB}$ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{B}=90^o-\hat{\Gamma}=90^o-30^o=60^o$ είναι ισόπλευρο.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $EM\Gamma$ $(\hat{E}=90^o)$ και ΔMA $(\hat{\Delta}=90^o)$, έχουν:
- $MA=M\Gamma$
- $A\hat{M}\Delta=\Gamma\hat{M}E$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ME=M\Delta$.
Στο ισόπλευρο τρίγωνο MAB, το ύψος $A\Delta$ είναι και διάμεσος, οπότε

$$M\Delta=\frac{MB}{2}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\frac{B\Gamma}{4}$$

γ. Στο $\overset{\Delta}{\text{ΜΔΕ}}$ έχουμε $\text{ΜΔ} = \text{ΜΕ}$, άρα $\text{Μ}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = \text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ε}$.
Η γωνία $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\text{Β}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΕ οπότε
$\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\text{Β} = \text{Μ}\hat{\text{Ε}}\Delta + \text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ε} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ε} \Leftrightarrow \text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ε} = 30^\circ$.

Επειδή $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\Delta}\text{Ε}$ $(= 30^\circ)$ και είναι εντός εναλλάξ, έχουμε $\Delta\text{Ε} // \text{ΑΓ}$, άρα το ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο.

Αφού $\Gamma\hat{\text{Ε}}\Delta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ = \text{Ε}\hat{\Delta}\text{Α}$ το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

392 Θέμα 4 - 1829

α. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΗ είναι διάμεσος οπότε είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα $\text{ΒΗ} \perp \text{ΑΔ}$ και $\text{Η}\hat{\text{Β}}\Delta = \text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Α} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Είναι $\text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Ε} = 180^\circ - \text{Η}\hat{\text{Β}}\text{Α} - \text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.
Οπότε $\text{ΒΗ} \perp \Delta\text{Η}$ και $\text{ΒΗ} \perp \text{ΕΒ}$, άρα $\text{ΕΒ} // \Delta\text{Η}$.

Έχουμε $\text{ΕΒ} = \text{ΒΓ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2} = \text{ΗΔ}$.

Επειδή $\text{ΕΒ} // = \Delta\text{Η}$ το ΒΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\hat{\text{Η}} = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ζ} = 90^\circ$, αφού το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Η είναι το μέσο της ΑΔ και $\text{ΗΒ} // \Delta\text{Ζ}$, οπότε το Β είναι το μέσο της ΑΖ .
Επομένως $\text{ΑΒ} = \text{ΒΖ} \Rightarrow \text{ΑΒ} = \text{ΒΓ} + \text{ΓΖ} \Rightarrow 2\text{ΒΓ} = \text{ΒΓ} + \text{ΓΖ} \Rightarrow \text{ΒΓ} = \text{ΓΖ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ $(\hat{\text{Ε}} = 90^\circ)$ η ΕΓ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$\text{ΕΓ} = \dfrac{\text{ΒΖ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΕΓ} = \text{ΓΖ}$.

Άρα το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Β είναι το μέσο του ΑΖ και $\text{ΒΕ} // \text{ΑΔ}$, οπότε το Ε είναι το μέσο της

ΑΖ. Στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΖ}}$ τα Η , Ε είναι τα μέσα των ΑΔ , ΔΖ , οπότε $\text{ΗΕ} // \text{ΑΖ}$.

Άρα το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{\text{Α}} = \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60^\circ$, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

393 Θέμα 4 - 1853

α. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.
Είναι $\text{ΑΒ} // \Gamma\Delta$, οπότε
$\hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Άρα $\hat{\text{Β}} = 2\hat{\Gamma} = 120^\circ$, $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}} = 120^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

β. i. Στο τρίγωνο ΒΚΓ είναι $\text{Κ}\hat{\text{Β}}\Gamma = \dfrac{\hat{\text{Β}}}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\text{Β}\hat{\text{Κ}}\Gamma = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Άρα είναι ισόπλευρο , οπότε $\text{ΚΒ} = \text{ΒΓ} = \text{ΚΓ}$.

Έχουμε $\text{ΒΓ} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2\text{ΒΓ} = \Delta\Gamma \Leftrightarrow 2\text{ΚΓ} = \Delta\text{Κ} + \text{ΚΓ} \Leftrightarrow \text{ΚΓ} = \Delta\text{Κ} \Leftrightarrow \text{ΒΚ} = \Delta\text{Κ}$.

Επειδή $\text{ΑΒ} = \text{ΒΚ} = \text{ΚΔ} = \text{ΑΔ}$ το ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

ii. Επειδή το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το Μ είναι το μέσο του ΒΓ .

394 Θέμα 4 - 1867

α. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$.

- Στο τρίγωνο ΔΒΓ τα Μ, Ε είναι τα μέσα των ΔΓ, ΔΒ, οπότε $ME = \frac{B\Gamma}{2}$.
- Στο τρίγωνο ΓΔΑ, τα Μ, Ζ είναι τα μέσα των ΓΔ, ΓΑ οπότε $MZ = \frac{A\Delta}{2}$

Άρα $ME = MZ$.

β. Στο τρίγωνο ΓΔΑ, τα Μ, Ζ είναι τα μέσα των ΓΔ, ΓΑ, οπότε $MZ // A\Delta$ και επειδή $A\Delta \perp A\Gamma$ είναι και $MZ \perp A\Gamma$.

γ. Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ έχουν:
- $M\Delta = M\Gamma$
- $ME = MZ$
- $\Delta E = Z\Gamma$ ως μισά ίσων τμημάτων

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

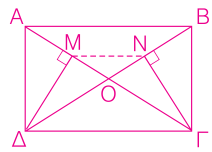
δ. Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΓΖ είναι ίσα έχουμε $E\hat{\Delta}M = M\hat{\Gamma}Z$.

Άρα το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές με $O\Delta = O\Gamma$.

Οπότε $OE = O\Delta - \Delta E = O\Gamma - \Gamma Z = OZ$.

Επειδή $OE = OZ$ και $ME = MZ$, η ΟΜ είναι η μεσοκάθετος του ΕΖ .

395 Θέμα 4 - 1893



α. i. Επειδή το Ο είναι το κέντρο του ορθογωνίου, έχουμε $OA = O\Delta$.

Αφού επιπλέον $A\hat{O}\Delta = 60^o$, το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο.
Επειδή το ΔΜ είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΟΑΔ, θα είναι και διάμεσος.
Άρα το Μ είναι το μέσο του ΟΑ.

ii. Είναι $AM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο ΟΓΒ είναι $OB = O\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma = 60^o$, οπότε είναι ισόπλευρο.

Επειδή το ΓΝ είναι ύψος του, θα είναι και διάμεσος, οπότε το Ν είναι το μέσο του ΟΒ.

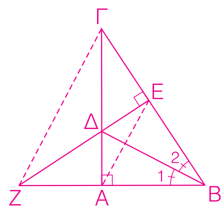
Στο τρίγωνο ΟΑΒ, τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, οπότε $MN // AB$.

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $MN // \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο ΜΝΓΔ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $OM = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2} = ON$
- $O\Gamma = O\Delta$

Οπότε $OM + O\Gamma = ON + O\Delta \Leftrightarrow M\Gamma = N\Delta$. Άρα το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

396 Θέμα 4 - 1722



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ έχουν:
- ΒΔ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $BA = BE$.
Επομένως το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:
- $AB = BE$
- $\hat{B}$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ είναι ίσα, έχουμε $\Delta A = \Delta E$ και $BA = BE$.

Οπότε η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ .

Επειδή τα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{BEZ}$ είναι ίσα, έχουμε $B\Gamma = BZ$ και $A\Gamma = ZE$.

Οπότε $\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = ZE - \Delta E = \Delta Z$.

Αφού $B\Gamma = BZ$ και $\Delta\Gamma = \Delta Z$, η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΖΓ .

δ. Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$ είναι $AE // \Gamma Z$.

Επομένως το ΑΕΓΖ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον $A\Gamma = ZE$, το ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

397 Θέμα 4 - 1845

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $B\hat{A}\Delta+\hat{B}=90^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta+60^o=90^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ είναι $E\hat{H}A+E\hat{A}H=90^o \Leftrightarrow E\hat{H}A+30^o=90^o \Leftrightarrow E\hat{H}A=60^o$.

Άρα $E\hat{H}Z=\frac{E\hat{H}A}{2}=\frac{60^o}{2}=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΗΕ $(\hat{E}=90^o)$, έχουμε $E\hat{H}Z=30^o$, άρα $EZ=\frac{ZH}{2}\Leftrightarrow ZH=2EZ$.

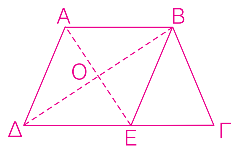
β. Είναι $E\hat{H}\Theta=A\hat{H}\Theta-E\hat{H}A=90^o-60^o=30^o$, άρα $E\hat{H}\Theta=E\hat{H}Z$.
Οπότε στο τρίγωνο ΘΖΗ το ΗΕ είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αφού επιπλέον είναι $Z\hat{H}\Theta=60^o$, είναι ισόπλευρο.

γ. Επειδή $\Theta H\perp A\Delta$ και $B\Gamma\perp A\Delta$, έχουμε $\Theta H // BK$, οπότε το ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο.
Είναι $\hat{K}=\Theta\hat{H}Z=60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Αφού το ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο και ισχύει $\hat{B}=\hat{K}=60^o$, το ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

398 Θέμα 4 - 1755



α. Επειδή $AB=A\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Delta}B$.

