ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Μπάρλας

1 Θέμα 2 - 21165

α. • $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}=\frac{1}{3}\cdot\vec{A\Delta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}$

• $\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AZ}=(\vec{AB}+\vec{A\Delta})-\vec{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$

β. $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}\right)\overset{\alpha.}{=}2\vec{EZ}$ ή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$

γ. Επειδή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$ είναι $\vec{Z\Gamma}//\vec{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

2 Θέμα 2 - 15010

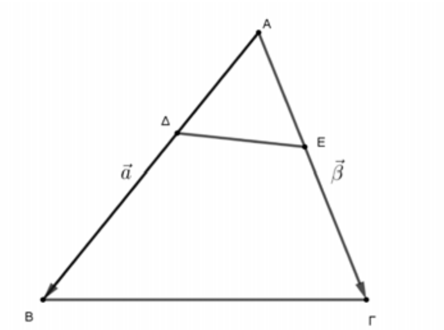
α. i. • $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}=\vec{AB}+(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})=\vec{AA}+\vec{B\Gamma}=\vec{0}+\vec{B\Gamma}=\vec{B\Gamma}$, (1)

• $\vec{AE}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma E}=\vec{A\Gamma}+(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})=\ldots=\vec{\Gamma B}$, (2)

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\vec{A\Delta}=-\vec{AE}$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι $\vec{A\Delta}=(-1)\vec{AE}$, οπότε $\vec{A\Delta}//\vec{AE}$ και αφού έχουν κοινό σημείο το A, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

3 Θέμα 4 - 21885



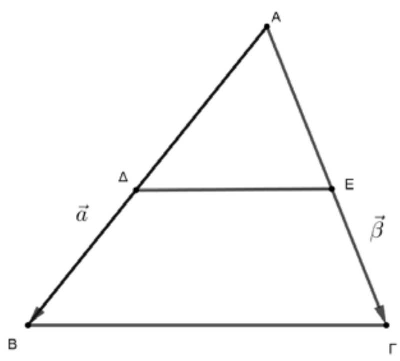
α) Είναι $\vec{\Delta E}=\vec{\Delta A}+\vec{AE}=-\frac{1}{\kappa}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{\lambda}\cdot\vec{\beta}$

$\vec{B\Gamma}=\vec{BA}+\vec{A\Gamma}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β)

i. Αν κ=λ τότε $\vec{B\Gamma}==-\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}+\frac{1}{\kappa}\vec{\beta})=\kappa\cdot\vec{\Delta E}$ άρα $\vec{B\Gamma}//\vec{\Delta E}$ και $|\vec{B\Gamma}|=\kappa\cdot|\vec{\Delta E}|$

ii.



Αν κ=λ=2 τότε τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα , οπότε $\vec{ΒΓ}//\vec{ΔΕ}$ και $|\vec{ΒΓ}| = 2\cdot|\vec{ΔΕ}|$, επομένως ΔΕ//ΒΓ και ΒΓ=2·ΔΕ. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

4 Θέμα 2 - 14666

α. • $\vec{u} = 3\vec{α} - 5\vec{β} = 3(1\,,-3) - 5(-2\,,-1) = (3\,,-9) - (-10\,,-5) = (13\,,-4)$

• $\vec{v} = 5\vec{α} - 9\vec{β} = 5(1\,,-3) - 9(-2\,,-1) = (5\,,-15) - (-18\,,-9) = (23\,,-6)$

β. $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{α} - 5\vec{β}) - (5\vec{α} - 9\vec{β}) = 6\vec{α} - 10\vec{β} - 5\vec{α} + 9\vec{β} = \vec{α} - \vec{β} = 1\cdot\vec{α} + (-1)\cdot\vec{β}$

γ. Είναι $\vec{ΟΚ} = \vec{β}$, $\vec{ΟΛ} = \vec{w}$ και $\vec{ΟΜ} = \vec{u}$. Οπότε:

• $\vec{ΚΛ} = \vec{ΟΛ} - \vec{ΟΚ} = \vec{w} - \vec{β} = \vec{α} - \vec{β} - \vec{β} = \vec{α} - 2\vec{β}$

• $\vec{ΛΜ} = \vec{ΟΜ} - \vec{ΟΛ} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{α} - 5\vec{β} - \vec{α} + \vec{β} = 2\vec{α} - 4\vec{β} = 2(\vec{α} - 2\vec{β}) = 2\cdot\vec{ΚΛ}$

Άρα $\vec{ΛΜ} = 2\cdot\vec{ΚΛ}$, οπότε $\vec{ΚΛ}//\vec{ΛΜ}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το Λ , θα έχουν τον ίδιο φορέα. Επομένως τα σημεία Κ , Λ , Μ είναι συνευθειακά.

5 Θέμα 2 - 16580

α. • $\vec{ΑΒ} = (x_Β - x_Α\,, y_Β - y_Α) = (11-2,\, 5-4) = (9,\,1)$.

• $\vec{ΑΓ} = (x_Γ - x_Α\,, y_Γ - y_Α) = (3-2,\, 7-4) = (1,\,3)$.

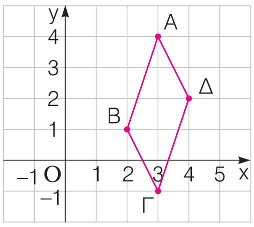
β. Είναι $\vec{ΑΔ} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΓ} = (9+1, 1+3) = (10, 4)$.

γ. Έχουμε $\vec{ΑΔ} = (x_Δ - x_Α\,, y_Δ - y_Α) \Leftrightarrow (10,4) = (x_Δ - 2,\, y_Δ - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x_Δ - 2 = 10 \\ y_Δ - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Δ = 12 \\ y_Δ = 8 \end{cases}$

Άρα $Δ(12,\,8)$.

6 Θέμα 2 - 17070

α.



β. • $\vec{ΑΒ} = (x_Β - x_Α\,, y_Β - y_Α) = (2-3,\, 1-4) = (-1,\,-3)$,

• $\vec{ΔΓ} = (x_Γ - x_Δ\,, y_Γ - y_Δ) = (3-4,\, -1-2) = (-1,\,-3)$.

γ. Από το **β.** ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{ΑΒ} = \vec{ΔΓ}$. Οπότε οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ θα είναι ίσες και παράλληλες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7 Θέμα 2 - 16581

α. • $\vec{ΑΒ} = (x_Β - x_Α\,, y_Β - y_Α) = (1-(-1),\, 2-6) = (2,\,-4)$.

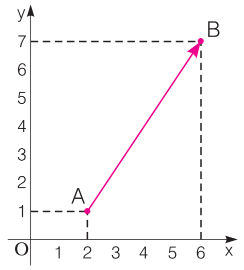
• $\vec{ΒΓ} = (x_Γ - x_Β\,, y_Γ - y_Β) = (3-1,\, -2-2) = (2,\,-4)$.

β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και αφού το Β είναι κοινό άκρο τα σημεία Α , Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ. Είναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$ οπότε το Β είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

8 Θέμα 2 - 16579

α.



β. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(6-2,\,7-1)=(4,\,6)$.

γ. Είναι $\vec{u}=(-8,\,-12)=(-2\cdot4,\,-2\cdot6)=-2\cdot(4,\,6)=-2\cdot\vec{v}$.

Αφού $\lambda=-2<0$ και $\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

9 Θέμα 2 - 16147

Είναι $\vec{\alpha}=(3,\,3\sqrt{3})$, $\vec{\beta}=(\sqrt{2}\,,\,0)$, $\vec{\gamma}=(0,\,-3)$ και $\vec{\delta}=(-1,\,1)$.

α. Έχουμε $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}}=\dfrac{0}{\sqrt{2}}=0$, $\lambda_{\vec{\delta}}=\dfrac{1}{-1}=-1$

β. • Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Ox . Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}$. Αφού το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο (θετικές συντεταγμένες), είναι $\omega=60^{o}$.

• Το διάνυσμα $\vec{\beta}=(\sqrt{2}\,,\,0)$, έχει τεταγμένη 0 , άρα $\vec{\beta}\,//\,x'x$, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 0^{o} .

• Το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(0,\,-3)$, έχει τετμημένη 0 , άρα $\vec{\gamma}\,//\,y'y$, και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 270^{o} .

• Έστω φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox. Αφού $\lambda_{\vec{\delta}}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\varphi=-1$. Αφού το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη το πέρας του βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο, άρα $\varphi=145^{o}$.

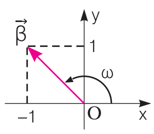
γ. • $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+27}=\sqrt{36}=6$

• $|\vec{\gamma}|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{0+9}=\sqrt{9}=3$

10 Θέμα 2 - 19038

α. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Είναι

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{1}{-1}=-1\ ,\ \frac{\pi}{2}<\omega<\pi$$



Άρα $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.

β. • $|\vec{\gamma}|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

• $|\vec{\beta}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

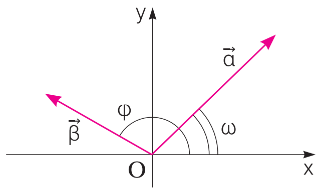
Άρα $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$

γ. Είναι $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\Leftrightarrow(-5,\,-5)=\lambda(2,\,3)+\mu(-1,\,1)\Leftrightarrow(-5,\,-5)=(2\lambda-\mu,\,3\lambda+\mu)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda-\mu=-5 \\ 3\lambda+\mu=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda=-10 \\ 3\lambda+\mu=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2 \\ \mu=1 \end{cases}$$

Άρα $\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

11 Θέμα 2 - 16151



α. Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{3}=1$ και $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{\alpha}}=1$ και $\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{\vec{\beta}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει πέρας στο 1^o τεταρτημόριο, άρα $\omega=45^o$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ στο 2^o τεταρτημόριο, άρα $\varphi=150^o$.

β. Είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\varphi-\omega=150^o-45^o=105^o$

12 Θέμα 2 - 22557

α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA)=8$ θα είναι $y_A=8$, επομένως $A(0,8)$.

Το Ο είναι το μέσο του ΒΓ και τα Β και Γ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των x , αντίστοιχα.

Επειδή $(B\Gamma)=12$, θα είναι $|x_B|=|x_\Gamma|=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{12}{2}=6$, επομένως $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ είναι:

$x_M=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{0+6}{2}=3$,

$y_M=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{8+0}{2}=4$,

άρα $M(3,4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου ΒΜ είναι

$(BM)=\sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2}=\sqrt{(3+6)^2+(4-0)^2}=\sqrt{97}$.

13 Θέμα 4 - 17076

α.
- $\vec{AM}=(x_M-x_A\, , \, y_M-y_A)=(x+3,\, y+1)$,
- $\vec{MB}=(x_B-x_M\, , \, y_B-y_M)=(-x,\, 3-y)$,
- $\vec{AB}=(x_B-x_A\, , \, y_B-y_A)=(3,\, 4)$.

β.
- $|\vec{AM}|=\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$,
- $|\vec{MB}|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$,
- $|\vec{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

γ. Έχουμε $|\vec{AM}+\vec{MB}|\le|\vec{AM}|+|\vec{MB}|\Leftrightarrow|\vec{AB}|\le|\vec{AM}|+|\vec{MB}|\Leftrightarrow 5\le|\vec{AM}|+|\vec{MB}|$.

δ. Από το **γ.** ερώτημα ισχύει $|\vec{AM}|+|\vec{MB}|\geq 5$ και αντικαθιστώντας από το **β.** ερώτημα έχουμε $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}\geq 5$.
Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x\,,\,y)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$
Άρα ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

14 Θέμα 4 - 17077

α. $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}-2\vec{i}-\lambda\vec{j}=(\lambda+1-2)\vec{i}+(\lambda+3-\lambda)\vec{j}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$

β. $(AB)=|\vec{AB}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+3^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

γ. $(AB)=5\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}=5\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9=25\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=16$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=4^2\Leftrightarrow(\lambda-1=4\ \text{ ή }\ \lambda-1=-4)\Leftrightarrow\lambda=5\ \text{ ή }\ \lambda=-3$.

δ. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$(\lambda-1)^2\geq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9\geq 9\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}\geq\sqrt{9}\Leftrightarrow(AB)\geq 3$.

Το «=» ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.
Άρα, για κάθε $\lambda\neq 1$ είναι $(AB)>3$ και όταν $\lambda=1$ είναι $(AB)=3$ που είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.
Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

15 Θέμα 2 - 15038

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=3\cdot 4\cdot\text{συν}\dfrac{\pi}{3}=12\cdot\dfrac{1}{2}=6$

β. $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=3^2=9$ και $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=4^2=16$.

γ. $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=3\vec{\alpha}^2-10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=$
$=3\cdot 9-10\cdot 6+3\cdot 16=15$.

16 Θέμα 2 - 15463

α. $\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}=(3,-1)-(2,1)=(1,-2)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}=(2,1)\cdot(1,-2)=2-2=0$, οπότε $\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}$

γ. Είναι $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και $|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, οπότε $|\vec{AB}|=|\vec{B\Gamma}|$.

17 Θέμα 2 - 17075

α.
- $\vec{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(6-2,\,0-3)=(4,-3)$
- $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A\,,\,y_\Gamma-y_A)=(2-2,\,1-3)=(0,-2)$

β. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=(4,-3)\cdot(0,-2)=4\cdot 0+(-3)\cdot(-2)=0+6=6$.

18 Θέμα 2 - 15996

α.
- $\vec{AB}=(8-(-6),\,7-(-1))=(14,8)$
- $\vec{B\Gamma}=(-10-8,\,6-7)=(-18,-1)$
- $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}=(-10-(-6),\,6-(-1))=(-4,7)$

β. Είναι $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = (-4, 7)$.

Έχουμε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$.

Οπότε $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$, άρα $\hat{A} = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

19 Θέμα 2 - 22554

α) Είναι

i) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 6\vec{i} - \vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

ii) $\vec{OM} = \frac{1}{5}\left(2\vec{OA} - \vec{OB}\right) = \frac{1}{5}\left(2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - (6\vec{i} - \vec{j})\right) = \frac{1}{5}(6\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{5}(5\vec{j}) = \vec{j}$.

β) Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ ισχύουν $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ και $\vec{j}^2 = 1$. Επομένως,

$\vec{AB} \cdot \vec{OM} = (3\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot \vec{j} = (3\vec{i}) \cdot \vec{j} - (3\vec{j}) \cdot \vec{j} = 3(\vec{i} \cdot \vec{j}) - 3 \cdot \vec{j}^2 = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$.