Αφού $AB // \Gamma\Delta$, έχουμε $A\hat{B}\Delta=B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $A\hat{\Delta}B=B\hat{\Delta}\Gamma$, επομένως η ΔΒ είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

β. Από το Β φέρουμε παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει την ΓΔ στο Ε.
Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(AB=A\Delta)$, οπότε είναι ρόμβος.

γ. Επειδή το ΑΒΕΔ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του ΑΕ και ΒΔ διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Είναι:

- $B\hat{O}E=90^o$
- $A\hat{B}\Gamma=B\hat{A}\Delta=120^o$
- $A\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 120^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=60^o$
- $O\hat{B}\Gamma=A\hat{B}\Gamma-A\hat{B}O=120^o-30^o=90^o$
- $O\hat{E}\Gamma=360^o-(B\hat{O}E+\hat{\Gamma}+O\hat{B}\Gamma)=360^o-(90^o+60^o+90^o)=360^o-240^o=120^o$

399 Θέμα 4 - 14882

α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΑΓ είναι διάμεσος και $A\Gamma=B\Gamma=\frac{B\Delta}{2}$, οπότε $B\hat{A}\Delta=90^o$.

Είναι $\hat{B}=60^o$, οπότε $\hat{\Delta}=90^o-\hat{B}=90^o-60^o=30^o$.

β. i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΔ, οπότε
- $K\Lambda // B\Delta$, άρα το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο
- $K\Lambda=\frac{B\Delta}{2}=\frac{2B\Gamma}{2}=B\Gamma=2M\Gamma$.

Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ τα Κ, Μ και Γ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών τους, οπότε $KM=\frac{A\Gamma}{2}$ και $\Gamma\Lambda=\frac{AB}{2}$.

Αφού $AB=A\Gamma$ έχουμε $KM=\Gamma\Lambda$.
Άρα το τραπέζιο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές.

ii. Είναι:
- $A\widehat{K}\Lambda=\widehat{B}=60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\Lambda\widehat{K}M=K\widehat{M}B$, ως εντός εναλλάξ
- $K\widehat{M}B=A\widehat{\Gamma}B=60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

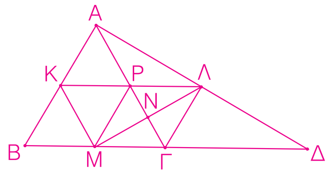
Οπότε $\Lambda\widehat{K}M=60^o=A\widehat{K}\Lambda$.

Τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και $AK\Lambda$ έχουν:
- $K\Lambda$ κοινή
- $AK=KM$, αφού $AK=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{A\Gamma}{2}=KM$
- $\Lambda\widehat{K}M=A\widehat{K}\Lambda$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) , οπότε $K\widehat{M}\Lambda=\widehat{A}=90^o$.

Επομένως το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ορθογώνιο.

2ος τρόπος



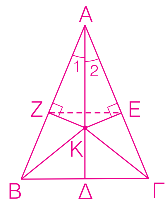
Έστω Ρ το σημείο τομής των $K\Lambda$, $A\Gamma$.

Αφού το Λ είναι το μέσο του ΑΔ και $P\Lambda // \Gamma\Delta$, το Ρ είναι το μέσο του ΑΓ .

Είναι $PM=\dfrac{AB}{2}=AK=\dfrac{K\Lambda}{2}$.

Επειδή επιπλέον η ΡΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΚΜΛ έχουμε $K\hat{M}\Lambda=90^o$, άρα το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

400 Θέμα 4 - 1884



α. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο ΑΔ του ΒΓ έχουμε $KB=K\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή Το Κ ανήκει στην ΑΔ διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ έχουμε $KZ=KE$, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΑΚ και ΕΑΚ έχουν:
- ΑΚ κοινή
- $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ=AE$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές, με $A\widehat{Z}E=A\widehat{E}Z$

Είναι $A\widehat{Z}E+A\widehat{E}Z+\widehat{A}=180^o \Leftrightarrow 2A\widehat{Z}E=180^o-\widehat{A} \Leftrightarrow A\hat{Z}E=90^o-\dfrac{\hat{A}}{2}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, με $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ και έχουμε $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B}=180^o-A \Leftrightarrow \hat{B}=90^o-\dfrac{\hat{A}}{2}$.

Άρα $\hat{B}=A\hat{Z}E$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, οπότε $ZE // B\Gamma$.

Επομένως το ΖΕΓΒ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\widehat{K}B=A\widehat{K}\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

401 Θέμα 4 - 1718

α. i. Είναι $AA'\perp\varepsilon$ και $\Gamma\Gamma'\perp\varepsilon$, οπότε $AA'//\Gamma'\Gamma$. Άρα το $AA'\Gamma'\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι $AA'//OO'//\Gamma\Gamma'$ και $OA=O\Gamma$, οπότε $O'A'=O'\Gamma'$.

Άρα η OO' είναι διάμεσος του τραπεζίου $AA'\Gamma'\Gamma$.

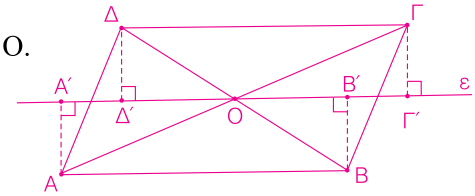
Οπότε $OO' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

ii. Είναι $BB' \perp \varepsilon$ και $\Delta\Delta' \perp \varepsilon$, οπότε $BB' \perp \Delta\Delta'$.

Άρα το $BB'\Delta'\Delta$ είναι τραπέζιο.

Βρίσκουμε ότι η OO' είναι διάμεσος και του τραπεζίου $BB'\Delta'\Delta$.

Οπότε $OO' = \dfrac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$.

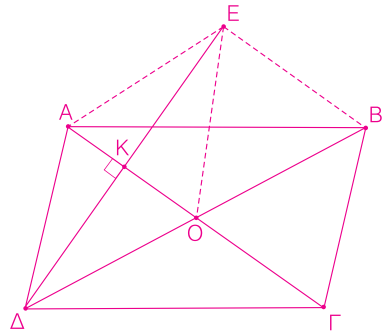


β. Η ευθεία ε είναι παράλληλη στις ΑΒ, ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο.

Επομένως η ευθεία ε είναι μεσοπαράλληλος των ΑΒ και ΓΔ .

Τα σημεία Α , Β , Γ και Δ των ΑΒ , ΓΔ ισαπέχουν από τη μεσοπαράλληλό τους, οπότε $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$.

402 Θέμα 4 - 1770



α. Η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ , οπότε $OE = O\Delta \Leftrightarrow OE = \dfrac{B\Delta}{2}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{\Delta BE}$ η ΕΟ είναι διάμεσος και ίση με $\dfrac{B\Delta}{2}$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{E}B = 90^o$.

γ. Είναι $BE \perp \Delta E$ και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε $BE // A\Gamma$. Επειδή η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ , έχουμε $AE = A\Delta \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

Οπότε το ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

403 Θέμα 4 - 1736

α. Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι $A\hat{B}E = \hat{\Gamma} = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $\hat{B} = 30^o$, οπότε $AE = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2AE$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $E\Delta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2E\Delta$.

Τα Κ , Λ είναι μέσα των διαγώνιων του τραπεζίου ΑΒΓΔ , οπότε

$K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \dfrac{2E\Delta - 2AE}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \dfrac{2(E\Delta - AE)}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = E\Delta - AE \Leftrightarrow K\Lambda = A\Delta$.

γ. Είναι $K\Lambda // AB$, οπότε για να είναι το ΑΒΛΚ παραλληλόγραμμο αρκεί $K\Lambda = AB$.

Είναι $K\Lambda = A\Delta$, οπότε αρκεί $A\Delta = AB$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

404 Θέμα 4 - 1876

α. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΔ, είναι ίσα, θα έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, οπότε έχουμε $\hat{A} = \hat{B}$.

Άρα το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές με $EA = EB$.

Επειδή $A\Gamma = B\Delta$, έχουμε $E\Delta = E\Gamma$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα ΕΓΔ και ΕΑΒ είναι ορθογώνια και ισοσκελή, οπότε:

- $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = 45^o$
- $E\hat{A}B = E\hat{B}A = 45^o$

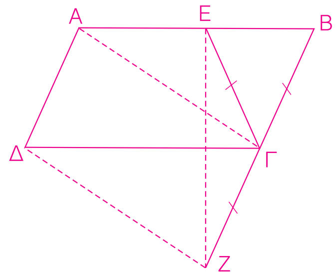
Επομένως $E\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{B}A$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $\Delta\Gamma // AB$.

γ. • Στα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΒΓ οι ΕΚ , ΕΛ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως $EK = \dfrac{A\Delta}{2}$ και $E\Lambda = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε $EK = E\Lambda$, άρα το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\Delta\Gamma // AB$ οπότε το ΔΓΒΑ είναι τραπέζιο και επειδή η ΚΛ είναι διάμεσος, έχουμε $K\Lambda // AB$.

405 Θέμα 4 - 1856



α. Στο τρίγωνο ΕΒΖ η ΕΓ είναι διάμεσος και $ΕΓ = ΓΒ = \frac{ΒΖ}{2}$, οπότε

$Β\hat{Ε}Ζ = 90^o$.

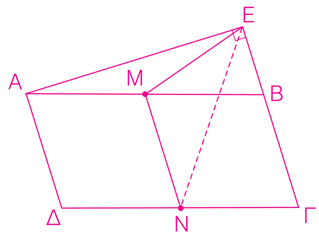
β. Επειδή $ΑΕ // ΓΔ$, το ΑΕΓΔ είναι τραπέζιο.

Έχουμε $ΓΕ = ΓΒ$ και $ΓΒ = ΑΔ$, οπότε $ΓΕ = ΑΔ$, άρα το ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΓΖ // = ΑΔ$, άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

406 Θέμα 4 - 1786

α. Είναι $ΜΒ // ΓΝ$ και $ΜΒ = ΓΝ$, ως μισά ίσων τμημάτων.



Επειδή $ΜΒ // = ΓΝ$, το ΜΒΓΝ είναι παραλληλόγραμμο.

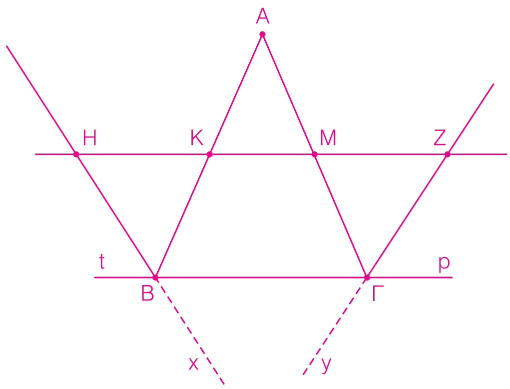
Είναι $ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ$. Άρα το ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το ΜΒΓΝ είναι ρόμβος έχουμε $ΜΝ // ΒΓ$, οπότε το ΜΕΓΝ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ, το ΕΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ = ΝΓ$.

Οπότε το ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Επειδή $ΜΕ = ΜΝ$ έχουμε $Μ\hat{Ε}Ν = Μ\hat{Ν}Ε$. Αφού $ΜΝ // ΕΓ$, έχουμε $Μ\hat{Ν}Ε = Ν\hat{Ε}Γ$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Μ\hat{Ε}Ν = Ν\hat{Ε}Γ$, οπότε η ΕΝ είναι διχοτόμος της $Μ\hat{Ε}Γ$.

407 Θέμα 4 - 13838



α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, άρα ΚΜ//ΒΓ. Το ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο αφού ΚΜ//ΒΓ. Είναι ΚΒ = ΜΓ, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ.

Άρα το ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Είναι: • ΚΜ//ΒΓ, άρα και ΗΖ//ΒΓ. Επιπλέον οι ΒΗ και ΓΖ τεμνόμενες από τη ΒΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ($Γ\hat{Β}x$ και $Β\hat{Γ}y$) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

- $Γ\hat{Β}x = Η\hat{Β}t = \frac{\hat{Β}εξ}{2}$
- $Β\hat{Γ}y = Ζ\hat{Γ}p = \frac{\hat{Γ}εξ}{2}$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε οι ίσες γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $\hat{Β}εξ$ και $\hat{Γ}εξ$ είναι αμβλείες επομένως:

$\hat{Β}εξ < 180^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Β}εξ}{2} < 90^o$ και $\hat{Γ}εξ < 180^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Γ}εξ}{2} < 90^o$

Άρα $\frac{\hat{Β}εξ}{2} + \frac{\hat{Γ}εξ}{2} < 180^o \Leftrightarrow Η\hat{Β}t + Ζ\hat{Γ}p < 180^o \Leftrightarrow Γ\hat{Β}x + Β\hat{Γ}y < 180^o$. Οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται, άρα το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΓ και ΖΗ.

Έχουμε: • $\hat{Β} = \hat{Γ} \Leftrightarrow \hat{Β}εξ = \hat{Γ}εξ \Leftrightarrow \frac{\hat{Β}εξ}{2} = \frac{\hat{Γ}εξ}{2} \Leftrightarrow Κ\hat{Β}Η = Μ\hat{Γ}Ζ$

- $Γ\hat{Β}Η = Β\hat{Γ}Ζ$ ως άθροισμα ίσων γωνιών $\hat{Β} + Κ\hat{Β}Η$ και $\hat{Γ} + Μ\hat{Γ}Ζ$.

Άρα το τραπέζιο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες του $Γ\hat{Β}Η$ και $Β\hat{Γ}Ζ$ ίσες.

408 Θέμα 4 - 1784

α. Επειδή $AZ = A\Delta$, το $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{Z}\Delta = A\hat{\Delta}Z$.

Στο $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ είναι $A\hat{\Delta}Z + A\hat{Z}\Delta + \Delta\hat{A}Z = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{Z}\Delta + \varphi = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}Z = 180^o - \varphi \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 90^o - \dfrac{\varphi}{2}$.

β. Επειδή $A\Delta // BE$, έχουμε $Z\hat{B}E + \varphi = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{B}E = 180^o - \varphi$.

Αφού το $\overset{\triangle}{BZE}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $E\hat{Z}B = Z\hat{E}B$.

Στο $\overset{\triangle}{BZE}$ είναι $E\hat{Z}B + Z\hat{E}B + Z\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow E\hat{Z}B + E\hat{Z}B + 180^o - \varphi = 180^o \Leftrightarrow 2E\hat{Z}B = \varphi \Leftrightarrow E\hat{Z}B = \dfrac{\varphi}{2}$.

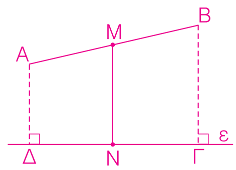
γ. Είναι $\Delta\hat{Z}E = 180^o - A\hat{Z}\Delta - E\hat{Z}B = 180^o - \left(90^o - \dfrac{\varphi}{2}\right) - \dfrac{\varphi}{2} = 180^o - 90^o + \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔZE η ZO είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ZO = \dfrac{\Delta E}{2} = O\Delta = OE$.

Επειδή:

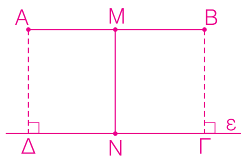
- $AZ = A\Delta$ και $OZ = O\Delta$, η AO είναι η μεσοκάθετος του ΔZ.
- $BZ = BE$ και $OZ = OE$, η BO είναι η μεσοκάθετος του ZE.

409 Θέμα 4 - 1715



α. i. 1. Αν $A\Delta < B\Gamma$, τότε $A\Delta \neq B\Gamma$ άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.

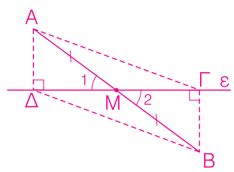
2. Αν $A\Delta = B\Gamma$, τότε $A\Delta // = B\Gamma$.



Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{\Delta} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.

ii. • Αν $A\Delta < B\Gamma$, τότε το MN είναι η διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε $MN = \dfrac{A\Delta + B\Gamma}{2}$.

• Αν $A\Delta = B\Gamma$, τότε $MN = A\Delta = B\Gamma$.



β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAM και ΓBM έχουν:
- $MA = MB$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = M\Gamma$

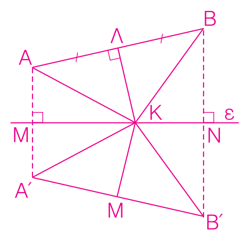
Επομένως το Μ είναι μέσο και του $\Gamma\Delta$, οπότε τα M, N ταυτίζονται.

Επειδή $MA = MB$ και $M\Delta = M\Gamma$ το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $AM > M\Delta$ και $MB > M\Gamma$ θα είναι $AM + MB > M\Delta + M\Gamma \Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$.

Άρα το $A\Gamma B\Delta$ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.

410 Θέμα 4 - 1735



α. Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' // BB'$.

β. Επειδή η $K\Lambda$ είναι η μεσοκάθετος του AB, έχουμε $KA = KB$. Αφού η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος των AA' και BB' έχουμε $KA = KA'$ και $KB = KB'$.

Οπότε $KA' = KB'$, άρα το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ. Για να είναι το τετράπλευρο $ABB'A'$ ορθογώνιο, πρέπει $\hat{A} = 90^o$.

Οπότε $AB \perp AA'$ και αφού $\varepsilon \perp AA'$, θα έχουμε $AB // \varepsilon$.

411 Θέμα 2 - 1581

α. Η επίκεντρη γωνία x και η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε $x = 2\hat{A} = 2 \cdot 44^o = 88^o$.

β. Επειδή $B\hat{O}\Delta = 88^o$, είναι $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 88^o$, άρα $\overset{\frown}{BA\Delta} = 360^o - 88^o = 272^o$. Οπότε $y = \dfrac{272^o}{2} = 136^o$.

412 Θέμα 2 - 13441

α. Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, άρα $\hat{\Gamma} = \dfrac{64^o}{2} = 32^o$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 74^o + 32^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 74^o$.

β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^o$.

γ. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ , άρα $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{M\Gamma}$ είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}M = \Gamma\hat{B}M$, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα.
Άρα η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.

413 Θέμα 2 - 12638

α. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΑΒ άρα $\hat{\Gamma} = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{60^o}{2} = 30^o$.

β. Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 30^o + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}\Gamma = 100^o$.

Επομένως η $A\hat{\Delta}O = 100^o$, ως κατά κορυφήν της.