20 Θέμα 2 - 15186

α. Είναι:

- $x_M = \frac{6+2}{2} = 4$ και $y_M = \frac{3+1}{2} = 2$
- $x_N = \frac{9+1}{2} = 5$ και $y_N = \frac{2-2}{2} = 0$

β. Είναι:

- $\vec{MN} = (5-4\,,\,0-2) = (1\,,\,-2)$
- $\vec{\Delta\Gamma} = \big(9-1\,,\,2-(-2)\big) = (8\,,\,4)$

γ. Έχουμε $\vec{MN} \cdot \vec{\Delta\Gamma} = (1\,,\,-2) \cdot (8\,,\,4) = 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 4 = 8 - 8 = 0$.

Άρα $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

21 Θέμα 2 - 14586

α. Είναι $\vec{AB} = (3-1, 4-2) = (2, 2)$ και $\vec{A\Gamma} = (5-1, -2-2) = (4, -4)$.

Οπότε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 0$, άρα $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = 90^o$.

β. Το M είναι το μέσο του $B\Gamma$, άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $M(4, 1)$.

Είναι $\vec{AM} = (4-1, 1-2) = (3, -1)$, οπότε $|\vec{AM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A και η AM είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $(B\Gamma) = 2(AM)$ και επομένως $|\vec{B\Gamma}| = 2|\vec{AM}| = 2\sqrt{10}$.

γ. Είναι $\vec{B\Gamma} = 2\vec{M\Gamma} = 2(\vec{MA} + \vec{A\Gamma}) = -2\vec{AM} + 2\vec{A\Gamma}$.

22 Θέμα 2 - 20685

α. Είναι $\vec{AB} = \big(\beta - (-1)\,,\,0-2\big) = (\beta+1\,,\,-2)$.

Έχουμε $\vec{u} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (1\,,\,1) \cdot (\beta+1\,,\,-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \cdot (\beta+1) + 1 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow \beta + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

β. Είναι $\vec{A\Gamma}=\big(0-(-1)\,,\,\gamma-2\big)=(1\,,\,\gamma-2)$.

Έχουμε $\vec{w}\,//\,\vec{A\Gamma}$, οπότε :

$$\det(\vec{w}\,,\,\vec{A\Gamma})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-10 & 2\\ 1 & \gamma-2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-10(\gamma-2)-2\cdot1=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\gamma=\frac{9}{5}\ .$$

γ. Για $\beta=1$ και $\gamma=\frac{9}{5}$ βρίσκουμε $\vec{AB}=(2\,,-2)$ και $\vec{A\Gamma}=(1\,,-\frac{1}{5})$.

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=2\cdot1+(-2)\cdot(-\frac{1}{5})=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$.

23 Θέμα 2 - 16427

α. • $\vec{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(0+2,\,8-3)=(2,\,5)$

• $\vec{\Gamma\Delta}=(x_\Delta-x_\Gamma\,,\,y_\Delta-y_\Gamma)=(10-5,\,5-3)=(5,\,2)$

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma\Delta}=(2,\,5)\cdot(5,\,2)=2\cdot5+5\cdot2=10+10=20$

β. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα $x'x$.

Είναι $\vec{u}=\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=(2,\,5)+(5,\,2)=(7,\,7)$, οπότε $\lambda_{\vec{u}}=\frac{7}{7}=1$.

Άρα $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{u}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$, αφού το $\vec{u}$ έχει πέρας στο 1^o τεταρτημόριο.

24 Θέμα 2 - 15073

α. $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\cdot(1,2)+(2,3)=(2+2,4+3)=(4,7)$

β. $|\vec{\gamma}|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(1,2)\cdot(4,7)=1\cdot4+2\cdot7=18$

25 Θέμα 2 - 22170

α) $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=(-1,3)-2(-2,-\frac{1}{2})=(-1,3)+(4,1)=(-1+4,3+1)=(3,4)$

β) Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ή $(3,4)\cdot(x^2,x-1)=0$ ή $3x^2+4(x-1)=0$ ή $3x^2+4x-4=0$. Η διακρίνουσα είναι 64 και οι ρίζες $x=\frac{2}{3}$ και $x=-2$.

γ) Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix}x^2 & x-1\\ -2 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0 \text{ ή } -\frac{1}{2}x^2-(-2)(x-1)=0 \text{ ή } -\frac{1}{2}x^2+2x-2=0 \text{ ή } x^2-4x+4=0 \text{ ή } \chi=2.$$

26 Θέμα 2 - 20888

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=4\cdot5\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=20\cdot(-\frac{1}{2})=-10$

β. Έχουμε: $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, οπότε

$$\vec{\gamma}^2=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=4|\vec{\alpha}|^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=4\cdot 4^2+12\cdot(-10)+9\cdot 5^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=64-120+225 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=169 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|=13 \;.$$

27 Θέμα 2 - 15825

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

β. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-4=4-4=0$

γ. Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}\neq\vec{0}$ έχουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ οπότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{2}$.

28 Θέμα 2 - 16428

α. $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{3}{8}.$$

β. Είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-\dfrac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=150^\circ$, αφού $0^\circ\leq(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 180^\circ$.

29 Θέμα 2 - 14953

α. • $\vec{AB}=(7-(-2),\,8-5)=(9,\,3)$

• $\vec{A\Gamma}=(1-(-2),\,-4-5)=(3,\,-9)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=9\cdot 3+3\cdot(-9)=27-27=0$.

γ. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0$, οπότε $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}})=90^\circ$, άρα $B\widehat{A}\Gamma=90^\circ$

30 Θέμα 2 - 15379

α. Είναι • $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 3+3\cdot(-1)=3-3=0$

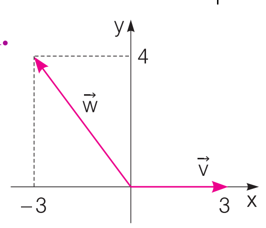
• Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=90^\circ$

β. $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(1,\,3)-(3,\,-1)=(2,\,6)-(3,\,-1)=\big(2-3,\,6-(-1)\big)=(-1,\,7)$.

31 Θέμα 2 - 15317

α. Είναι $\det(\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix}=12-0=12\neq 0$, οπότε τα $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β. i.



ii. Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{v}\,\widehat{,}\,\vec{w}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{-9+0}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \dfrac{-9}{3\cdot 5} = -\dfrac{3}{5} < 0$, οπότε η γωνία $(\vec{v}\,\widehat{,}\,\vec{w})$ είναι αμβλεία.

32 Θέμα 2 - 16426

α. • $2\vec{\alpha}-\vec{\beta} = 2\cdot(2,-1)-(-3,2) = (4,-2)+(3,-2) = (7,-4)$

• $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = (2,-1)\cdot(7,-4) = 14+4 = 18$

β. Είναι $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x,y)\cdot(2,-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$.

Οπότε $\vec{\gamma} = (x, 2x)$

Έχουμε $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Για $x=-1$ είναι $\vec{\gamma} = (-1,-2)$ και για $x=1$ είναι $\vec{\gamma} = (1,2)$

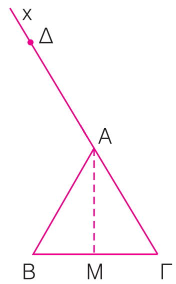
33 Θέμα 2 - 16141

α. Είναι:

i. $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{A\Gamma}) = 60^\circ$

ii. $(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{B\Gamma}) = 90^\circ$

iii. $(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma A}) = x\hat{A}M = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, αφού η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.



$\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{A\Delta}$

$(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma A}) = (\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{A\Delta}) = x\hat{A}M$

iv. $(\overrightarrow{BM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma M}) = 180^\circ$

v. $(\overrightarrow{\Gamma M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma B}) = 0^\circ$

β. Είναι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = 10$ και $|\overrightarrow{M\Gamma}| = 5$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AM\Gamma$ και έχουμε:

$AM^2 = A\Gamma^2 - M\Gamma^2 \Leftrightarrow AM^2 = 10^2 - 5^2 \Leftrightarrow AM^2 = 75 \Leftrightarrow AM = 5\sqrt{3}$ οπότε $|\overrightarrow{AM}| = 5\sqrt{3}$

i. Είναι $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$

ii. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A} = |\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{\Gamma A}|\,\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma A}) = 5\sqrt{3}\cdot 10\cdot\sigma\upsilon\nu 150^\circ = 50\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -75$

iii. Είναι $\overrightarrow{\Gamma M}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma B}$, οπότε $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} = |\overrightarrow{\Gamma M}||\overrightarrow{\Gamma B}| = 5\cdot 10 = 50$.

34 Θέμα 2 - 16144

Είναι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{\Delta A}| = 4$

α. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Delta}|\cdot\sigma\upsilon\nu|(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{A\Delta})| = 4\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 16\cdot\dfrac{1}{2} = 8$

β. Είναι $\overrightarrow{A\Delta}\uparrow\uparrow\overrightarrow{B\Gamma}$, οπότε $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{A\Delta}|\cdot|\overrightarrow{B\Gamma}| = 4\cdot 4 = 16$

γ. Οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ρόμβου τέμνονται κάθετα. Οπότε $\overrightarrow{O\Delta}\perp\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO} = 0$

δ. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές αφού $AB = A\Delta = 4$ και αφού επιπλέον $\hat{A} = 60^\circ$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. Επίσης $BO = O\Delta = 2$ και $\overrightarrow{O\Delta}\uparrow\downarrow\overrightarrow{OB}$.

Άρα $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB} = -|\overrightarrow{O\Delta}|\cdot|\overrightarrow{OB}| = -2\cdot 2 = -4$.

ε. Είναι: $(\overrightarrow{A\Delta}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = 120^\circ$. Οπότε $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = |\overrightarrow{A\Delta}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{A\Delta}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = 4\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu 120^\circ\cdot 4\cdot 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -8$.

35 Θέμα 4 - 18547

α. i. Είναι: • $\vec{AB}=(\lambda, 1+1)=(\lambda, 2)$ και $\vec{A\Gamma}=(\lambda-2, \lambda-3+1)=(\lambda-2, \lambda-2)$

• $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2)=(\lambda-2)^2$

Πρέπει $(\lambda-2)^2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$.

ii. Πρέπει $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0\Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda+2)\,(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-2$.
Στο ερώτημα **α.i.** δείξαμε ότι για $\lambda=2$ τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$ για $\lambda=-2$.

β. Για $\lambda=-2$ είναι $\vec{AB}=(-2, 2)$ και $\vec{A\Gamma}=(-4, -4)$.

i. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0$ από το **α.ii.**

ii. Είναι $|\vec{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ και $|\vec{A\Gamma}|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$, οπότε
$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\;|\vec{A\Gamma}|=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8$.

36 Θέμα 4 - 15658

α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, οπότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β. i. Είναι $\vec{KA}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow(x_A-x_K\,, y_A-y_K)=(2, -2)$. Οπότε:
- $x_A-x_K=2\Leftrightarrow x_A-2=2\Leftrightarrow x_A=4$
- $y_A-y_K=-2\Leftrightarrow y_A-1=-2\Leftrightarrow y_A=-1$

Άρα $A(4, -1)$.

Είναι $\vec{KB}=\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_B-x_K\,, y_B-y_K)=(1, 1)$. Οπότε:
- $x_B-x_K=1\Leftrightarrow x_B-2=1\Leftrightarrow x_B=3$
- $y_B-y_K=1\Leftrightarrow y_B-1=1\Leftrightarrow y_B=2$

Άρα $B(3, 2)$.

ii. Είναι $\vec{AB}=(3-4, 2-(-1))=(-1, 3)$. Οπότε:
- $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-4, y_\Gamma+1)$
- $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x_\Gamma-4 & y_\Gamma+1 \end{vmatrix}=-y_\Gamma-1-3x_\Gamma+12=-3x_\Gamma-y_\Gamma+11$

Τα Α, Β, Γ, είναι συνευθειακά οπότε $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})=0\Leftrightarrow 3x_\Gamma+y_\Gamma=11$

iii. $|\vec{K\Gamma}|=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\Leftrightarrow(K\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta.ii.}{\Leftrightarrow}(x_\Gamma-2)^2+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+100-60x_\Gamma+9x_\Gamma^2=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 10x_\Gamma^2-64x_\Gamma+104=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 20x_\Gamma^2-128x_\Gamma+203=0$

Βρίσκουμε $\Delta=144$ και ρίζες $x_\Gamma=\frac{7}{2}$ και $x_\Gamma=\frac{29}{10}$.

Είναι $x_A=4$, $x_B=3$ και πρέπει το x_Γ να είναι μεταξύ των x_A , x_B .

Οπότε $x_\Gamma = \frac{7}{2}$, αφού $\frac{29}{10} < 3$.

Επίσης $y_\Gamma = 11 - 3x_\Gamma = 11 - 3\cdot\frac{7}{2} = 11 - \frac{21}{2} = \frac{1}{2}$.

Άρα $K\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

37 Θέμα 4 - 15042

α. Με το Β ως σημείο αναφοράς, έχουμε:

$$\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} - 2(\vec{MB} - \vec{BA}) + (\vec{B\Gamma} - \vec{BA}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + 2\vec{BA} + \vec{B\Gamma} - \vec{BA} = 2\vec{BM}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BA} + \vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$$

Αφού $\vec{B\Gamma} \neq \vec{0}$, προκύπτει $\vec{BM} // \vec{B\Gamma}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το Β, τα Β, Γ και είναι συνευθειακά.

β. Είναι $\vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{BM} + \vec{M\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{M\Gamma} = \vec{BM}$

Οπότε το Μ είναι το μέσο του $\vec{B\Gamma}$.

γ. i. Επειδή τα σημεία Α, Β, Γ ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

• Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\vec{AB}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\kappa = 0$.

• Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\lambda = 0$.

Επομένως $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Έχουμε: $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ και $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$.

Οπότε τα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90^o$.

• Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ, δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $AB = A\Gamma$.

38 Θέμα 2 - 15271

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β. Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο Α $(-3, 2)$, οπότε έχει εξίσωση $y - 2 = 1(x+3) \Leftrightarrow y = x + 5$.

γ. Για $x = -13$ έχουμε: $y = -13 + 5 = -8 \neq y_\Gamma = -7$.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

39 Θέμα 2 - 15986

α. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$.

ii. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, οπότε έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

β. Για $y = 5$ είναι:

$5 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \neq 2^{100}$, άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην (ε).

40 Θέμα 2 - 16002

α. Αν $B(x, y)$, τότε έχουμε:

- $\dfrac{x+5}{2}=3 \Leftrightarrow x+5=6 \Leftrightarrow x=1$
- $\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y+2=1 \Leftrightarrow y=-1$

Άρα $B(1,-1)$.

β. Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

γ. Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(-3,\ -2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{2+2}{5+3}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$,

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y+2=\dfrac{1}{2}(x+3) \Leftrightarrow y+2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

41 Θέμα 2 - 16774

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ είναι $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\dfrac{-2-6}{-1-3}=\dfrac{-8}{-4}=2$

β. Έστω ΑΔ το ύψος από το Α. Τότε $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $\lambda_{A\Delta}\lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}\cdot 2=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}=-\dfrac{1}{2}$.

Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι:

$$y-y_A=\lambda_{A\Delta}(x-x_A) \Leftrightarrow y-5=-\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1+5 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+6$$

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{6-5}{3-2}=\dfrac{1}{1}=1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ΑΒ με τον xx', έχουμε:

$\lambda_{AB}=\varepsilon\varphi\omega=1$, οπότε $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, αφού $0^\circ \le \omega < 180^\circ$.

42 Θέμα 2 - 20885

α. Είναι $\lambda=\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4}=-1$, οπότε $\varepsilon: y-y_A=\lambda(x-x_A) \Leftrightarrow y+1=-1(x+3) \Leftrightarrow y=-x-3-1 \Leftrightarrow y=-x-4$.

β. Από την εξίσωση της ευθείας ε για $x=0$, βρίσκουμε $y=-4$ και για $y=0$ βρίσκουμε $x=-4$.
Άρα η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(-4\,,0)$ και τον $y'y$ στο $\Lambda(0\,,-4)$.
Το τρίγωνο είναι το ΟΚΛ, που είναι ορθογώνιο, οπότε

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}(OK)\cdot(O\Lambda)=\frac{1}{2}|x_K|\cdot|y_\Lambda|=\frac{1}{2}|-4|\cdot|-4|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 16=8.$$

43 Θέμα 2 - 15027

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda=\dfrac{5-(-1)}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$.

β. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\dfrac{1+3}{2}=2$ και $\dfrac{-1+5}{2}=2$ δηλαδή Μ(2,2).

γ. Αν ε η μεσοκάθετος του ΑΒ τότε $\varepsilon \perp AB$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot 3=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{3}$

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Μ(2,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{3}$, οπότε

$$\varepsilon: y-2=-\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}.$$

44 Θέμα 2 – 18351

α. Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\frac{-1+3}{2}=1$, $\frac{5+3}{2}=4$, οπότε $M(1,4)$.

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-5}{3-(-1)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

γ. Είναι: $\eta\perp AB \Leftrightarrow \lambda_\eta\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow \lambda_\eta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow \lambda_\eta=2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB είναι:

$$y-y_M=\lambda_\eta(x-x_M)\Leftrightarrow y-4=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x+2$$

45 Θέμα 2 – 15044

α. i. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-1-5}{6-0}=-1$

ii. Είναι: • $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=3$

• $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$

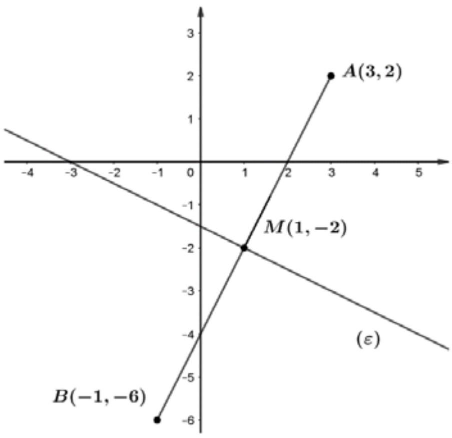
Άρα $M(3,2)$.

β. Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και είναι κάθετη στο AB . Αν η (ε) έχει κλίση λ έχουμε:

$\lambda\cdot\lambda_1=-1\Leftrightarrow\lambda\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow\lambda=1$.

Άρα (ε): $y-2=1\cdot(x-3)\Leftrightarrow y=x-1$

46 Θέμα 2 – 21162



α) Το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$$M\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{2+(-6)}{2}\right)=M(1,-2).$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{2-(-6)}{3-(-1)}=\frac{8}{4}=2.$$

γ) Επειδή η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία (ε), τότε $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$.

Επιπλέον, από το β) $\lambda_{AB}=2$ άρα:

$$2\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=-\frac{1}{2}.$$

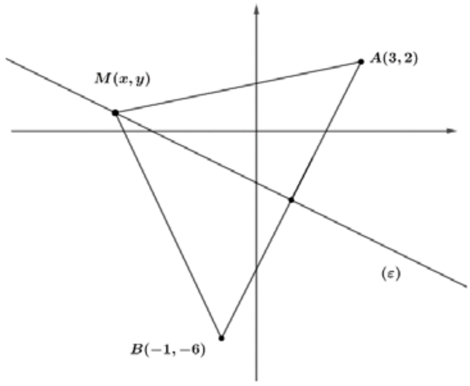
Επομένως η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση

$$y+2=-\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow x+2y+3=0.$$

Εναλλακτική λύση

Ένα σημείο M(x,y) ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν και μόνο αν

$$d(M,A)=d(M,B)\Leftrightarrow\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(-6-y)^2}\Leftrightarrow$$
$$(3-x)^2+(2-y)^2=(1+x)^2+(6+y)^2\Leftrightarrow 9-6x+x^2+4-4y+y^2=1+2x+x^2+36+12y+y^2\Leftrightarrow$$
$$9-6x+x^2+4-4y+y^2=1+2x+x^2+36+12y+y^2\Leftrightarrow x+2y+3=0$$



47 Θέμα 2 – 18236

α. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ε_1 , ε_2 και έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -x+4=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-x+4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2x+8=-x+4 \\ y=-x+4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

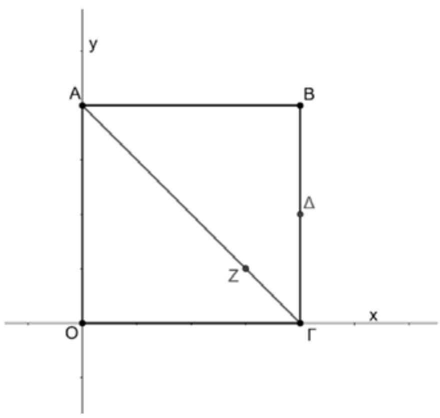
Άρα Γ(4, 0) .

β. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{0-5}{4+1}=-1$$

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ , οπότε $\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_{B\Delta}\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow\lambda_{B\Delta}=1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι: $y-1=1(x-2)\Leftrightarrow y=x-1$.

48 Θέμα 2 – 22173



α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_\Delta = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \text{ και } y_\Delta = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Επομένως, είναι Δ(4,2).

ii. Έστω Ζ(x,y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = \left(x_Z - x_A, y_Z - y_A\right) = (x-0, y-4) = (x, y-4)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = \left(x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A\right) = (4-0, 0-4) = (4,-4)$.

Όμως $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, άρα $(x, y-4) = \frac{3}{4}(4,-4) = (3,-3)$.

Επομένως x = 3 και y – 4 = -3, δηλαδή y = 1. Άρα, είναι Ζ(3,1).

β) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AZ} = (3,-3)$.

$\overrightarrow{Z\Delta} = \left(x_\Delta - x_Z, y_\Delta - y_Z\right) = \left(4-3, 2-1\right) = (1,1)$.

$\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{Z\Delta} = (3,3)\cdot(1,-1) = 3-3 = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα. Το ίδιο θα ισχύει και για τους φορείς τους, δηλαδή ΑΓ κάθετη στην ΖΔ.

Εναλλακτική λύση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι $\lambda_{AZ} = \frac{y_Z - y_A}{x_Z - x_A} = \frac{1-4}{3-0} = -1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΖΔ είναι $\lambda_{Z\Delta} = \frac{y_\Delta - y_Z}{x_\Delta - x_Z} = \frac{2-1}{4-3} = 1$.

Επειδή $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{Z\Delta} = -1$, οι ευθείες ΑΖ και ΖΔ είναι κάθετες.

49 Θέμα 4 – 15029

α. Η κλίση της ευθείας ΟΑ είναι $\lambda_{OA} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}\cdot x$. Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$, οπότε $\omega = 60^o$, αφού $0^o \le \omega < 180^o$.

β. Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\varphi = 150^o$.

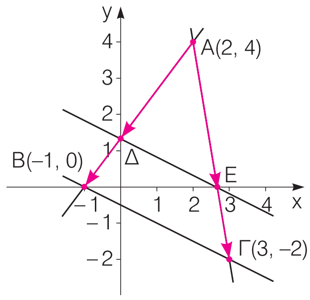
γ. Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$, οπότε $OA \perp AB$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$.

Είναι $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$, $(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2$ οπότε $(OA) = (AB)$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι και ισοσκελές.

δ. Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΒ με τον $x'x$, είναι $\theta = \omega - A\hat{O}B = 60^o - 45^o = 15^o$, αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα

$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi 15^o \Leftrightarrow \lambda_{OB} = \varepsilon\varphi 15^o \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0} = \varepsilon\varphi 15^o \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 15^o = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

50 Θέμα 4 – 18568



α. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ και ΑΓ είναι

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-4}{-1-2}=\frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{-2-4}{3-2}=\frac{-6}{1}=-6 .$$

Οπότε $\lambda_{AB}\neq\lambda_{A\Gamma}$, άρα $AB \nparallel A\Gamma$.

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β. • Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y-4=\frac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}+4\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$.

• Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,-2)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y+2=-6(x-3)\Leftrightarrow y=-6x+18-2\Leftrightarrow y=-6x+16$

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ ζητούμε $x=0$ και είναι $y=\frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

Στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε $y=0$ και είναι $-6x+16=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3},0\right)$.

ii. Είναι: • $\overrightarrow{A\Delta}=\left(0-2,\frac{4}{3}-4\right)=\left(-2,-\frac{8}{3}\right)$ και $\overrightarrow{\Delta B}=\left(-1-0,0-\frac{4}{3}\right)=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$, οπότε

$\overrightarrow{A\Delta}=2\left(-1,-\frac{4}{3}\right)=2\overrightarrow{\Delta B}$

• $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{8}{3}-2,0-4\right)=\left(\frac{2}{3},-4\right)$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\left(3-\frac{8}{3},-2-0\right)=\left(\frac{1}{3},-2\right)$, οπότε $\overrightarrow{AE}=2\left(\frac{1}{3},-2\right)=2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ. Είναι $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}}=-\frac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{-2-0}{3+1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, οπότε $\lambda_{\Delta E}=\lambda_{B\Gamma}$, άρα η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

51 Θέμα 4 – 15275

α. i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το $M(2, 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωσή της είναι $y-1=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή $\lambda\neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $-2\lambda+1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq\frac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

β. i. Για $y=0$ έχουμε $\lambda x-2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda x=2\lambda-1\Leftrightarrow x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$.

• Για $x=0$ έχουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$.

Είναι: • $(OA)=\dfrac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}$

• $(OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\dfrac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1|\Leftrightarrow|2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0\Leftrightarrow|\lambda|-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-1$, αφού $\lambda\neq\frac{1}{2}$

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε $(OAB)=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε $(OAB)=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$.

52 Θέμα 4 – 14978

α. • $d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

• $d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

β. Το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή πρέπει $d_1=d_2$.

γ. Έχουμε

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9$$

$$\Leftrightarrow -2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$$

Άρα η μεσοκάθετος του ΑΒ είναι η $x+y-4=0$.

δ. Για να είναι το τρίγωνο ΣΑΒ ισόπλευρο, πρέπει το σημείο Σ να είναι σημείο της μεσοκάθετου. Αν $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ τότε $x_\Sigma+y_\Sigma-4=0 \Leftrightarrow y_\Sigma=4-x_\Sigma$, οπότε $\Sigma(x_\Sigma, 4-x_\Sigma)$.

Είναι: • $(AB)=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

• $(\Sigma A)=(\Sigma B)=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(4-x_\Sigma-1)^2}=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(x_\Sigma-3)^2}$
$=\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}$

Πρέπει $(AB)=(\Sigma A)=(\Sigma B)$.

Οπότε $\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_\Sigma^2-4x_\Sigma+1=0$.

Βρίσκουμε $x_\Sigma=2\pm\sqrt{3}$ και $\Sigma(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ ή $\Sigma(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

53 Θέμα 4 – 15475

α. Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια είναι:

$$AB: y-1=\frac{3-1}{4-2}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-1=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$$

β. Το σημείο της ακτής που απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια είναι το σημείο τομής της ευθύγραμμης ακτής με τη μεσοκάθετο της ΑΒ.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ της ΑΒ.

Είναι $x_M=\frac{2+4}{2}=3$ και $y_M=\frac{1+3}{2}=2$. Άρα $M(3,2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda=1$.

Η μεσοκάθετος ε΄ της ΑΒ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ΄ για τον οποίο θα ισχύει:

$\lambda\cdot\lambda'=-1$. Άρα $\lambda'=-1$.

Οπότε $\varepsilon': y-2=-1(x-3) \Leftrightarrow y=-x+5$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=-x+5 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το (4, 1).

γ. Η απόσταση του καθενός από τα δύο εργοστάσια Α και Β από το σημείο Ν της ακτής είναι η ίδια.
Οπότε υπολογίζουμε τη μία.

Είναι $(AN)=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2^2+0^2}=2$.

54 Θέμα 4 – 15194

α. Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά, άρα σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Για το μέσον M της $B\Gamma$ έχουμε $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{4+3}{2}=\dfrac{7}{2}$ και $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}$. Άρα $M\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

Η μεσοκάθετος ε είναι κάθετη στη $B\Gamma$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot3=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{3}$

Άρα $(\varepsilon): y-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}$

γ. Το σημείο $K(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε $K\left(x,-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow6x-15=2x-7\Leftrightarrow4x=8\Leftrightarrow x=2$$

Οπότε $y=-\dfrac{1}{3}\cdot2+\dfrac{11}{3}=3$, δηλαδή $K(2,3)$.

Το $K(2,3)$ είναι σημείο της μεσοκάθετου του $B\Gamma$, οπότε $(KB)=(K\Gamma)$ και αφού $(KA)=(KB)$, τελικά $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$. Άρα το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

55 Θέμα 4 – 17078

α. i. AB: $y-y_B=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)\Leftrightarrow y-\alpha=\dfrac{\alpha-2\alpha}{4-3}(x-4)\Leftrightarrow y-\alpha=-\alpha(x-4)\Leftrightarrow y=-\alpha x+5\alpha$.

ii. Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε:

- $1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha\Leftrightarrow1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$
- $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha\Leftrightarrow1=-\alpha^2+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$

Βρίσκουμε $\alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii. • $\vec{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(4-3,\alpha-2\alpha)=(1,-\alpha)$

• $\vec{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha,1-\alpha-1)=(1,-\alpha)$

Είναι $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ και από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

β. Είναι: • $\vec{AB}=(1,-\alpha)$

• $\vec{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,1-2\alpha)$

Για να είναι τετράγωνο, αρχικά θα έπρεπε να είναι ρόμβος, οπότε

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10} \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 1 + \alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = -44 < 0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

56 Θέμα 4 - 21160

α. Επειδή τα τετράπλευρα $OB\Delta E$ και $O\Gamma ZH$ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa, -\kappa)$, $E(0, -\kappa)$, $Z(-2\kappa, 2\kappa)$ και $H(-2\kappa, 0)$.

• Η εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$ είναι:

$$y - y_\Delta = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma}(x - x_\Delta) \Leftrightarrow y + \kappa = \frac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0}(x - \kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \kappa = -3(x - \kappa) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x + y - 2\kappa = 0 .$$

• Η εξίσωση της ευθείας BZ είναι:

$$y - y_Z = \frac{y_Z - y_B}{x_Z - x_B}(x - x_Z) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + 3y - 2\kappa = 0 .$$

β. Η ευθεία (ε) του ύψους από την κορυφή $O(0, 0)$ του τριγώνου $OB\Gamma$, είναι κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$.

Είναι: $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{2\kappa - 0}{0 - \kappa} = -2$, οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon : y = \dfrac{1}{2}x$.

γ. • Οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (ε) και $\Gamma\Delta$ είναι η λύση συστήματος:

$$\begin{cases} 3x + y - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}x - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{7}\kappa \\ y = \frac{2}{7}\kappa \end{cases} , \quad \text{άρα } M\left(\frac{4}{7}\kappa , \frac{2}{7}\kappa\right).$$

• Οι συντεταγμένες του M την επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας BZ, αφού

$$2\cdot\frac{4}{7}\kappa + 3\cdot\frac{2}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{8}{7}\kappa + \frac{6}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{14}{7}\kappa - 2\kappa = 2\kappa - 2\kappa = 0 .$$

Άρα οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

57 Θέμα 2 – 15657

α. Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα $M(2, 2)$.

β. Είναι $3\cdot 2 - 2 = 4$ οπότε οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

58 Θέμα 2 – 16766

α. • Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $x - 3y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

• Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $9x + 3y - 6 = 0$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\dfrac{9}{3} = -3$.

Είναι $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{3}(-3) = -1$, οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σύστημα των εξισώσεων των (ε_1), (ε_2):

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 9x+3y=6 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 10x=10 \\ x-3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases},$$

έχει λύση το ζεύγος $(1,-1)$. Άρα $A(1,-1)$.

γ. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(1 , –1) και είναι κάθετη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση x = 1.

59 Θέμα 2 – 22171

α) Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

$\begin{cases} 3x-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$. Στην 1η αντικαθιστούμε το x με y – 1. $\begin{cases} 3(y-1)-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3y-3-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} 2y=8 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=4 \\ x=4-1=3 \end{cases}$. Επομένως το σημείο τομής είναι το Μ(3,4).

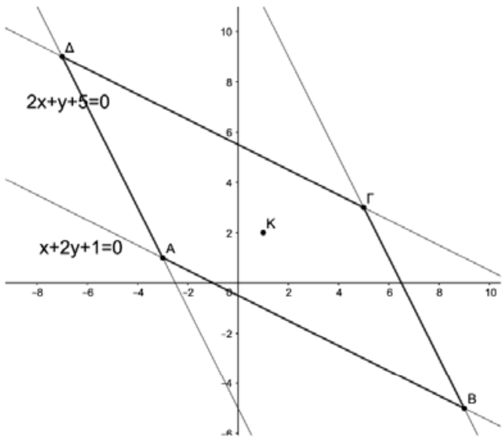
β) Η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην (ε_2), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής της ζητούμενης ευθείας και της (ε_2) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε_2) είναι $\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι -1.

Η ευθεία διέρχεται από το Μ(3,4), οπότε η εξίσωση θα είναι $y-y_o = \lambda(x-x_o)$ ή $y-4=-1(x-3)$ ή $y=-x+7$.

γ) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην Αx+Βy+Γ = 0 είναι το $\vec{\delta} = (B,-A)$, οπότε για την ευθεία $3x - y - 5 = 0$ ένα διάνυσμα παράλληλο σε αυτήν είναι το $\vec{\delta} = (-1,-3)$.

60 Θέμα 2 – 22071



α)

i. Έστω ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο στο οποίο είναι ΑΒ: x+2y+1=0 και ΑΔ: 2x+y+5=0.

Το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ είναι το σημείο Α, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$(\Sigma): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y-2=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Άρα Α(-3, 1).

ii. Το σημείο Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Αν Γ($x_Γ$,$y_Γ$), τότε για το σημείο Κ έχουμε, $K\left(\frac{-3+x_Γ}{2},\frac{1+y_Γ}{2}\right)$. Όμως οι συντεταγμένες του Κ είναι (1,2), οπότε $\frac{-3+x_Γ}{2}=1 \Leftrightarrow x_Γ=5$ και $\frac{1+y_Γ}{2}=2 \Leftrightarrow y_Γ=3$.

Άρα Γ(5,3).

β) Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Γ(5,3) και ΒΓ//ΑΔ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι: 2x+y+5=0 με $λ_{ΑΔ}$ = -2. Άρα $λ_{ΒΓ}$ = - 2, οπότε η εξίσωση της ΒΓ είναι

$$ΒΓ: y-y_Γ=-2(x-x_Γ) \text{ ή } y-3=-2\cdot(x-5) \Leftrightarrow 2x+y-13=0.$$

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το Γ(5,3) και ΓΔ//ΑΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x+2y+1=0 με $λ_{ΑΒ}=-\frac{1}{2}$. Άρα $λ_{ΓΔ}=-\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι:

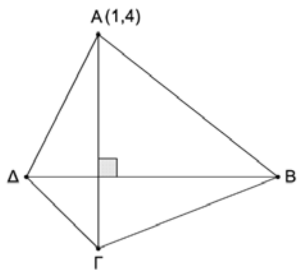
$$ΓΔ: y-y_Γ=-\frac{1}{2}(x-x_Γ) \text{ ή } y-3=-\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow x+2y-11=0$$

61 Θέμα 2 – 22092

α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΒΔ που διέρχονται από το σημείο αυτό.

$$\begin{cases}3x-2y+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2(x+2)+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2x-4+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}.$$

Άρα $Δ(-1,1)$.



β) Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα, οπότε οι συντελεστές διεύθυνσης $λ_{ΑΓ}$, $λ_{ΒΔ}$ των διαγωνίων έχουν γινόμενο ίσο με -1, δηλαδή $λ_{ΑΓ}\cdot λ_{ΒΔ}=-1$. Όμως από την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ προκύπτει ότι $λ_{ΒΔ}=1$, άρα $λ_{ΑΓ}=-1$.

Η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι

$$y-y_Α=λ_{ΑΓ}(x-x_Α) \text{ ή } y-4=-1(x-1) \Leftrightarrow x+y-5=0.$$

62 Θέμα 2 – 21964

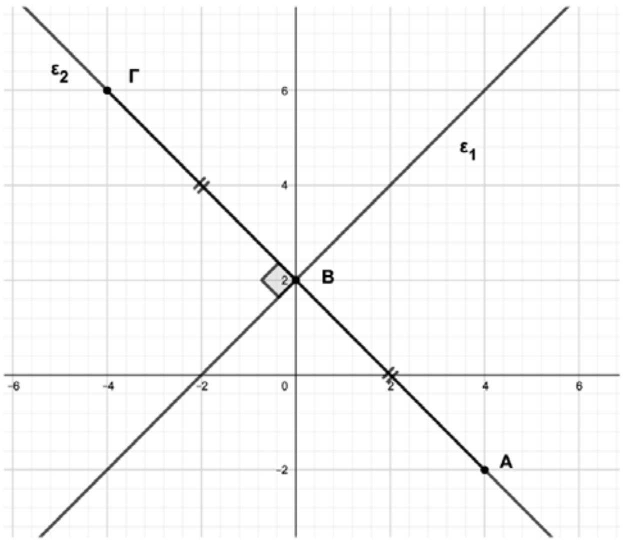
α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει εξίσωση: y = x + 2, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $λ_1$ = 1. Η ευθεία ($ε_2$) είναι κάθετη στην ευθεία $ε_1$, συνεπώς το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών θα ισούται με -1, άρα $λ_2$ = -1. Επιπλέον η ευθεία ($ε_2$) διέρχεται από το σημείο Α, άρα η εξίσωσή της θα είναι:

$y-y_A=λ_2\cdot(x-x_A)$ ή $y-(-2)=-1\cdot(x-4)$ ή $y+2=-x+4$ ή $y=-x+2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ($ε_2$) είναι: y = -x + 2.

β) οι συντεταγμένες του σημείου τομής Β, των δύο ευθειών ($ε_1$) και ($ε_2$) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x+2 \\ y = -x+2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = -x+2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x+2 \\ 2x = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα Β(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς το Β τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\begin{cases} x_B = \frac{x_A+x_Γ}{2} \\ y_B = \frac{y_A+y_Γ}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0 = \frac{4+x_Γ}{2} \\ 2 = \frac{-2+y_Γ}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_Γ = -4 \\ y_Γ = 6 \end{cases}$. Οπότε το συμμετρικό του σημείο Α ως προς την ευθεία (ε1) είναι το σημείο Γ(-4,6).



63 Θέμα 2 – 21662

α. Έστω $Α΄$ το συμμετρικό του $Α$ ως προς το $Β$. Τότε το σημείο $Β$ θα είναι το μέσο του $ΑΑ΄$.

Είναι:
- $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 2x_B - x_A = 2\cdot(-3)-(-5) = -6+5 = -1$ και
- $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = 2y_B - y_A = 2\cdot 5 - 1 = 10-1 = 9$

Άρα $Α΄(-1, 9)$.

β. i. Είναι $\lambda_ε = -\frac{A}{B} = -\frac{-1}{1} = 1$ και $ε' \perp ε \Leftrightarrow \lambda_{ε'}\cdot\lambda_ε = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ε'}\cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ε'} = -1$.

Οπότε $ε': y - y_B = \lambda_{ε'}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 5 = -1\cdot(x+3) \Leftrightarrow y = -x+2$.

ii. Έστω $Μ$ το σημείο τομής των ευθειών $ε$, $ε'$. Οι συντεταγμένες του $Μ$ είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} -x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, άρα $Μ(0, 2)$.

iii. Αν $Β΄$ είναι το συμμετρικό του $Β$ ως προς την ευθεία $ε$, τότε το $Β΄$ είναι σημείο της ευθείας $ε'$ και το $Μ$ θα είναι το μέσο του $ΒΒ΄$ οπότε:

- $x_M = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \Leftrightarrow x_{B'} = 2x_M - x_B = 2\cdot 0 - (-3) = 3$ και
- $y_M = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \Leftrightarrow y_{B'} = 2y_M - y_B = 2\cdot 2 - 5 = -1$

Άρα $Β΄(3, -1)$.

64 Θέμα 4 – 22072

α) Η εξίσωση (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν $\begin{cases}\lambda \neq 0\\ \text{ή}\\ \lambda-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \neq 0\\ \text{ή}\\ \lambda\neq 1\end{cases}$. Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

Ομοίως η εξίσωση (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν

$\begin{cases}3\lambda+1 \neq 0\\ \text{ή}\\ -2\lambda\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \neq -\frac{1}{3}\\ \text{ή}\\ \lambda\neq 0\end{cases}$. Επίσης δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

β) Έστω $\overrightarrow{\delta_1} = (\lambda-1, -\lambda)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$\lambda x+(\lambda-1)y-4=0 \quad \text{και}$$

$\overrightarrow{\delta_2} = (-2\lambda, -3\lambda-1)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0.$$

Οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν:

$$\overrightarrow{\delta_1} \perp \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1}\cdot\overrightarrow{\delta_2}=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda)-\lambda(-3\lambda-1)=0$$
$$\Leftrightarrow -2\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2+\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$$

65 Θέμα 4 – 15253

α. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, όπου $A=\mu^2-1$, $B=3\mu^2-2\mu-1$, $\Gamma=-5\mu^2+4\mu+1$.

Είναι:
- $A=0 \Leftrightarrow \mu^2-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-1$
- $B=0 \Leftrightarrow 3\mu^2-2\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{3}$

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για $\mu\neq 1$.

β. i. $A=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-1$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-1$.

ii. $B=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-\frac{1}{3}$.

iii. $\Gamma=0 \Leftrightarrow -5\mu^2+4\mu+1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{5}$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-\frac{1}{5}$.

γ. Για $\mu=-1$ έχουμε την ε_1: $4y-8=0 \Leftrightarrow y=2$.

Για $\mu=0$ έχουμε την ε_2: $-x-y+1=0$.

Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Μ με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=2 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

οπότε $M(-1,\, 2)$.

Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2-1)\cdot(-1)+(3\mu^2-2\mu-1)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=-\mu^2+1+6\mu^2-4\mu-2-5\mu^2+4\mu+1=0$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(-1,\, 2)$.

66 Θέμα 4 – 15439

α. i. Είναι $A\Pi \perp \varepsilon$ και $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{1}=-1$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{A\Pi}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Pi}=1$

Άρα $A\Pi: y-3=1(x-2) \Leftrightarrow y=x+1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Άρα $\Pi(-1,\, 0)$.

ii. Το Π είναι το μέσον του AA' , οπότε

$$\begin{cases} \dfrac{x_{A'}+2}{2}=-1 \\ \dfrac{y_{A'}+3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad A'(-4,\,-3)$$

β. i. Είναι $\varepsilon_2: y-1=\dfrac{-3-1}{-4-1}(x-1) \Leftrightarrow 4x-5y+1=0$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ε_2 .

Είναι:

$$(-4)\cdot\begin{cases} y+x+1=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y-4=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -9y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3}+1=0 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} , \text{ οπότε } \Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

γ. Η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(2,\,3)$ και $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, οπότε

$$\varepsilon_1: y-3=\frac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x-4y+2=0$$

67 Θέμα 4 – 16003

α. Για $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_0:-4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ για $\alpha=4$ έχουμε $\varepsilon_4:-8y+8=0 \Leftrightarrow y=1$.

Το κοινό τους σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Άρα οι ευθείες ε_0 , ε_4 έχουν κοινό σημείο $M(1,\,1)$.

β. Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1,\,1)$. Για $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται: $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0 \Leftrightarrow 0\cdot\alpha=0$, που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ. i. • Οι ευθείες που προκύπτουν για $\alpha=4$ και $\alpha=0$ είναι οι $y=1$ και $x=1$ που δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη κάθετη στον $x'x$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 4$.