414 Θέμα 2 - 13753

α. Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο οπότε $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

β. Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 2x + x = 180^o \Leftrightarrow 3x = 180^o \Leftrightarrow x = 60^o$.

γ. Η γωνία $B\hat{O}\Delta$ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Delta}$. Άρα $B\hat{O}\Delta = 2x = 120^o$

415 Θέμα 2 - 1663

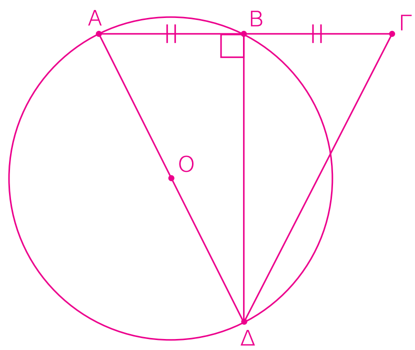
Επειδή $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, είναι $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, οπότε $B\Delta = \Gamma\Delta$.

Είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$, διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλια.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν:
- $B\Delta = \Delta\Gamma$
- ΑΔ κοινή

Άρα είναι ίσα.

416 Θέμα 2 - 13740



α. Στο τρίγωνο ΔΑΓ το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως $\Delta A = \Delta\Gamma$.

β. Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

417 Θέμα 2 - 12642

α. Η γωνία ΒΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο ΒΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Αρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \dfrac{50^o}{2} = 25^o$.

β. Επειδή η $ΑΔ$ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΒΔ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή.

Άρα $\hat{ΑΒΔ} = 90^\circ \Rightarrow \hat{ΔΒΕ} = 90^\circ$. Είναι $\hat{ΒΔΓ} = 25^\circ$.

Οι γωνίες ΒΔΕ και ΒΕΔ είναι συμπληρωματικές, οπότε $\hat{ΒΕΔ} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Άρα $\hat{ΑΕΔ} = 65^\circ$.

418 Θέμα 2 - 13756

α. Η γωνία $\hat{ΑΚΒ}$ είναι επίκεντρη και η γωνία $\hat{ΑΓΒ}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΒ.

Άρα $\hat{ΑΚΒ} = 2\hat{ΑΓΒ}$.

β. Είναι $ΚΑ = ΚΒ = ρ$, άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

γ. Στο τρίγωνο ΚΑΒ :

$$\hat{ΚΑΒ} + \hat{ΑΒΚ} + \hat{ΑΚΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΚΑΒ} + \hat{ΚΑΒ} + 2\hat{ΑΓΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ΚΑΒ} + 2\hat{ΑΓΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΚΑΒ} + \hat{ΑΓΒ} = 90^\circ$$

419 Θέμα 2 - 1580

α. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{ΒΓΔ}$ και η επίκεντρη $\hat{ΒΟΔ}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$$\hat{ΒΓΔ} = \frac{\hat{ΒΟΔ}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ .$$

β. Στο τρίγωνο ΒΜΓ η $\hat{ΒΓΔ}$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{ΒΓΔ} = \hat{ΓΒΜ} + ω \Leftrightarrow 60^\circ = 15^\circ + ω \Leftrightarrow ω = 45^\circ$.

420 Θέμα 2 - 1673

α. Επειδή $ΟΑ = ΚΑ = ΟΚ = ρ$, το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:

- $\hat{ΒΑΚ} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
- $\hat{Κ} = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο
- $\hat{ΒΑΚ} + \hat{Κ} + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 30^\circ$

421 Θέμα 2 - 1696

α. Είναι $ΒΑ = ΚΓ = ΚΑ = ΚΒ = ρ$, άρα το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:

- $\hat{ΒΚΑ} = 60^\circ$, αφού το $\overset{\triangle}{ΒΚΑ}$ είναι ισόπλευρο
- $\hat{ΒΔΑ} = \dfrac{\hat{ΒΚΑ}}{2} = 30^\circ$

γ. Είναι:

- $\hat{ΒΑΓ} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\hat{ΑΒΓ} = 60^\circ$, αφού το $\overset{\triangle}{ΒΚΑ}$ είναι ισόπλευρο
- $\hat{ΒΓΑ} = \hat{ΒΔΑ} = 30^\circ$.

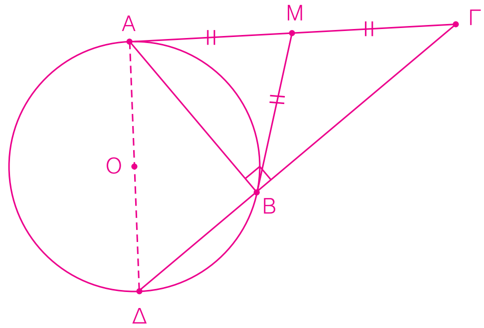
422 Θέμα 2 - 1561

α. Είναι:

- $\hat{ΒΑΓ} = \dfrac{\overset{\frown}{ΒΔΓ}}{2} = \dfrac{160^\circ}{2} = 80^\circ$
- $\hat{Γ} = \hat{φ} = 30^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{Β} = 180^\circ - \hat{ΒΑΓ} - \hat{Γ} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

β. Είναι $\hat{Β} = 70^\circ$, οπότε $\dfrac{\overset{\frown}{ΑΕΓ}}{2} = 70^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΕΓ} = 140^\circ$.

423 Θέμα 2 - 13747



α. Είναι: • $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα

• $M\Gamma = AM$, άρα $MA = MB = M\Gamma$

Δηλαδή η BM, που είναι διάμεσος προς την πλευρά $A\Gamma$ στο τρίγωνο $BA\Gamma$, ισούται με το μισό της $A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $A\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma = 90^o$.

β. Είναι $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, οπότε και $A\hat{B}\Delta = 90^o$, η οποία είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία A , Δ είναι αντιδιαμετρικά.

424 Θέμα 2 - 12637

α. Η $B\hat{A}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως $\hat{\Gamma} + B\hat{A}x = 35^o$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η γωνία του $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη, που βαίνει στο τόξο $B\Gamma$, άρα $\hat{A} = \dfrac{110^o}{2} = 55^o$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 55^o + 35^o = 90^o$, οπότε και $\hat{B} = 90^o$,
επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

425 Θέμα 2 - 13754

α. Η γωνία $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

β. Είναι $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta = 50^o$, ως εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Delta$.

γ. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από τη χορδή $\Delta\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ.

Επομένως $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma - B\hat{A}\Delta = 90^o - 50^o = 40^o$. Άρα $\hat{\Delta}_1 = 40^o$.

426 Θέμα 2 - 1665

α. Η εφαπτόμενη $B\Gamma$ είναι κάθετη στην ακτίνα OB στο σημείο επαφής, άρα $\Gamma\hat{B}O = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ $(\hat{B} = 90^o)$, έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $OB = \dfrac{O\Gamma}{2} \Rightarrow OA = \dfrac{O\Gamma}{2} \Rightarrow O\Gamma = 2OA$.

β. Είναι $B\hat{\Delta}A = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ είναι $B\hat{O}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + 30^o = 90^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 60^o$.

Είναι $OB = O\Delta$ και $B\hat{O}\Delta = 60^o$, οπότε το τρίγωνο $OB\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα $B\Delta = OB$.

Έχουμε $\hat{A} = \dfrac{B\hat{O}\Delta}{2} = 30^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma O$ και $B\Delta A$ έχουν:
- $OB = B\Delta$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Gamma = A\Delta$.

427 Θέμα 2 - 1626

α. Είναι:
- $O\Gamma \perp \Gamma\Delta$, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$
- $\Gamma\hat{O}\Delta = 2\hat{A} = 60^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο
- $O\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{O}\Delta + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^o$

β. Επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta}$ είναι $\Gamma A = \Gamma\Delta$.

Είναι $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} = 30^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

Οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta} = 30^\circ$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

428 Θέμα 2 - 1672

α. Είναι:

- $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\hat{B} = \Gamma\hat{A}x = 45^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

β. Έχουμε $B\Gamma // \Delta E$, οπότε το $B\Gamma E\Delta$ είναι τραπέζιο. Επειδή επιπλέον είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ $(=45^\circ)$, το $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

429 Θέμα 2 - 1530

α. Η $x\hat{A}\Delta$ σχηματίζεται από τη χορδή $A\Delta$ και την εφαπτομένη Ax , οπότε $x\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Delta = 40^\circ$.

Είναι:
- $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}X - X\hat{A}\Delta = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$
- $\hat{B}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

β. Είναι $A\hat{B}\Gamma = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε

$\hat{\varphi} + A\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi = 180^\circ - A\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow \varphi = 180^\circ - 85^\circ \Leftrightarrow \varphi = 95^\circ$.

430 Θέμα 2 - 1703

α. Είναι $\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$.

β. Επειδή $\overset{\frown}{B\Delta} = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$, έχουμε $B\hat{O}\Delta = 120^\circ$.

γ. Είναι $B\hat{A}\Delta = \dfrac{B\hat{O}\Delta}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

431 Θέμα 2 - 1695

α. Είναι:
- $x = A\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.
- $y = 2x = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$, αφού η y είναι επίκεντρη και η x εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.
- $\omega = A\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, αφού η ω σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη ε στο Γ που στο αντίστοιχο τόξο βαίνει η εγγεγραμμένη $A\hat{B}\Gamma$.