Για $x=0$ έχουμε: $y=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ για $y=0$ έχουμε $x=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία της ε_α με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα $A\left(\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha},0\right)$ και $B\left(0,\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$ αντίστοιχα. Τα σημεία A και B βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν: $\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha}>0$, (1) και $\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}>0$, (2) . Είναι:

$(1)\Leftrightarrow(\alpha+4)(4-\alpha)>0\Leftrightarrow(\alpha-4)(\alpha+4)<0\Leftrightarrow-4<\alpha<4$, με $\alpha\neq0$

$(2)\Leftrightarrow2\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha<-4$ ή $\alpha>0$, με $\alpha\neq4$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία A, B είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε $(OA)=\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha}$ και $(OB)=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$.

Έχουμε $(OA)=2(OB)\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4-\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.

68 Θέμα 4 – 16477

α. i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ .

Οπότε οι συντεταγμένες του $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή είναι:

$\lambda x_\Phi+(1-\lambda)y_\Phi+2=0\Leftrightarrow\lambda x_\Phi+y_\Phi-\lambda y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda+y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda=-y_\Phi-2$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Πρέπει: $\begin{cases}x_\Phi-y_\Phi=0\\ \text{και}\\ -y_\Phi-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Phi=-2\\ \text{και}\\ y_\Phi=-2\end{cases}$. Άρα $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Τότε οι συντεταγμένες του $O(0, 0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ .

Έχουμε $\lambda\cdot0+(1-\lambda)\cdot0+2=0\Leftrightarrow2=0$, που είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β. Έστω $P(x_P, y_P)$. Είναι $y_P>y_\Phi\Leftrightarrow y_P>-2$, αφού το ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ .

Επειδή το P ανήκει στην ευθεία $x+y+4=0$ ισχύει $x_P+y_P+4=0\Leftrightarrow x_P=-4-y_P$. Οπότε $P(-4-y_P, y_P)$ με $y_P>-2$.

Έχουμε $(PO)=4\Leftrightarrow\sqrt{(x_O-x_P)^2+(y_O-y_P)^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{(0-(-4-y_P))^2+(0-y_P)^2}=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(4+y_P)^2+{y_P}^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P+16}=4$

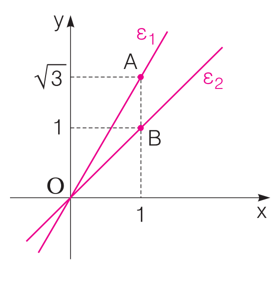
$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P}=0\Leftrightarrow2y_P(y_P+4)=0\Leftrightarrow y_P=0$ ή $y_P=-4$

Δεκτή είναι μόνο η $y_P=0>-2$ αφού $-4<-2$.

Άρα $P(-4, 0)$.

69 Θέμα 4 – 18244

α. Οι ε_1 , ε_2 διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία $A(1,\sqrt{3})$ $B(1,1)$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 60^o , ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 45^o .

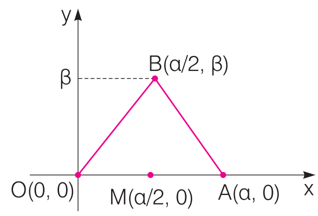
γ. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις ε_1 , ε_2 με τον xx' , δηλαδή $60^o-45^o=15^o$.

δ. Το $\vec{\delta}_1=(1,\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το $\vec{\delta}_2=(1,1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2. Είναι $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$,

$|\vec{\delta}_2|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ και $\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=(1,\sqrt{3})\cdot(1,1)=1+\sqrt{3}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu 15^o=\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

70 Θέμα 4 – 15681

α. Αφού $\beta\neq 0$ τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Τα σημεία φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



$$(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \text{ και}$$

$$(AB)=-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$$

Οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ.

Είναι $\dfrac{x_O+x_A}{2}=\dfrac{0+\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=x_M$ και $\dfrac{y_O+y_A}{2}=0=y_M$ το μέσο του ΟΑ είναι το σημείο $M\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

β. Είναι: • ΟΒ: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x\Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$

• ΑΒ: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$

γ. • $d_1=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{|\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ και

• $d_2=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}+\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\dfrac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

Άρα $d_1=d_2$.

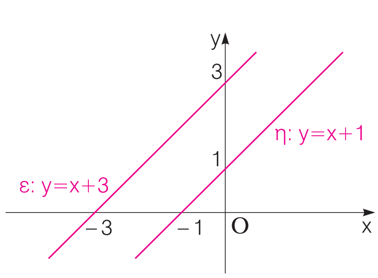
δ. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

71 Θέμα 2 – 18240

α. Είναι (ε): $y=x+3\Leftrightarrow x-y+3=0$, οπότε $\delta(A,\varepsilon)=\dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

β. Είναι $\eta//\varepsilon$, οπότε $\lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=1$ και αφού η (η) διέρχεται από το Α(1, 2) θα έχει εξίσωση $y-2=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$.

γ. Οι ευθείες (η), (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



72 Θέμα 2 – 16759

α. Η (ε_1) έχει εξίσωση $x-2y+1=0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Η (ε_2) έχει εξίσωση $2x+y-4=0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{2}{1}=-2$.

Οπότε $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{1}{2}(-2)=-1$, δηλαδή οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 2(2y-1)+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο $A\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{6}{5}\right)$.

γ. Είναι (ε_3): $0\cdot x+1\cdot y+1=0$, οπότε $d(A,\varepsilon_3)=\dfrac{|0\cdot\frac{7}{5}+\frac{6}{5}+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{11}{5}$.

73 Θέμα 2 - 18979

α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{2}{3}$ και $\lambda_2=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$, οπότε $\lambda_1=\lambda_2$.

Επιπλέον για $x=0$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $y=\dfrac{5}{3}$ και $y=\dfrac{4}{3}$, δηλαδή τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία. Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

β. Είναι $2\cdot 1+3\cdot 1=5$. Άρα το σημείο A είναι σημείο της ευθείας ε_1.

γ. Έχουμε $\varepsilon_2: 4x+6y=8 \Leftrightarrow 2x+3y-4=0$, οπότε $d(A,\varepsilon_2)=\dfrac{2\cdot1+3\cdot1-4}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

74 Θέμα 2 – 16425

α. Είναι ε_1: $y=\dfrac{2}{3}x+1$ με $\lambda_1=\dfrac{2}{3}$ και

ε_2: $x=\dfrac{3}{2}y+9 \Leftrightarrow 2x=3y+18 \Leftrightarrow 2x-3y-18=0$ με $\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

Οπότε $\lambda_1=\lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β. Από την εξίσωση της ε_1 για $x=0$, βρίσκουμε το $y=1$, οπότε το σημείο $A(0,1)\in\varepsilon_1$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|2\cdot0-3\cdot1-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-21|}{\sqrt{13}}=\frac{21}{\sqrt{13}}=\frac{21\sqrt{13}}{13}$$

75 Θέμα 2 – 15440

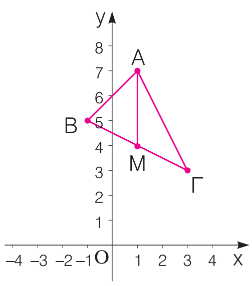
α. • $\vec{AB}=(3-0,\,0-2)=(3,-2)$

• $\vec{A\Gamma}=(1-0,\,1-2)=(1,-1)$

Β. i. Είναι $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\dfrac{1}{2}|-1|=\dfrac{1}{2}$

76 Θέμα 2 – 16769



α. Είναι: • $\vec{AB}=(x_B-x_A,\,y_B-y_A)=(-1-1,\,5-7)=(-2,-2)$

• $\vec{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B,\,y_\Gamma-y_B)=(3+1,\,3-5)=(4,-2)$

Οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|4+8|=6$

β. i. Το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ είναι $M\left(\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}, \dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ ή $M(1, 4)$.

ii. Είναι $x_M = x_A = 1$, οπότε η ευθεία AM είναι κατακόρυφη, άρα έχει εξίσωση $x = 1$.

77 Θέμα 2 – 16771

α. Είναι $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \Leftrightarrow (3, -1) = (x_B - 2, y_B - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_B - 2 = 3$ και $y_B - 1 = -1 \Leftrightarrow x_B = 5$ και $y_B = 0$, άρα $B(5, 0)$.

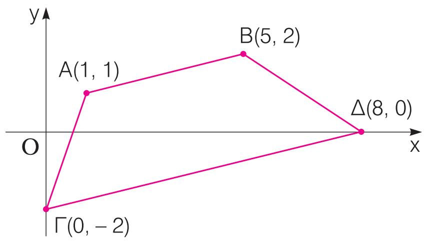
β. i. Είναι $\vec{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-2, -1-1) = (2, -2)$ και $\vec{AB} = (3, -1)$

Είναι $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 2(-1) = -6 + 2 = -4 \neq 0$.

Άρα τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = \dfrac{1}{2}|-4| = \dfrac{1}{2}\cdot 4 = 2$

78 Θέμα 2 – 16810



α. Είναι: • $\lambda_{AB} = \dfrac{2-1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta} = \dfrac{0+2}{8-0} = \dfrac{1}{4}$, οπότε $AB // \Gamma\Delta$.

• $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{-2-1}{0-1} = 3$ και $\lambda_{B\Delta} = \dfrac{0-2}{8-5} = -\dfrac{2}{3}$, οι ευθείες $A\Gamma$ και $B\Delta$ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

β. Για το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (A\Gamma\Delta)$.

Για τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ βρίσκουμε τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$, $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AB}$.

Είναι: • $\vec{A\Gamma} = (-1, -3)$, $\vec{A\Delta} = (7, -1)$, $\vec{AB} = (4, 1)$

• $\det(\vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 22$, $\det(\vec{AB}, \vec{A\Delta}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -11$

Άρα $(AB\Delta) = \dfrac{1}{2}|\det(\vec{AB}, \vec{A\Delta})| = \dfrac{11}{2}$ και $(A\Gamma\Delta) = \dfrac{1}{2}|\det(\vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta})| = 11$

Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{11}{2} + 11 = \dfrac{33}{2}$.

79 Θέμα 2 – 17805

α. Είναι: • $\vec{OA} = (3, 4)$.

• $\vec{A\Delta} = (x_\Delta - x_A, y_\Delta - y_A) = \left(\dfrac{12}{5} - 3, \dfrac{16}{5} - 4\right) = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.

β. Έχουμε $\vec{A\Delta} = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{1}{5}(3, 4) = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.

γ. Είναι $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4, -3)$.

Έχουμε $(A\Delta B) = \dfrac{1}{2}|\det(\vec{A\Delta}, \vec{AB})| \overset{\beta.}{=} \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5} \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{9}{5} + \dfrac{16}{5}\right| = \dfrac{5}{2}$

Είναι $\dfrac{1}{5}\cdot(OAB) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{25}{2} = \dfrac{5}{2}$. Άρα $(A\Delta B) = \dfrac{1}{5}(OAB)$.

80 Θέμα 2 – 16194

α. Έχουμε $\begin{cases} 8x+y-28=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y=28 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=27 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

Άρα $M(3, 4)$.

β. i. Είναι $\overrightarrow{OM}=(3-0, 4-0)=(3,4)$, οπότε $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

ii. $d(M, \varepsilon_3)=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{30}{5}=6$

81 Θέμα 4 – 16057

α. i. Οι ευθείες που έχουν κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$ και διέρχονται από το σημείο $A(2, 0)$ είναι

$\varepsilon_\lambda : y-0=\lambda(x-2)\Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, (1).

ii. Είναι $d(B,\varepsilon_\lambda)=\dfrac{|3\lambda-4-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.

Πρέπει $d(B, \varepsilon_\lambda)=1\Leftrightarrow \dfrac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow |\lambda-4|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(\lambda-4)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{15}{8}$.

Για $\lambda=\dfrac{15}{8}$, από την (1) έχουμε: $\dfrac{15}{8}x-y-\dfrac{30}{8}=0\Leftrightarrow 15x-8y-30=0$.

β. Από το σημείο $A(2, 0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία $\zeta : x=2\Leftrightarrow x-2=0$.

Είναι $d(B, \zeta)=\dfrac{|1\cdot 3+0\cdot 4-2|}{\sqrt{1}}=1$. Άρα και η (ζ) απέχει απόσταση 1 από το B.

γ. Έστω δ_1, δ_2 οι διχοτόμοι των γωνιών των $(\varepsilon), (\zeta)$. Αν $M(x_0, y_0)\in\delta_1$ ή δ_2, τότε

$$d(M, \varepsilon)=d(M, \zeta)\Leftrightarrow \frac{|15x_0-8y_0-30|}{\sqrt{15^2+(-8)^2}}=\frac{|x_0-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}\Leftrightarrow|15x_0-8y_0-30|=17|x-2|$$

$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 4x_0-y_0-8=0 \text{ ή } x_0+4y_0-2=0$$

Άρα $\delta_1 : 4x-y-8=0$ και $\delta_2 : x+4y-2=0$.

82 Θέμα 4 – 22266

α) Έχουμε την εξίσωση: $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (Ε), $\lambda\in\mathbb{R}$ που είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, με $A=2\lambda+1$ και $B=\lambda-2$.

Οπότε: $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\lambda+1=0 \\ \lambda-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $A\neq 0$ ή $B\neq 0$,

επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: $2\lambda x+x-\lambda y+2y+\lambda-7=0$ ή

$(2x-y+1)\lambda+(x+2y-7)=0$. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=2x+1 \\ x+2(2x+1)-7=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=2x+1 \\ x+4x+2-7=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο $M(1, 3)$.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1}$ = (Β, -Α) = (-8, -6).

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα

$\overrightarrow{\delta_2}$ = (Β, -Α) = (-λ + 2, -2λ - 1).

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} // \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda+2 & -2\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$16\lambda + 8 - 6\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow 10\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Για λ = -2 από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: $-3x + 4y - 9 = 0$.

Άρα ε: $-3x + 4y - 9 = 0$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): 6x-8y+3=0, οπότε $d(M, \zeta) = \frac{|6\cdot1-8\cdot3+3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

83 Θέμα 4 – 17695

α. • Έχουμε $A(t-1, 2t-1)$, $t \geq 0$. Έστω $A(x, y)$. Είναι:

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2(x+1)-1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Α κινείται στην ημιευθεία $\varepsilon_1: y = 2x+1$, $x \geq -1$.

• Έχουμε $B(3t-1, -4t-1)$, $t \geq 0$. Έστω $B(x, y)$. Είναι:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x+1}{3} \\ y = -4\dfrac{x+1}{3} - 1 \\ \dfrac{x+1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x+1}{3} \\ 3y = -4x-7 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x+1}{3} \\ 4x+3y+7 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Β κινείται στην ημιευθεία $\varepsilon_1: 4x+3y+7=0$, $x \geq -1$.

β. Αν υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

γ. Για $t = 2$ είναι $A(1, 3)$ και $B(5, -9)$, οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \ldots = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

δ. Είναι $d(A, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4\cdot(t-1) + 3\cdot(2t-1) + 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow t = 3$.