β. Επειδή $OA = O\Gamma = \rho$ και $A\hat{O}\Gamma = 60^\circ$, το $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

432 Θέμα 2 - 1769

α. Οι $\Delta\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$.

β. Είναι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα διότι:

- $\hat{\Delta} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
- $\hat{\Gamma} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

γ. Είναι:
- $\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}E$, αφού το ΑΔΕΖ είναι εγγράψιμο
- $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{B}\Gamma$, αφού το ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμο
- $\Delta\hat{A}E = E\hat{B}\Gamma$, από το **α.** ερώτημα

Άρα $\Delta\hat{Z}E = E\hat{Z}\Gamma$, οπότε η ΕΖ είναι η διχοτόμος της $\Delta\hat{Z}\Gamma$.

433 Θέμα 2 - 1712

α. i. Το Γ είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B}$, οπότε $A\Gamma = B\Gamma$. Αφού το ΑΓΒΔ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$.

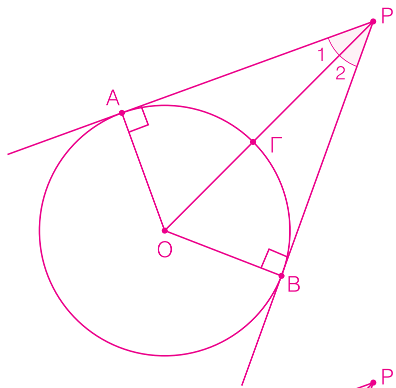
Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
- $A\Gamma = \Gamma B$
- $A\Delta = BE$
- $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Είναι $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E \overset{\alpha.i.}{=} \Delta\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$, αφού η $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β. Αν ΓΔ διάμετρος, τότε $O\Gamma \perp \Gamma E$, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

434 Θέμα 4 - 13520



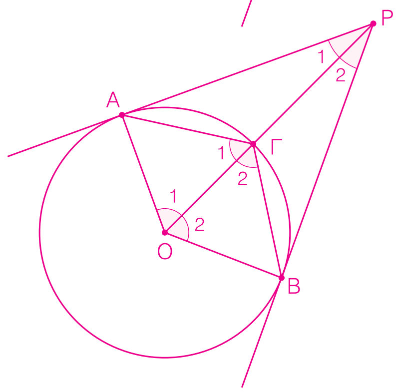
α. • Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια.

• Η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B = 60^\circ$, οπότε $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\hat{P}_1 = 30^\circ$, οπότε $OA = \dfrac{OP}{2} \Leftrightarrow PO = 2\rho$

β. • Στο τρίγωνο ΟΡΑ έχουμε:

$\hat{O}_1 + O\hat{A}P + O\hat{P}A = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$.



• Είναι $OA = O\Gamma = \rho$, οπότε το τρίγωνο ΟΓΑ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$ (1).

• Στο τρίγωνο ΟΡΒ έχουμε:

$\hat{O}_2 + O\hat{B}P + O\hat{P}B = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 60^\circ$.

• Είναι $OB = O\Gamma = \rho$, οπότε το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, άρα ισόπλευρο.

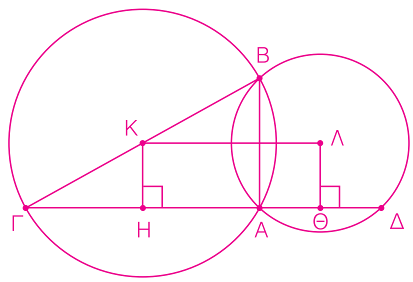
Επομένως, $\hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

γ. Τα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ είναι ισόπλευρα, οπότε $A\Gamma = OA = O\Gamma = OB$.

Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

435 Θέμα 4 - 12419



α. Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) με $R > r$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και η τέμνουσα ΓΑΔ παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ.

Φέρουμε τα αποστήματα ΚΗ και ΛΘ των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες ($K\Lambda // H\Theta$ από υπόθεση και $KH // H\Theta$ αφού ΚΗ, ΛΘ είναι κάθετα στη ΓΔ). Οπότε $K\Lambda = H\Theta$.

Επίσης, τα σημεία $Η, Θ$ είναι μέσα των χορδών $ΑΓ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα.

Οπότε έχουμε: $ΓΔ = ΓΑ + ΑΔ = 2ΗΑ + 2ΑΘ = 2(ΗΑ + ΑΘ) = 2ΗΘ = 2ΚΛ$

β. Η διάκεντρος $ΚΛ$ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε $ΑΒ \perp ΚΛ$. Αφού, $ΚΛ // ΓΔ$ έχουμε, $ΑΒ \perp ΚΛ$.

Επομένως, η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο $(Κ, R)$, οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος.

Άρα, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

436 Θέμα 4 - 1739

α. Είναι:
- $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΑΓ} = 120^o$
- $\overset{\frown}{ΒΓ} = 360^o - 120^o - 120^o = 120^o$

Οπότε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{ΓΑ}$, άρα $ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ$

Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΑΕ} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$, οπότε $ΑΔ = ΑΕ$.

Είναι $Δ\hat{Α}Β = \dfrac{\overset{\frown}{ΒΔ}}{2} = 30^o$ και $Α\hat{Δ}Ε = \dfrac{\overset{\frown}{ΑΕ}}{2} = 30^o$.

Όμοια $Ε\hat{Α}Η = Α\hat{Ε}Η = 30^o$, οπότε $Α\hat{Ζ}Δ = Α\hat{Η}Ε = 180^o - 2 \cdot 30^o = 180^o - 60^o = 120^o$.

Τα τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΑΗΕ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΑΕ$
- $Δ\hat{Α}Ζ = Η\hat{Α}Ε$
- $Α\hat{Δ}Ζ = Α\hat{Ε}Η$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

γ. Στο τρίγωνο $ΑΖΗ$, είναι:
- $\hat{Α} = \dfrac{\overset{\frown}{ΒΓ}}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$
- $\hat{Ζ} = 180^o - Α\hat{Ζ}Δ = 180^o - 120^o = 60^o$
- $\hat{Η} = 180^o - Α\hat{Η}Ε = 180^o - 120^o = 60^o$
- $\hat{Α} = \hat{Ζ} = \hat{Η} = 60^o$

Οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $ΑΖ = ΖΗ = ΑΗ$.

Αφού $ΔΖ = ΑΖ$, $ΗΕ = ΑΗ$ έχουμε $ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ$.

Οπότε η $ΔΕ$ τριχοτομείται από τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

437 Θέμα 4 - 1720

α. Είναι:
- $ΖΒ = ΖΓ$, οπότε το τρίγωνο $ΖΒΓ$ είναι ισοσκελές.
- $Ζ\hat{Β}Γ = Β\hat{Α}Γ = 60^o$ ως γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως το τρίγωνο $ΖΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$ και $ΖΒ = ΖΓ = ΒΓ$. Οπότε $ΑΒ = ΑΓ = ΖΒ = ΖΓ$, άρα το $ΑΓΖΒ$ είναι ρόμβος.

γ. Επειδή το $ΑΓΖΒ$ είναι ρόμβος, έχουμε $ΒΓ \perp ΑΖ$ και αφού έχουμε $ΘΗ \perp ΑΖ$, είναι $ΒΓ // ΘΗ$.

Άρα το $ΒΓΗΘ$ είναι τραπέζιο.

Είναι $\hat{Θ} = \hat{Β} = 60^o$ και $\hat{Η} = \hat{Γ} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $\hat{Θ} = \hat{Η}$, άρα το $ΒΓΗΘ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

438 Θέμα 4 - 1717

α. Επειδή η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $(Κ, ρ)$ και βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Άρα $Α\hat{Β}Γ = 90^o$.

β. Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Λ, R) και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε $A\hat{B}\Delta = 90^o$.

Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o$. Άρα τα Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

γ. Τα K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$, $A\Delta$ στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ οπότε $K\Lambda // \Gamma\Delta$.
Άρα το $K\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο.

439 Θέμα 4 - 1848

α. Έχουμε $A\Delta = B\Gamma$, οπότε $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$. Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{A}B$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, οπότε $AB // \Delta\Gamma$.

β. Επειδή $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$, έχουμε $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$, οπότε $A\Delta // B\Gamma$.

Είναι $AB // \Delta\Gamma$ και $A\Delta // B\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

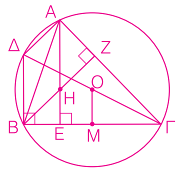
Επειδή $\hat{B} = 90^o$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Delta\hat{A}B = 90^o$, οπότε $\overset{\frown}{\Delta\Gamma B} = 180^o$.
Άρα η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ. Επειδή τα K, Λ είναι τα μέσα των χορδών $\Gamma\Delta$, ΓB, έχουμε ότι $OK \perp \Gamma\Delta$ και $O\Lambda \perp B\Gamma$.

Το $O\Lambda\Gamma K$ έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{\Gamma} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

440 Θέμα 4 - 1897



α. Επειδή η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^o$, η $\Delta\Gamma$ είναι διάμετρος.

Οπότε και $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$, άρα $\Delta A \perp A\Gamma$.