84 Θέμα 4 – 22073

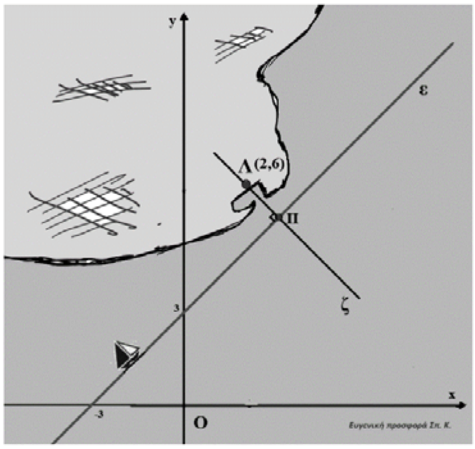
α)

i. Για το σημείο Π(λ-1, 2+λ) έχουμε: $\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ \text{και} \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases}$. Απαλείφοντας το λ από τις 2 εξισώσεις έχουμε ότι $y_\Pi = x_\Pi + 3$. Επομένως η εξίσωση της τροχιάς του πλοίου είναι η ευθεία ε με εξίσωση την x-y+3=0.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0.

Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 ≠ 0. Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β)



i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ. Υπολογίζεται με την απόσταση του σημείου Λ από την ε. Δηλαδή

$$d(Λ,ε)=\frac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη ευθεία στην ε, άρα $λ_ζ \cdot λ_ε = -1$. Επειδή $λ_ε = 1$, έχουμε ότι $λ_ζ = -1$ και η εξίσωσή της είναι: $y-y_Λ = -(x-x_Λ)$ ή $y-6 = -x+2 \Leftrightarrow x+y=8$. Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και ζ, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος.

$$(Σ)\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{11}{2} \end{cases}$$

Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

85 Θέμα 4 – 15380

α. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε $(ΑΒ)=d(Α,ε) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{10}=\frac{|6+α|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |α+6|=10 \Leftrightarrow α=4$ ή $α=-16$.

β. Για $α=4$ έχουμε $ε: 3x+y+4=0$.

i. Για $x=0$ είναι $y=-4$, οπότε $Γ(0,-4)$.

Είναι $\vec{ΑΒ}=(-3,-1)$ και $\vec{ΑΓ}=(-1,-7)$. Οπότε $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 20=10$.

ii. Το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετη στην ε .

Είναι $λ_ε=-3$, οπότε $λ_ε \cdot λ_δ=-1 \Leftrightarrow λ_δ=\frac{1}{3}$. Άρα $δ: y=\frac{1}{3}x$.

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+y+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{1}{3}x+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+12=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

. Άρα είναι το σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

86 Θέμα 4 – 22265

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x=\mu-1 \\ y=3\mu-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=x+1 \\ y=3(x+1)-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ \mu=x+1 \\ \mu\in R \end{cases}$$

, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η AB // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3\cdot1+1$.

Άρα το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B-x_A, y_B-y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma-x_A, y_\Gamma-y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu-2, 3\mu-1)$, οπότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu-2 & 3\mu-1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left|1(3\mu-1)-3(\mu-2)\right| = \frac{1}{2}\left|3\mu-1-3\mu+6\right| = \frac{1}{2}|5| = \frac{5}{2}$$, σταθερό για κάθε $\mu\in R$.

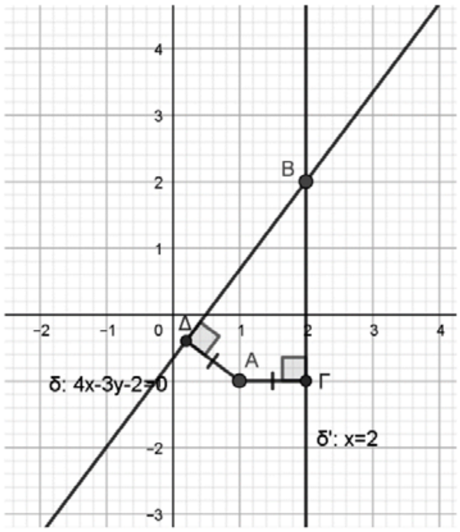
Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην AB, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και AB. Επίσης το μήκος του AB είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο B(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ′: x = 2 και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή

δ: y - 2 = λ(x - 2) ή δ: λx - y + 2 - 2λ = 0.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ′: x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \frac{|\lambda\cdot1-1\cdot(-1)+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} = \frac{|\lambda+1+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.



Θέλουμε: $d(A,\delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow |3-\lambda|=\sqrt{\lambda^2+1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $|3-\lambda|^2=\sqrt{\lambda^2+1}^2 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow 9-6\lambda+\lambda^2=\lambda^2+1$ $\Leftrightarrow 6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι δεκτή.

Για $\lambda=\frac{4}{3}$ η ευθεία δ: $\frac{4}{3}x-y+2-2\frac{4}{3}=0$ ή δ: $\frac{4}{3}x-y+2-\frac{8}{3}=0$ ή δ: $\frac{4}{3}x-y-\frac{2}{3}=0$ ή δ: $4x-3y-2=0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.

87 Θέμα 4 – 15433

α. i. Το σημείο του δρόμου από το οποίο ο οικισμός Α απέχει τη μικρότερη απόσταση είναι το σημείο τομής της ευθείας και της κάθετης ευθείας ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α.

Είναι $\lambda_\delta=-\frac{1}{1}=-1$, οπότε $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=1$.

Οπότε $\varepsilon: y-(-2)=1\cdot(x-(-1))\Leftrightarrow x-y-1=0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθειών ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο:

$\begin{cases}x+y-1=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2=0\\x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$, οπότε το $(1, 0)$.

ii. Η θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς είναι το κοινό σημείο της ευθείας δ και της μεσοκαθέτου ζ του ΑΒ.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{1-(-2)}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$ και $\lambda_{AB}\cdot\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=-\frac{4}{3}$.

Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $x_M=\frac{-1+3}{2}=1$, $y_M=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$, οπότε $M(1,-\frac{1}{2})$.

Άρα $\zeta: y+\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}(x-1)\Leftrightarrow 8x+6y-5=0$.

Έχουμε $\begin{cases}x+y-1=0\\8x+6y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\8x+6(1-x)-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$, οπότε είναι το σημείο $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

β. Έστω $\Gamma(x, y)$ σημείο της $\delta: x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$. Άρα $\Gamma(x, 1-x)$.

Είναι $\vec{AB}=(4, 3)$ και $\vec{A\Gamma}=(x+1, 3-x)$.

Έχουμε $(ΑΒΓ)=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |9-7x| = 16 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=\frac{25}{7}$.

Άρα η θέση $Γ$ του αυτοκινήτου είναι στα σημεία $(-1, 2)$ ή $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

88 Θέμα 4 – 14984

α. Έστω $M(x, y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2, y+3)$, $\vec{AB}=(9, 12)$.

Έχουμε $(AMB)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\vec{AM}, \vec{AB})| = 12 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right| = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |12(x+2)-9(y+3)| = 24 \Leftrightarrow 3|4(x+2)-3(y+3)| = 24$

$\Leftrightarrow |4x+8-3y-9| = 8 \Leftrightarrow |4x-3y-1| = 8$

$\Leftrightarrow 4x-3y-1=8$ ή $4x-3y-1=-8 \Leftrightarrow 4x-3y-9=0$ ή $4x-3y+7=0$.

Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού $\lambda_1=\lambda_2=\frac{4}{3}$ και τέμνουν τον $y'y$ στα $(0,-3)$ και $(0, \frac{7}{3})$ που είναι διαφορετικά.

β. Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-(-3)}{7-(-2)}=\frac{4}{3}$, άρα η ευθεία AB είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2).

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της AB ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2).

Βρίσκουμε το μέσο του AB που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K(\frac{5}{2}, 3)$.

Είναι $d(K, \varepsilon_1)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$ και $d(K, \varepsilon_2)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$.

γ. Το τετράπλευρο AM_1BM_2 αποτελείται από τα τρίγωνα AM_1B και AM_2B, οπότε
$(AM_1BM_2)=(AM_1B)+(AM_2B)=12+12=24$, αφού $(AMB)=12$, για κάθε σημείο M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε σημεία X, Y των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (τα σημεία M_1, B, M_2 να μην είναι συνευθειακά).
Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα $AXBY$ με σταθερό εμβαδόν 24.

89 Θέμα 4 – 15273

α. Είναι: $\vec{AB}=(-1, 1)$ και $\vec{AΓ}=(-5, -2)$ οπότε $\det(\vec{AB}, \vec{AΓ})=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$.

Άρα τα σημεία A, B, $Γ$ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B, $Γ$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{2-5}{-2-2}=\frac{3}{4}$ και

εξίσωση $y-5=\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$.

γ. Αν $M(x, y)$ τότε $\begin{cases} x=4\alpha-1 \\ y=3\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{x+1}{4} \\ y=3\dfrac{x+1}{4}+1 \end{cases}$. Άρα $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$.

Άρα το M βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στη $BΓ$ αφού έχουν ίδια κλίση και

τέμνουν το $y'y$ στα $(0, \frac{7}{2})$, $(0, \frac{7}{4})$ που είναι διαφορετικά.

Για $x=3$ έχουμε $y=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το A .

δ. Είναι: • $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$

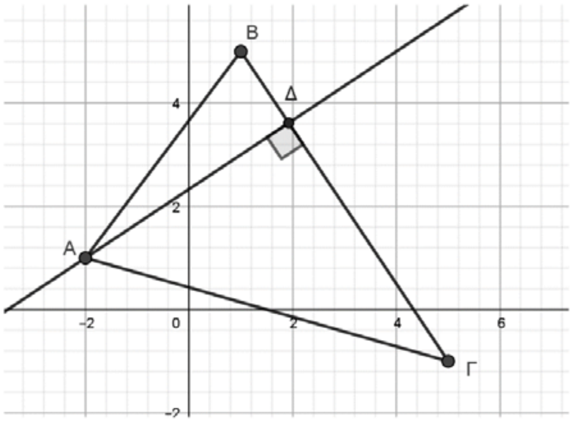
• $\vec{B\Gamma}=(-4,-3)$ και $\vec{BM}=(4\alpha-3,3\alpha-4)$, οπότε

$$\det(\vec{B\Gamma},\vec{BM})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7\ ,\ \text{άρα}\ (MB\Gamma)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$$

Άρα $(MB\Gamma)=(AB\Gamma)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, $MB\Gamma$ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του M , αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση $B\Gamma$ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών του ερωτήματος **γ.**

90 Θέμα 4 – 22262



α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)$ = (1-(-2), 5-1) = (3, 4) και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A, y_\Gamma-y_A)$ = (5-(-2), -1-1) = (7, -2), οπότε: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|$ =

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_{AB} & y_{AB}\\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3\cdot(-2)-4\cdot 7|=\frac{1}{2}|-6-28|=\frac{1}{2}|-34|=\frac{1}{2}\cdot 34=17.$

β) Είναι ΒΓ: $y-y_B=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}(x-x_B)$ ή ΒΓ: $y-5=\frac{-1-5}{5-1}(x-1)$ ή ΒΓ: $y-5=\frac{-6}{4}(x-1)$ ή

ΒΓ: $y-5=-\frac{3}{2}(x-1)$ ή ΒΓ: $2y-10=-3x+3$ ή ΒΓ: $3x+2y-13=0$.

γ) Έστω υ_α το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $\lambda_{B\Gamma}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{2}$ και $\upsilon_\alpha\perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha}=\frac{-1}{\lambda_{B\Gamma}}=\frac{-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$. Έτσι

υ_α: $y-y_A=\lambda_{\upsilon_\alpha}(x-x_A)$ ή υ_α: $y-1=\frac{2}{3}(x-(-2))$ ή υ_α: $3y-3=2x+4$ ή υ_α: $2x-3y+7=0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, υ_α έχουμε: $\begin{cases}3x+2y=13\\ 2x-3y=-7\end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$.

Επομένως, $Δ(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: $(MAB) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$, η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: $(MAB) = \frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x - (-2), y - 1) = (x + 2, y - 1)$, άρα:

$(MAB) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}|3\cdot(y - 1) - 4\cdot(x + 2)| = \frac{1}{2}|3y - 3 - 4x - 8| = \frac{1}{2}|3y - 4x - 11|$, οπότε από την (1) $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{17}{2} \Leftrightarrow |3y - 4x - 11| = 17 \Leftrightarrow 3y - 4x - 11 = -17$ ή $3y - 4x - 11 = 17 \Leftrightarrow$

$4x - 3y - 6 = 0$ ή $4x - 3y + 28 = 0$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $ε_1$: $4x - 3y - 6 = 0$ ή $ε_2$: $4x - 3y + 28 = 0$.

91 Θέμα 4 – 17694

α. Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β αυτή θα είναι η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ, τότε

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα $M(5, 2)$.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$ και $ε \perp AB \Leftrightarrow \lambda_ε \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_ε = \frac{1}{2}$.

Άρα $ε: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow ε: 2y - 4 = x - 5 \Leftrightarrow ε: x - 2y - 1 = 0$.

β. Αν $Σ(x, y)$ σημείο της ε, τότε $x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$, οπότε $Σ(2y+1, y)$.

Είναι:
- $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (7 - 3, -2 - 6) = (4, -8)$ και
- $\vec{AΣ} = (x_Σ - x_A, y_Σ - y_A) = (2y + 1 - 3, y - 6) = (2y - 2, y - 6)$

Έχουμε $(ABΣ) = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\vec{AB}, \vec{AΣ})| = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y-2 & y-6 \end{vmatrix}\right| = 20$

$\Leftrightarrow |4(y-6) - (-8)(2y-2)| = 40 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |20y - 40| = 40$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 4$

Βρίσκουμε $Σ(1, 0)$ ή $Σ(9, 4)$.

92 Θέμα 4 – 15987

α. $ε: y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{3-1}{2-1}(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

β. • Για $y=0$ είναι $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, οπότε η ευθεία ε τέμνει τον x΄x στο $A(\frac{1}{2}, 0)$.

• Για $y=5$ είναι $2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$, οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το $B(3, 5)$.

Είναι $x_O < x_A < x_\Gamma$ και $y_B < y_\Gamma$, οπότε το Γ δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ε και το $O(0, 0)$.

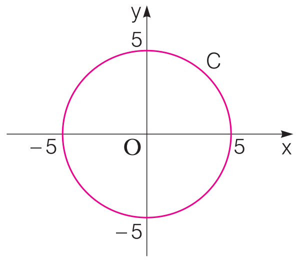
γ. Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).
Οι αποστάσεις Ο και Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι τα ύψη των ΑΟΒ, ΑΒΓ.

Είναι: • $d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

• $d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$

Άρα $d(O, e) < d(\Gamma, \varepsilon)$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.