β. Είναι:
- $AH \perp B\Gamma$ και $\Delta B \perp B\Gamma$, άρα $AH // \Delta B$
- $BH \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp A\Gamma$, άρα $BH // A\Delta$

Οπότε το $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα O, M είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$, οπότε $OM = \frac{B\Delta}{2} = \frac{AH}{2}$, αφού το $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

441 Θέμα 4 - 1772

α. Είναι $OE \perp ZH$, αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.
Επειδή το E είναι το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$, έχουμε $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{E\Gamma}$, οπότε $EB = E\Gamma$.
Αφού επιπλέον $OB = O\Gamma = \rho$, το OE είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

Άρα $OE \perp B\Gamma$, επομένως $B\Gamma // ZH$.

β. Είναι $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{E\Gamma}$, άρα $B\hat{O}E = \Gamma\hat{O}E$.
Στο τρίγωνο OZH, το OE είναι ύψος και διχοτόμος.
Οπότε το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές με κορυφή το O, άρα $OZ = OH$.

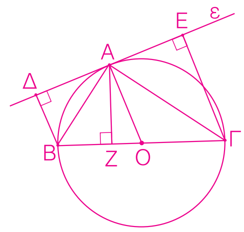
γ. i. Είναι:
- $B\hat{E}Z = B\hat{\Gamma}E$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $B\hat{\Gamma}E = \frac{B\hat{O}E}{2}$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Οπότε $B\hat{E}Z = \frac{B\hat{O}E}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z\hat{O}H}{2} = \frac{Z\hat{O}H}{4}$.

ii. Το τρίγωνο OEZ είναι ορθογώνιο $(\hat{E} = 90^o)$ με $OE = OB = \frac{OZ}{2}$.

Άρα $\hat{Z} = 30^o$, οπότε $\hat{H} = \hat{Z} = 30^o$ και $\hat{O} = 180^o - \hat{Z} - \hat{H} = 180^o - 30^o - 30^o = 120^o$.

442 Θέμα 4 - 1809



α. Είναι:
- $B\widehat{A}\Gamma = 90^{o}$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\Delta\widehat{A}B = A\widehat{\Gamma}B$ και $E\widehat{A}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης

Οπότε:
- $\Delta\widehat{B}A = 90^{o} - \Delta\widehat{A}B = 90^{o} - A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{B}\Gamma$.
- $E\widehat{\Gamma}A = 90^{o} - E\widehat{A}\Gamma = 90^{o} - A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B$

Επομένως η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{B}\Gamma$, και η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{\Gamma}B$.

β. Η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{B}\Gamma$, οπότε $A\Delta = AZ$.
Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{\Gamma}B$, οπότε $AZ = AE$.
Άρα $A\Delta = AE = AZ$.

γ. Επειδή $B\Delta \perp \varepsilon$ και $\Gamma E \perp \varepsilon$, έχουμε $B\Delta // \Gamma E$, οπότε το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Επειδή το O είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $OA \perp \varepsilon$, έχουμε $OA // B\Delta$.
Επομένως η OA είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

Άρα $OA = \dfrac{B\Delta + \Gamma E}{2} \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = 2OA \Rightarrow \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = 2OB \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

443 Θέμα 4 - 1883

α. Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}A = 90^{o}$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = 90^{o} - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma = \widehat{B}$, αφού $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^{o}$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$.

Οπότε $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{B}$.

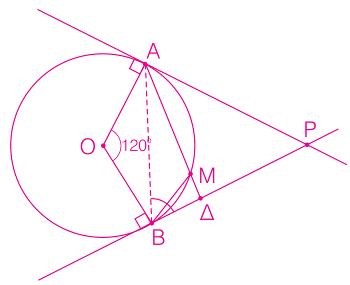
β. Είναι:
- $\widehat{B} = 90^{o} - \widehat{\Gamma}$
- $M\widehat{\Delta}B = 180^{o} - 90^{o} - O\widehat{\Delta}\Gamma = 90^{o} - \widehat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

Άρα $\widehat{B} = M\widehat{\Delta}B$, οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ. Είναι:
- $MA = M\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $MB = M\Delta$, αφού το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές

Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB .

444 Θέμα 4 - 1768



α. Στο τετράπλευρο $PAOB$ είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^{o}$. Οπότε
$\widehat{P} = 360^{o} - 90^{o} - 90^{o} - 120^{o} = 60^{o}$. Επιπλέον $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.
Άρα, το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $A\widehat{O}B = 120^{o}$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^{o}$.
Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 240^{o} .
Η γωνία $A\widehat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.
Τότε $A\widehat{M}B = \dfrac{240^{o}}{2} = 120^{o}$.

Στο τρίγωνο MAB έχουμε $M\widehat{A}B + M\widehat{B}A + A\widehat{M}B = 180^{o} \Leftrightarrow M\widehat{A}B + M\widehat{B}A + 120^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow M\widehat{A}B + M\widehat{B}A = 60^{o}$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι $\widehat{B} = 60^{o}$ οπότε $M\widehat{A}B = 30^{o}$.
Από το ερώτημα **β.** προκύπτει ότι $M\widehat{B}A = 30^{o}$. Άρα $MA = MB$.

Επομένως $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το M είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

445 Θέμα 2 - 12643

α. Η γωνία $E\hat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\hat{\Gamma}B = \hat{A} = 80^\circ$.

β. Η γωνία $E\hat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματική της $\hat{B}$ του τετραπλεύρου, οπότε $E\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.
Στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$B\hat{E}\Gamma + E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma = 30^\circ$.

446 Θέμα 2 - 13818

α. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow 4x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ$.

β. Έχουμε $\hat{A} = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ$, $\hat{\Gamma} = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$.

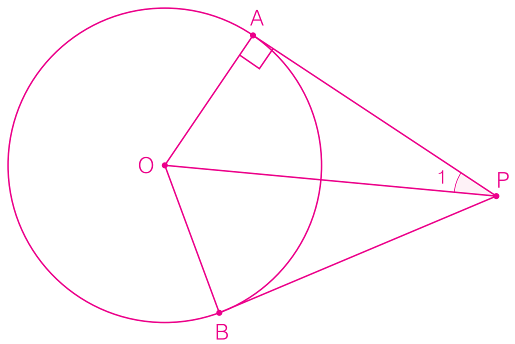
Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές.

Οπότε $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 125^\circ$.

447 Θέμα 2 - 12641

α. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε $P\hat{A}O + P\hat{B}O = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
Επομένως το τετράπλευρο PAOB είναι εγγράψιμο.

β. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων, άρα $A\hat{P}O = \frac{A\hat{P}B}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.



γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η γωνία $\hat{P}_1 = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Άρα $OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 2 \cdot OA \Leftrightarrow OP = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow OP = 8\,cm$.

448 Θέμα 4 - 1807

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^\circ)$, ΔΒΓ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$ οι ΑΜ, ΔΜ είναι διάμεσοι, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$.
Άρα $AM = M\Delta$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΔ, η ΜΝ είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε $MN \perp A\Delta$.

γ. Το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, αφού $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$, οπότε η ΒΓ φαίνεται από τις κορυφές Α και Δ, υπό ίσες γωνίες. Άρα $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.

449 Θέμα 4 - 1886

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^\circ)$ και ΔΒΓ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$ οι ΑΜ, ΔΜ είναι διάμεσοι, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $AM = M\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο Μ. Οπότε $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$, αφού η $A\hat{M}\Delta$ είναι επίκεντρη και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την $A\hat{M}\Delta$.

γ. Επειδή το τετράπλευρο $ΑΓΔΒ$ είναι εγγράψιμο η πλευρά του $ΓΔ$ φαίνεται από τις κορυφές $Α$ και $Β$ υπό ίσες γωνίες. Άρα $Γ\hat{Β}Δ = Γ\hat{Α}Δ$.

450 Θέμα 4 - 1847

α. Είναι $ΟΒ \perp ΑΒ$ και $ΟΓ \perp ΑΓ$.

Επειδή $Α\hat{Β}Ο + Α\hat{Γ}Ο = 90^o + 90^o = 180^o$, το $ΑΒΟΓ$ είναι εγγράψιμο. Η διακεντρική ευθεία $ΑΟ$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$, οπότε $Β\hat{Α}Ο = \frac{Β\hat{Α}Γ}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΟ$ είναι $Β\hat{Α}Ο = 30^o$, άρα $ΟΒ = \frac{ΟΑ}{2} \Rightarrow ΟΑ = 2ΟΒ$.

β. Η $ΖΕ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο $Δ$, άρα $ΖΕ \perp ΟΔ$.

Στο τρίγωνο $ΑΕΖ$ η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{Α} = 60^o$ είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι $ΖΒ = ΖΔ$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΖΔ$ είναι $Ζ\hat{Α}Δ = 30^o$, οπότε $ΖΔ = \frac{ΑΖ}{2} \Rightarrow ΖΒ = \frac{ΑΖ}{2} \Rightarrow 2ΖΒ = ΑΖ$.

δ. Η διακεντρική ευθεία $ΑΟ$ είναι κάθετη στη χορδή $ΒΓ$, άρα $ΑΔ \perp ΒΓ$.
Είναι $ΑΔ \perp ΖΕ$ και $ΑΔ \perp ΒΓ$, οπότε $ΖΕ // ΒΓ$.
Άρα το $ΕΖΒΓ$ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $ΕΓ = ΕΔ$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $ΕΔ = ΔΖ$, αφού το ύψος $ΑΔ$ στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι και διάμεσος.
- $ΔΖ = ΖΒ$, ως εφαπτόμενα τμήματα

Άρα $ΖΒ = ΕΓ$, οπότε το $ΕΖΒΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

451 Θέμα 4 - 1892

α. Είναι $ΑΔ \perp ΒΓ$ και $ΟΜ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΔ // ΟΜ$.