93 Θέμα 2 – 18700



α. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το (0, 0) και ακτίνα 5 είναι $C: x^2+y^2=5^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$. Ο κύκλος C φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β. i. Είναι $(OA)=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, οπότε το Α ανήκει στον κύκλο C.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης του C στο $A(3,-4)$ είναι $\varepsilon: x\cdot x_A+y\cdot y_A=25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varepsilon: 3x-4y=25$.

94 Θέμα 2 – 16773

α. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OA)=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

Άρα η εξίσωση του είναι: $x^2+y^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=5$.

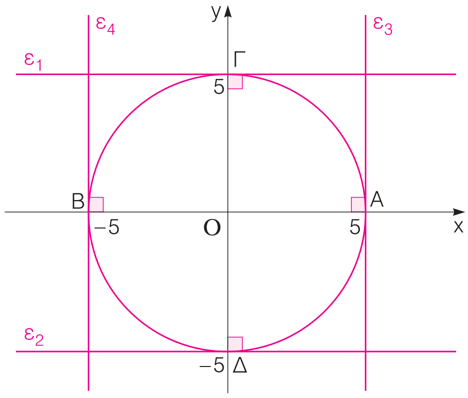
β. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι:

$xx_A+yy_A=\rho^2 \Leftrightarrow x+2y=5$.

ii. Για να είναι το σημείο Β αντιδιαμετρικό του Α, θα πρέπει το κέντρο Ο του κύκλου να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Οπότε:

$$\begin{cases} x_O=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\frac{1+x_B}{2} \\ 0=\frac{2+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1+x_B \\ 0=2+y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=-2 \end{cases}$$, άρα $x_B=-1$ και $y_B=-2$. Άρα $B(-1,-2)$.

95 Θέμα 2 - 18241



α. Ο κύκλος C, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $A(5, 0)$ και $B(-5, 0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία $\Gamma(0, 5)$ και $\Delta(0,-5)$.

β. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0, 5)$ και $\Delta(0,-5)$ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΓ, ΟΔ οπότε είναι παράλληλες στον x΄x άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα.

Είναι οι ευθείες ε_1 , ε_2 που φαίνονται στο σχήμα.

γ. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5, 0)$ και $B(-5, 0)$ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ στον x΄x, οπότε είναι παράλληλες στον y΄y άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες ε_3 , ε_4 που φαίνονται στο σχήμα.

96 Θέμα 2 – 15028

α. Είναι C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

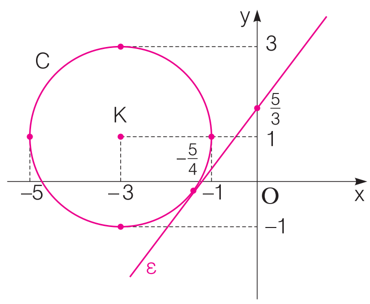
97 Θέμα 2 – 17317

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,\,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{4}=2$.

β. Έχουμε: $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1-4\cdot 2-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{25}}=\dfrac{13}{5}$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=\dfrac{13}{5}>2$, η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

98 Θέμα 2 – 18239



α. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β. Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(K,\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ. Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $-\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{5}{3}$ αντίστοιχα.

Σχεδιάζουμε με διαβήτη τον κύκλο κέντρου $K(-3,\,1)$ και $\rho=2$.

99 Θέμα 2 - 22172

α) Η απόσταση του σημείου (x_o,y_o) από την ευθεία Αx + Βy + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο:

$d=\dfrac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Επομένως έχουμε $d(A,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot(-2)-4\cdot 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$

β) Η ζητούμενη ευθεία (η) είναι κάθετη στην (ε), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της (η) και της (ε) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{-4}=\dfrac{3}{4}$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας (η) θα είναι $-\dfrac{4}{3}$.

Η ευθεία διέρχεται από το Α(-2,1), οπότε η εξίσωση θα είναι $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ ή $y-1=-\dfrac{4}{3}(x+2)$

ή $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}+1$ ή $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (x_o,y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση

$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$ (1). Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία (ε), θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του Α από την (ε) να ισούται με την ακτίνα ρ. Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η απόσταση του Α από την (ε) είναι 2, επομένως ρ = 2 και η (1) γίνεται

$(x-(-2))^2+(y-1)^2=2^2$ ή $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

100 Θέμα 2 - 20890

α. Είναι

$$ΒΓ: y-y_Γ=\frac{y_Β-y_Γ}{x_Β-x_Γ}(x-x_Γ) \Leftrightarrow y+3=\frac{-8+3}{2-7}(x-7) \Leftrightarrow y+3=\frac{-5}{-5}(x-7) \Leftrightarrow y+3=x-7 \Leftrightarrow x-y-10=0$$

β. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$ρ=d(Α\,,\,ΒΓ)=\frac{|1\cdot 3-1\cdot(-3)-10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,.$$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$C:(x-x_Α)^2+(y-y_Α)^2=ρ^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2=(2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2=8\,.$$

101 Θέμα 2 – 18238

α. Είναι $x_Κ=\frac{x_Α+x_Β}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=-1$ και $y_Κ=\frac{y_Α+y_Β}{2}=\frac{3+5}{2}=4$, οπότε $Κ(-1,4)$.

β. Είναι $(ΚΑ)=\sqrt{(x_Κ-x_Α)^2+(y_Κ-y_Α)^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$.

γ. Ο κύκλος έχει κέντρο το $Κ(-1,4)$ και ακτίνα $ρ=(ΚΑ)=\sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2+(y-4)^2=5$.

102 Θέμα 2 – 16808

α. • Το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ είναι $Κ\left(\frac{-8+4}{2},\frac{1+5}{2}\right)$ ή $Κ(-2,3)$.

• Είναι $(ΑΒ)=\sqrt{(-8-4)^2+(1-5)^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$.

• Άρα το ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου C $(ΚΓ)=\sqrt{(-2+4)^2+(3-9)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=\frac{ΑΒ}{2}$.

β. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $Κ(-2,3)$ και η ακτίνα του $ρ=2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου C είναι: $(x+2)^2+(y-3)^2=40$.

103 Θέμα 2 – 21962

α) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{ΑΒ}=(x_Β-x_Α,\ y_Β-y_Α)=(3-0\,,\,4-3)=(3\,,\,1)$,

$\overrightarrow{ΑΓ}=(x_Γ-x_Α,\ y_Γ-y_Α)=(1-0\,,\,0-3)=(1\,,\,-3)$.

Οπότε $\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=3\cdot1+1\cdot(-3)=3-3=0$, άρα $\overrightarrow{ΑΒ}\perp\overrightarrow{ΑΓ}$ ή $Β\widehat{Α}Γ=90^\circ$.

β) Το σημείο Κ που είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ θα έχει συντεταγμένες:

$Κ\left(\frac{x_Β+x_Γ}{2},\frac{y_Β+y_Γ}{2}\right)$ ή $Κ\left(\frac{3+1}{2},\frac{4+0}{2}\right)$ ή $Κ(2\,,\,2)$.

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η γωνία $Β\widehat{Α}Γ$ είναι ορθή και τα σημεία Α, Β και Γ είναι σημεία του ζητούμενου κύκλου, άρα η γωνία $Β\widehat{Α}Γ$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με:

$(ΒΓ)=\sqrt{(x_Γ-x_Β)^2+(y_Γ-y_Β)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Όμως ΒΓ = 2R, άρα $2R=2\sqrt{5}$ ή $R=\sqrt{5}$.

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ του ερωτήματος β) και η εξίσωσή του θα είναι:

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

104 Θέμα 2 – 21965

α) Για το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ισχύει: Μ($\frac{x_A+x_B}{2}$, $\frac{y_A+y_B}{2}$) ή Μ($\frac{2+0}{2}$, $\frac{-4+(-2)}{2}$)

ή Μ(1, -3).

β) Η κλίση του ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{-2-(-4)}{0-2} = \frac{2}{-2}$ = -1. Η κλίση της μεσοκαθέτου (ζ) του ΑΒ θα πρέπει να είναι λ = 1 (αφού το γινόμενο των δύο κλίσεων θα πρέπει να ισούται με -1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος ΑΒ θα είναι: $y - y_M = \lambda \cdot (x - x_M)$ ή y - (-3) = 1 (x – 1) ή y + 3 = x - 1 ή y = x - 4.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ ή x – 4 = 2x – 6 ή x = 2 και y = -2. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

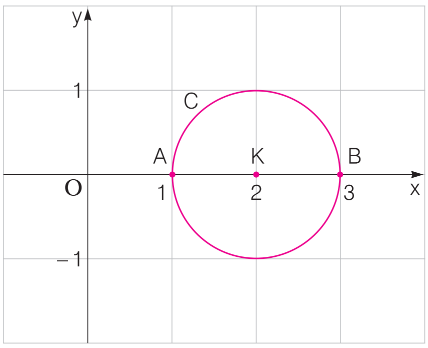
γ) το κέντρο Κ του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ε) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το Κ(2, -2). Η ακτίνα του κύκλου θα είναι ρ = (ΚΑ) = (ΚΒ) αλλά ρ = (ΚΒ) = $\sqrt{(2-0)^2+(-2+2)^2} = \sqrt{4+0}$ = 2.

Η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

105 Θέμα 2 – 15994

α. Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Επειδή $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+0^2-4\cdot 3=4>0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Είναι $-\frac{A}{2}=2$, $-\frac{B}{2}=0$ και $\rho=\frac{\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=1$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2, 0)$ και η ακτίνα του $\rho=1$.



β. Ο κύκλος (C) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.

106 Θέμα 2 – 22147

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-1$, $B=-1$, $\Gamma=-\frac{7}{2}$.

Είναι

$$A^2+B^2-4\Gamma=1+1+14=16>0$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

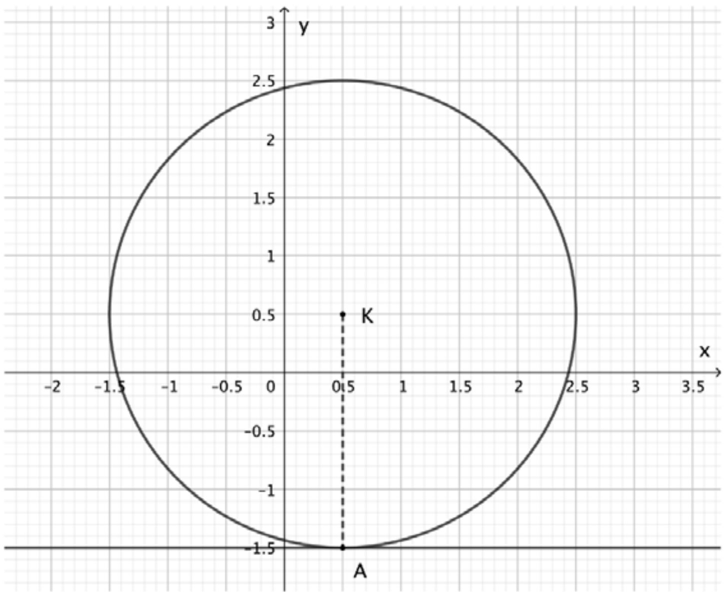
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

Άρα, το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου (Κ,R).

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ. Αφού είναι $x_K = x_A$, η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στον άξονα x΄x, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο Α θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Άρα, θα έχει εξίσωση

$$y = y_A \text{ ή } y = -\frac{3}{2}$$



107 Θέμα 2 – 15680

α. Είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4\cdot 1}}{2} = 2$.

β. Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$.

γ. Αφού $d(K, \varepsilon) = \frac{12}{5} > \rho$, η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

108 Θέμα 2 – 22279

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(y-1)^2 = (3+x)(1-x)$$

$$(y-1)^2 = 3 - 3x + x - x^2$$

$$(y-1)^2 = 3 - 2x - x^2$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y-1)^2 = 4$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) Υπολογίζουμε την απόσταση ΟΚ της αρχής Ο(0,0) των αξόνων από το κέντρο Κ(−1,1) του κύκλου. Είναι:

$$OK = \sqrt{(x_K - x_O)^2 + (y_K - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Κ,R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y - 2 = 0$. Είναι:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2$$

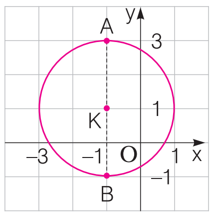
Άρα, η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (Κ,R).

109 Θέμα 2 – 19039

α. Η εξίσωση (1) γίνεται:

$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \Leftrightarrow x^2+3x-x-3+y^2-3y+y-3=-4 \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=2+1+1 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2^2$, (2) .



Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

β. i. Για $x=-1$ η εξίσωση (2) γίνεται:

$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=4 \Leftrightarrow y-1=2$ ή $y-1=-2 \Leftrightarrow y=3$ ή $y=-1$

Άρα τα σημεία είναι: $A(-1,3)$ και $B(-1,-1)$.

ii. Το μέσο του ΑΒ είναι $\left(\frac{-1-1}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ ή $(-1,1)$, δηλαδή το κέντρο Κ του κύκλου. Άρα τα Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

110 Θέμα 4 – 18567

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί $(OA)=|x_A-x_O|=2\sqrt{2}>\rho=2$.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x=2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon)=2\sqrt{2}$.
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$.

Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν $d=(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,|\lambda|=2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 8\lambda^2=4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm1$.

Για $\lambda=1$, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για $\lambda=-1$, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και −1 αντίστοιχα και $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο Α είναι μεταξύ τους κάθετες.

β. Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C , τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Οπότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο και αφού ΟΓ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου είναι ρόμβος. Άρα το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Επομένως $(AB O\Gamma)=2^2=4$.

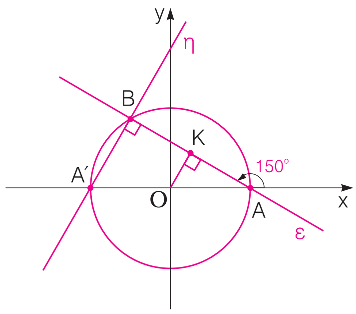
111 Θέμα 4 – 18569

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Για $y = 0$ έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα $A'(-1, 0)$ και $A(1, 0)$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$, είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε $\varepsilon:\ y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.



β. i. Αν OK το απόστημα της χορδής AB, τότε

$$OK = d(O, \varepsilon) = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0 - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Αν $AK = \mu = \frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAK έχουμε:

$OK^2 + AK^2 = OA^2 \Leftrightarrow AK^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $AB = \sqrt{3}$.

ii. Η γωνία $A'\hat{B}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A'B \perp BA$ δηλαδή $\eta \perp \varepsilon$, οπότε

$\lambda_\eta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και $(\eta): y - 0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

112 Θέμα 4 – 14954

α. Για την (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ και για την (ε_2) είναι $A = \mu + 1 \neq 0$ ή $B = \mu - 1 \neq 0$, οπότε $A = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ και $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές A και B των εξισώσεων.
Άρα παριστάνουν ευθείες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β. Το $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και $\vec{\delta}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_2).