Άρα $Δ\hat{Α}Μ = Α\hat{Μ}Ο$, ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $ΟΑ = ΟΜ$, είναι $Α\hat{Μ}Ο = Μ\hat{Α}Ο$.

Οπότε $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ο$, άρα η $ΑΜ$ είναι η διχοτόμος της $Δ\hat{Α}Ο$.

β. Επειδή το $Μ$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{ΒΓ}$ έχουμε $Β\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Γ$. Από το **α.** ερώτημα είναι $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ο$, οπότε $Β\hat{Α}Μ - Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Γ - Μ\hat{Α}Ο \Rightarrow Δ\hat{Α}Β = Ο\hat{Α}Γ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι $Δ\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Γ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΒ$ είναι $Δ\hat{Α}Β = 90^o - \hat{Β}$.

Είναι $Δ\hat{Α}Ο = Δ\hat{Α}Γ - Ο\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Γ} - Δ\hat{Α}Β = 90^o - \hat{Γ} - (90^o - \hat{Β}) = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

452 Θέμα 4 - 1864

α. Είναι:
- $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90^o$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο.
- $\hat{Β} + \hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Δ} + \hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 60^o$, οπότε $\hat{Β} = 2 \cdot 60^o = 120^o$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ και $ΔΓΒ$ $(\hat{Γ} = 90^o)$ έχουν:
- $ΑΒ = ΒΓ$
- $ΒΔ$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή $AB = B\Gamma$, έχουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}B$.

Επομένως η ΔB είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, άρα $A\hat{\Delta}B = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι $A\hat{\Delta}B = 30^o$, οπότε $AB = \frac{B\Delta}{2} = \rho$.

Άρα $OA = AB = B\Gamma = O\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.

δ. Στο τετράπλευρο $ABOE$ είναι $\hat{A} + \hat{O} = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε το $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

453 Θέμα 4 - 1896

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$.

Επομένως $M\hat{A}B = M\hat{B}A = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB $(\hat{E} = 90^o)$, είναι $E\hat{A}B = 30^o$, οπότε $BE = \frac{AB}{2}$ (1).

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο HBA $(\hat{H} = 90^o)$, είναι $\hat{B} = 30^o$, οπότε $AH = \frac{AB}{2}$ (2).

Από (1), (2) έχουμε $AH = BE$.

γ. Στο τετράπλευρο $AHEB$ είναι $B\hat{E}A = 90^o = B\hat{H}A$, οπότε είναι εγγράψιμο.

δ. Είναι:
- $H\hat{E}A = H\hat{B}A$, αφού $AHEB$ εγγράψιμο
- $H\hat{B}A = E\hat{A}B$, αφού $MA = MB$.

Οπότε $H\hat{E}A = E\hat{A}B$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $EH \parallel AB$.

454 Θέμα 4 - 1799

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ $(\hat{E} = 90^o)$, η $E\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$.

β. Είναι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \Delta B$.

Το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές με $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Delta$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$, έχουμε

$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow B\hat{E}\Delta = 90^o - \hat{\Gamma}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, έχουμε

$\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 90^o - \hat{\Gamma}$.

Άρα $B\hat{E}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$.

γ. Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο, αφού $A\hat{E}B = 90^o = A\hat{\Delta}B$.

δ. Επειδή το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο, έχουμε $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$.

455 Θέμα 4 - 1774

α. Έχουμε $\Delta\hat{A}B = E\hat{B}\Gamma = 60^o$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, άρα $A\Delta \parallel BE$.
Οπότε το $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο.
β. Είναι $\Delta\hat{B}M = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB έχουν:
- $MB = BE$
- ΔB κοινή
- $\Delta \hat{B} M = \Delta \hat{B} E \ (= 60^o)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Το ΔM είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε είναι και ύψος του, άρα $\Delta \widehat{M} B = 90^o$.

Επειδή $\overset{\Delta}{\Delta M B} = \overset{\Delta}{\Delta E B}$, είναι ίσα έχουμε $\Delta \hat{M} B = \Delta \hat{E} B = 90^o$.

Είναι $\Delta \hat{M} B + \Delta \hat{E} B = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

456 Θέμα 4 - 1776

α. Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν:
- $AE = AB$
- $A\Gamma = A\Delta$
- $E\hat{A}\Gamma = \Delta \hat{A} B \ (= 60^o + B\hat{A}\Gamma)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $A\hat{\Gamma}E = A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$.

β. Επειδή:
- $A\hat{\Gamma}E = A\hat{\Delta}B$, το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.
- $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$, το $AZBE$ είναι εγγράψιμο

γ. Είναι $B\hat{Z}\Gamma = E\hat{Z}\Delta = E\hat{Z}A + A\hat{Z}\Delta = E\hat{B}A + A\hat{\Gamma}\Delta = 60^o + 60^o = 120^o$.

457 Θέμα 4- 1779

α. i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
- $B\Gamma = A\Gamma$
- $\Gamma E = A\Delta$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $E\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}E$.

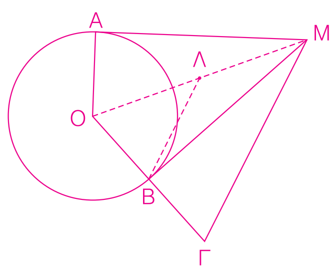
Στο τρίγωνο $O\Gamma E$ η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εξωτερική, οπότε

$B\hat{O}\Gamma = O\hat{\Gamma}E + O\hat{E}\Gamma \overset{i.}{=} E\hat{B}\Gamma + O\hat{E}\Gamma = 180^o - B\hat{\Gamma}E = 180^o - 60^o = 120^o$.

β. Είναι:
- $\Delta\hat{O}E = BO\Gamma = 120^o$
- $\hat{A} + \Delta\hat{O}E = 60^o + 120^o = 180^o$

Άρα το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο.

458 Θέμα 4 - 14878



α. Είναι $OA \perp AM$ και $OB \perp BM$.

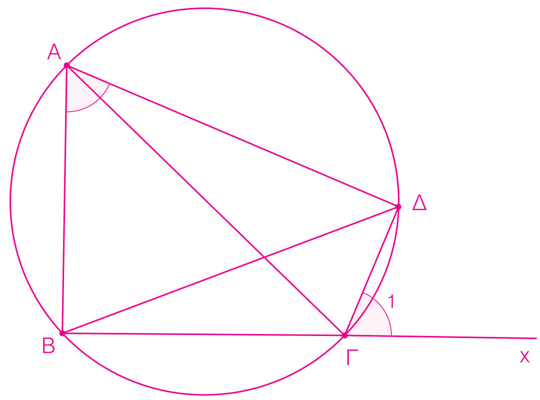
Οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 90^o + 90^o = 180^o$. Άρα το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο.

β. Αφού $\hat{A} = 90^o$, η OM είναι διάμετρος του περιγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$.

Οπότε το κέντρο Λ του περιγγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$ είναι το μέσο του MO.

γ. Στο τρίγωνο $OM\Gamma$ τα σημεία B, Λ είναι μέσα των $O\Gamma$, OM, οπότε $B\Lambda // M\Gamma$.

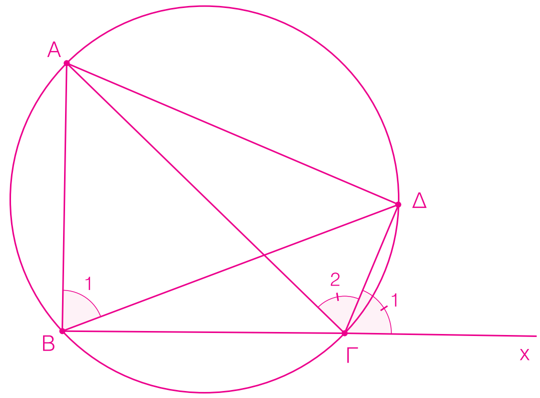
459 Θέμα 4 - 13444



α. • Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$, είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετράπλευρου ΑΒΓΔ, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$, (1).

• Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}x$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}x$, (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}x$, (3).

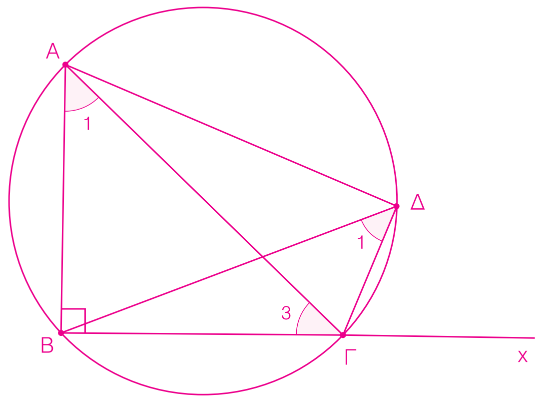


β. Είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_2$, (4), ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}x$, άρα

$\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}x \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \hat{\mathrm{B}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}x \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\mathrm{B}}_1$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $\Delta\mathrm{B} = \Delta\mathrm{A}$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\hat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα.



γ. • Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\mathrm{A}}_1 = 90^\circ$, (5).

• Οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}_1$, $\hat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Οπότε $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$, άρα οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

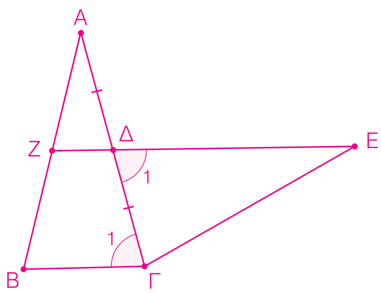
460 Θέμα 4 - 13538

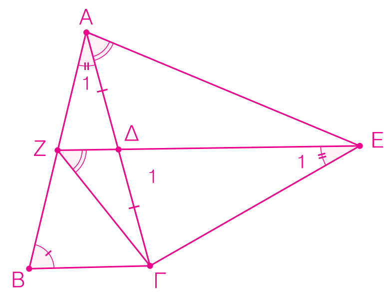
α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν:

- $\mathrm{AB} = \mathrm{E}\Gamma$,
- $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{E}\Delta$,
- $\mathrm{B}\Gamma = \Gamma\Delta$, γιατί $\mathrm{B}\Gamma = \frac{\mathrm{AB}}{2}$ και $\Gamma\Delta = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Άρα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

β.

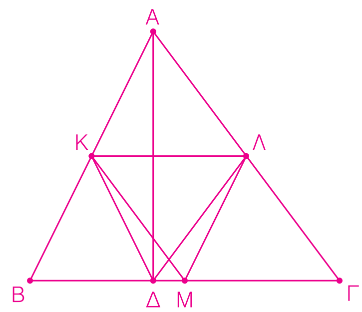




i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.
Οι ΒΓ και ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_1$, άρα η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.
Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$.
Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες.
Οπότε στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $E\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$.

461 Θέμα 4 - 13521



α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ, άρα $K\Lambda // B\Gamma$ (1).

β. i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ, άρα $\Lambda M = \frac{AB}{2}$ (2).

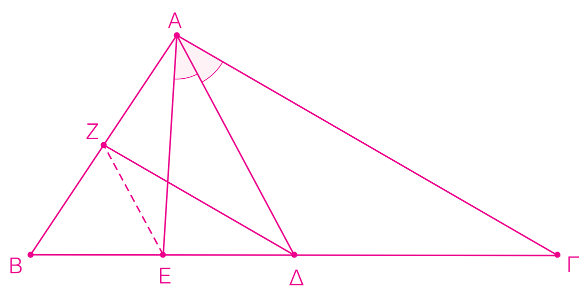
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι $\Delta K = \frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΔΚ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσά του.
Από (2) και (3) έχουμε $\Lambda M = \Delta K$. (4)

ii. Επειδή $K\Lambda // B\Gamma$ και οι ΚΔ και ΜΛ δεν είναι παράλληλες, το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή $KM = \Delta\Lambda$. (5)

γ. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν ταυτίζονταν, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.
Άτοπο, αφού $AB < A\Gamma$.
Το τραπέζιο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές. Επομένως $K\Delta = M\Lambda$ (6) και $KM = \Delta\Lambda$.
Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν:
- $K\Delta = M\Lambda$
- $KM = \Delta\Lambda$
- ΚΛ κοινή πλευρά

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $K\hat{\Delta}\Lambda = K\hat{M}\Lambda$.
Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά ΚΛ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Μ υπό ίσες γωνίες.

462 Θέμα 4 - 13670



α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.
Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:
- $AB = B\Delta$, ως μισά του ΒΓ, αφού $B\Gamma = 2AB$ (υπόθεση) και $B\Gamma = 2B\Delta$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).
- $BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.
- $\hat{B}$ κοινή γωνία.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

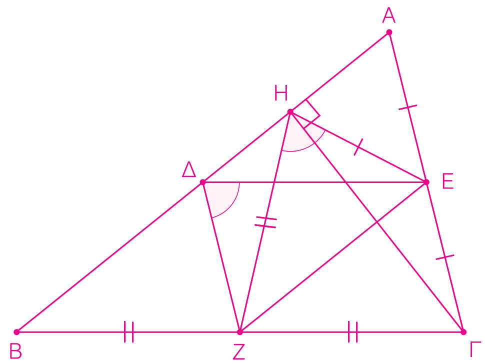
β. Από την ισότητα των τριγώνων $AB E$ και $BZ\Delta$ προκύπτει ότι $B\hat{A}E = B\hat{Z}\Delta$ (1).
Το τετράπλευρο $Z A\Delta E$ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ZE φαίνεται από τις απέναντι κορυφές A και Δ υπό τις ίσες γωνίες $B\hat{A}E$ και $B\hat{Z}\Delta$ αντίστοιχα.

γ. Το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2).
Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}E = B\hat{\Delta}A - B\hat{\Delta}Z \Leftrightarrow E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$$

Είναι $Z\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

463 Θέμα 4 - 13671



α. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $H A\Gamma$ ($\Gamma\hat{H}A = 90^\circ$), η HE είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα $A\Gamma$, οπότε

$$HE = E\Gamma = EA = \frac{A\Gamma}{2}.$$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $HB\Gamma$ ($\Gamma\hat{H}B = 90^\circ$), η HZ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, οπότε

$$HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}.$$

β. • Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα σημεία Δ και Z είναι μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Επομένως, $\Delta Z // A\Gamma$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα, το τετράπλευρο $Z\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις ΔZ και $E\Gamma$ ίσες και παράλληλες, οπότε

$Z\hat{\Delta}E = E\hat{\Gamma}Z$ (1).

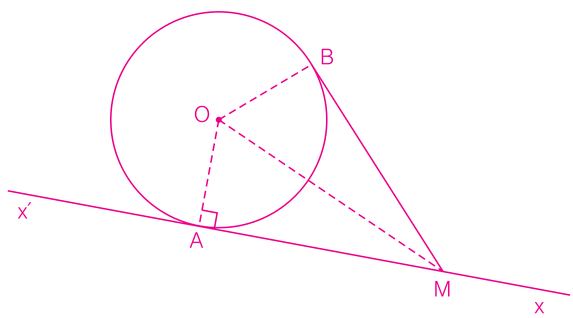
Στο ισοσκελές τρίγωνο $HE\Gamma$ είναι $\Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}E$ (2), και στο ισοσκελές τρίγωνο $HZ\Gamma$ είναι $Z\hat{H}\Gamma = H\hat{\Gamma}Z$ (3).
Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$$Z\hat{H}\Gamma + \Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}Z + H\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow Z\hat{H}E = E\hat{\Gamma}Z \quad (4).$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει ότι $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

γ. Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ZE φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και H υπό τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Delta}E$ και $Z\hat{H}E$ αντίστοιχα.

464 Θέμα 4 - 13840



α. Η ευθεία x'x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A, άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A, οπότε $OA \perp MA$.

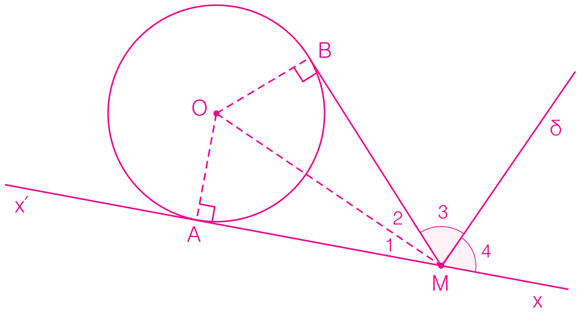
Τα τρίγωνα MOB και MOA έχουν:

- MO, κοινή πλευρά
- OB = OA, ως ακτίνες του κύκλου (O, R)
- MB = MA

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα.

Οπότε $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ$.

Άρα, το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R).



β. Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BMx}$, οπότε $M_3 = M_4$.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$, οπότε $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Είναι $\widehat{AMx} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_3 = 180^o \Leftrightarrow \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^o \Leftrightarrow \widehat{OM\delta} = 90^o$.

Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

γ. Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\hat{O}M + \widehat{OM\delta} < 180^o$.

Η γωνία $B\hat{O}M$ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\hat{O}M < 90^o$.

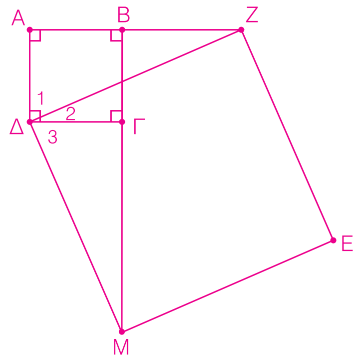
Είναι $\widehat{OM\delta} = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^o$, οπότε $B\hat{O}M + \widehat{OM\delta} = B\hat{O}M + 90^o < 90^o + 90^o$, δηλαδή $B\hat{O}M + \widehat{OM\delta} < 180^o$.

465 Θέμα 4 - 13847

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.



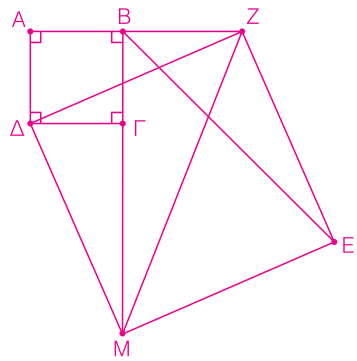
β. Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

Άρα $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90^o$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι ορθογώνιο.

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ. Για να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 180^o$.

Είναι $Z\hat{B}M = 90^o$ και από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90^o$.



Άρα $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 90^o + 90^o = 180^o$.

δ. Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{BMZ} = B\hat{E}Z$.