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$. Είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|}$.

Είναι
- $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 1\cdot(1-\mu) + \mu\cdot(1+\mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.
- $|\vec{\delta}_1| = \sqrt{1+\mu^2}$
- $|\vec{\delta}_2| = \sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} =$

  $= \sqrt{2(1+\mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{2}\cdot|\vec{\delta}_1|$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\vec{\delta}_1| \cdot \sqrt{2} \cdot |\vec{\delta}_1|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\vec{\delta}_1|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \hat{\theta} = \hat{\varphi} = 45^\circ$.

γ. Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Είναι (ε_1): $y = \mu x - \mu$ και η (ε_2) δίνεται

$$(\mu+1)x + (\mu-1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu+1)x + \mu(\mu-1)x - \mu(\mu-1) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}.$$

Οπότε $y=\mu\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}-\mu=\frac{\mu^3-\mu-\mu^3-\mu}{\mu^2+1}=\frac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Άρα τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $M\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1},\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$ για κάθε τιμή $\mu\in\mathbb{R}$.

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Είναι

$$\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2=\frac{\mu^4-2\mu^2+1+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2}=\frac{\mu^4+2\mu^2+1}{(1+\mu^2)^2}=1$$

Άρα τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο C .

113 Θέμα 4 – 22239

α)

i. Ο κύκλος έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 = 4$.

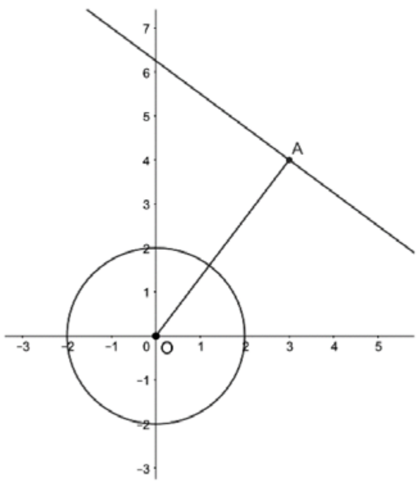
ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση 3x+4y = 25, δηλαδή $3\cdot0+4\cdot0=0$, που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}$. Για να είναι η ΑΟ κάθετη στον αγωγό πρέπει $\lambda_1\lambda_{AO}=-1$ ή $-\frac{3}{4}\lambda_{AO}=-1$ ή $\lambda_{AO}=\frac{4}{3}$. Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι:

$y-y_O=\lambda_{AO}(x-x_O)$ ή $y-0=\frac{4}{3}(x-0)$ ή $y=\frac{4}{3}x$. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases}3x+4y=25 & (1)\\ y=\frac{4}{3}x & (2)\end{cases}$$

Η (1) γίνεται $3x+4\frac{4}{3}x=25$ ή 9x + 16x = 75 ή 25x = 75, δηλαδή x = 3. Η (2) γίνεται $y=\frac{4}{3}3=4$. Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή d(O,ε) = ρ.

d(O,ρ) = $\frac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|\lambda\cdot 0+0+\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2$ ή $\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2$ ή $|\lambda-2|=2\sqrt{\lambda^2+1}$

$|\lambda-2|^2=\left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$ ή $\lambda^2-4\lambda+4=4\left(\lambda^2+1\right)$ ή $3\lambda^2+4\lambda=0$ ή λ(3λ+4) = 0.

Έχουμε λ = 0 που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης (λ ≠ 0) ή λ = $-\frac{4}{3}$.

114 Θέμα 4 – 22214

α) $\vec{AM}=\left(x_M-x_A,y_M-y_A\right)=\left(x-(-1),y-0\right)=\left(x+1,y\right)$. $|\vec{AM}|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\vec{BM}=\left(x_M-x_B,y_M-y_B\right)=\left(x-1,y-0\right)=\left(x-1,y\right)$. $|\vec{BM}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

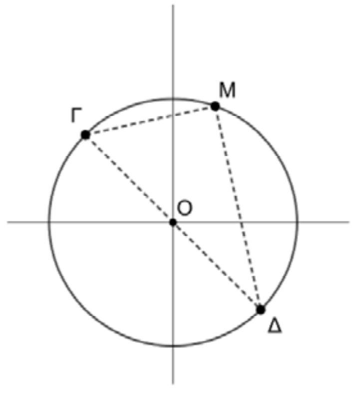
$|\vec{AB}|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(0-0)^2}=\sqrt{2^2+0}=2$.

$\vec{AM}^2+\vec{BM}^2=9|\vec{AB}|$, άρα $|\vec{AM}|^2+|\vec{BM}|^2=9\cdot 2$ ή $\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=18$ ή

$x^2+2x+1+y^2+x^2-2x+1+y^2=18$ ή $2x^2+2y^2+2=18$ ή $x^2+y^2=8$

β)

i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2=32$
   δηλαδή ΓΔ = $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$.
   Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι ρ = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το Ο(0,0).
   Παρατηρούμε ότι ΓΔ = 2ρ, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.
ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\widehat{\Gamma M\Delta}=90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.



115 Θέμα 4 – 18237

α. Είναι: $\vec{AB}=(4,0)$, $\vec{A\Gamma}=(2,2)$ και $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$.

Άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,\,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της ΒΓ που διέρχεται από το Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως (ε): $y-3=x-2 \Leftrightarrow y=x+1$.

γ. Έστω $K(x,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία A, B . Είναι $y=x+1$, οπότε: $K(x,x+1)$. Έχουμε

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9 \Leftrightarrow 8x=8 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα, $K(1,2)$.

δ. Είναι $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$ οπότε το σημείο Κ ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Επιπλέον $\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$.

Άρα, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

116 Θέμα 4 – 18247

α. i. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\alpha}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta}{2}$, οπότε $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

ii. $(OM)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$

β. i. $(AB)=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot(OM)$ ή $(OM)=\frac{(AB)}{2}$

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ. Αφού $(OM)=\frac{(AB)}{2}=(AM)=(BM)$ το σημείο Μ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΟΑΒ , οπότε είναι το περίκεντρό του. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OM)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$.

117 Θέμα 4 – 22508

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$$x_K=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{1+3}{2}=2 \text{ και } y_k=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{4+0}{2}=2\,.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι ίσος με $\lambda_1=\frac{4-0}{1-3}=-2$, κατά συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ είναι $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου $ΑΓ$ είναι το σημείο $K(2,2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho=(AK)=\sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές $Β,Δ$ του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος $ΑΓ$ και του κύκλου διαμέτρου $ΑΓ$.

Λύνουμε το σύστημα :

$$y-2=\frac{1}{2}(x-2) \quad (1)$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=5 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$$(x-2)^2+\frac{1}{4}(x-2)^2=5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2+(x-2)^2=20 \Leftrightarrow 5(x-2)^2=20 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2=4 \Leftrightarrow x-2=2 \text{ ή } x-2=-2 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=0.$$

Για $x=4$ βρίσκουμε $y=3$ και για $x=0$ βρίσκουμε $y=1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4,3)$ και $(0,1)$.

118 Θέμα 4 – 15030

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$, οπότε ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ. Είναι $\lambda_\varepsilon=-2$.

Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$.
Οπότε (η): $y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$.

Πρέπει $d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\beta=5$ ή $1-\beta=-5 \Leftrightarrow \beta=-4$ ή $\beta=6$

Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες τις $\eta_1: 2x+y+4=0$ και $\eta_2: 2x+y-6=0$.

δ. Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $K(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες (η_1), (η_2) οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη ως παράλληλη στις (η_1), (η_2) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$.
Άρα η μεσοπαράλληλη είναι η $y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.

119 Θέμα 4 – 15646

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$. Είναι $x_K=y_K$ και $x_\Lambda=y_\Lambda$, οπότε τα K, Λ βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$, που είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

β. Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(2x-5)=-3(2y-5) \Leftrightarrow 2x-5=5-2y \Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,

προκύπτει $(x-1)^2+(4-x)^2=9 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$ αντίστοιχες τιμές $y=4$ ή $y=1$. Άρα τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $B(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

γ. Έστω $A(x,y)$ που ανήκει στην ευθεία $y=x$. Οπότε έχουμε $A(x,x)$.

Είναι: • $\vec{AB}=(1-x,4-x)$ και $\vec{A\Gamma}=(4-x,1-x)$

• $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(1-x)^2-(4-x)^2|=\frac{1}{2}|6x-15|$

Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|6x-15|=\frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x-15|=21 \Leftrightarrow \begin{cases}6x-15=21\\ 6x-15=-21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ x=-1\end{cases}$

Άρα τα σημεία είναι $A(6,6)$ και $A'(-1,-1)$.

120 Θέμα 4 – 15082

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1=2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(K\Lambda)=\sqrt{(7-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{5^5+5^2}=5\sqrt{2}$.

Ακόμα $\rho_1+\rho_2=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$, δηλαδή $(K\Lambda)=\rho_1+\rho_2$.

Άρα οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β. i. Έχουμε $y-3=\frac{-2-3}{7-2}(x-2) \Leftrightarrow y-3=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 . Έχουμε

$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\pm 2\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4 \text{ ή } x=0\\ y=1 \text{ ή } y=5\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Είναι $(\Lambda A)=\sqrt{(7-4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=\rho_2$.

Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $A(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ. Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία $K\Lambda$ και διέρχεται από το σημείο επαφής $A(4,1)$.

Στο ερώτημα **β.i.** έχουμε $\lambda_{K\Lambda}=-1$, οπότε $\lambda_\eta\cdot\lambda_{K\Lambda}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta\cdot(-1)=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta=1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων έχει εξίσωση:

$(\eta): y-1=1(x-4) \Leftrightarrow y=x-3$.

121 Θέμα 4 - 20091

α. i. Το μέσο M του τμήματος AB είναι $M\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$ ή $M(-2,-3)$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-5+1}{3+7}=-\frac{2}{5}$ και $KM\perp AB \Leftrightarrow \lambda_{KM}\cdot\lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{KM}=\frac{5}{2}$.

Άρα $(KM): y-y_M=\frac{5}{2}(x-x_M) \Leftrightarrow y+3=\frac{5}{2}(x+2) \Leftrightarrow 2y+6=5x+10 \Leftrightarrow 5x-2y+4=0$.

β. i. Το κέντρο K του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία KM . Άρα οι συντεταγμένες του K είναι η λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} 5x-2y=-4 \\ x+y=-12 \end{cases} \Bigg| \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2y=-4 \\ 2x+2y=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=-28 \\ x+y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$$

Άρα $K(-4,-8)$.

ii. Είναι $\rho=(KA)=\sqrt{(-4+7)^2+(-8+1)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$.

Άρα: $C:(x+4)^2+(y+8)^2=58$.

122 Θέμα 4 - 15189

α. Είναι:

- $K\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $K(0,-1)$.
- $|\vec{AB}|=\sqrt{(2-(-2))^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

β. Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο το μέσο της $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{|\vec{AB}|}{2}=\sqrt{5}$.

Άρα $C:x^2+(y+1)^2=5$.

γ. Έστω $M(x,y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2,y)$ και $\vec{AB}=(4,-2)$.

Έχουμε: $(ABM)=5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|(\det\vec{AB},\vec{AM})|=5 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right|=10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |4y+2(x+2)|=10 \begin{cases} 4y+2x+4=10 \\ \text{ή} \\ 4y+2x+4=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ \text{ή} \\ 2x+4y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ \text{ή} \\ x+2y+7=0 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία $M(x,y)$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1:x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2:x+2y+7=0$.

δ. Είναι:

- $d(K,\varepsilon_1)=\dfrac{|0+2(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$
- $d(K,\varepsilon_2)=\dfrac{|0+2(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$

Άρα οι ευθείες ε_1, ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

123 Θέμα 4 – 22280

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-6$, $B=-8$, $\Gamma=21$ και $A^2+B^2-4\Gamma=36+64-84=16>0$.

Επομένως, το κέντρο K του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(3,4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=2$, $B=-2$, $\Gamma=1$ και $A^2+B^2-4\Gamma=4+4-4=4>0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$Λ\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right) = (-1,1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$ρ = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4Γ}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(ΚΛ) = \sqrt{(x_Λ - x_K)^2 + (y_Λ - y_K)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Επίσης, $R + ρ = 3$.

Αφού $(ΚΛ) > R + ρ$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

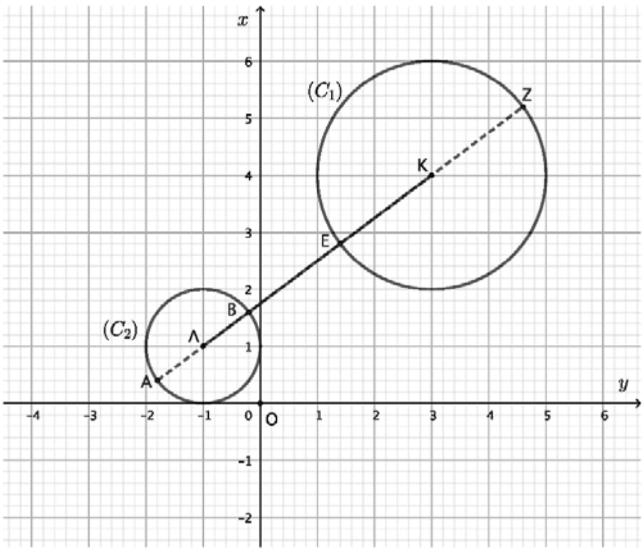
γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(ΒΕ) = (ΚΛ) - (ΕΚ) - (ΛΒ) = (ΚΛ) - R - ρ = 5 - 2 - 1 = 2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(ΑΖ) = (ΚΛ) + (ΑΛ) + (ΚΖ) = (ΚΛ) + R + ρ = 5 + 2 + 1 = 8$$



124 Θέμα 4 – 18415

α. Η (1) παριστάνει για κάθε $λ \in \mathbb{R}$ κύκλο με κέντρο $K(3λ, -2λ)$ που ανήκει στην ευθεία ε: $2x + 3y = 0$, αφού $2 \cdot 3λ + 3(-2λ) = 6λ - 6λ = 0$.

β. Αν $M(x, y) \in ε_1$ ή $ε_2$, τότε $d(M, ε) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}} = 1 \Leftrightarrow |2x+3y| = \sqrt{13} \Leftrightarrow 2x + 3y - \sqrt{13} = 0$ ή $2x + 3y + \sqrt{13} = 0$ που είναι οι εξισώσεις των ευθειών $ε_1$, $ε_2$.

γ. Αφού τα κέντρα $K(3\lambda, -2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2, έχουμε ότι $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = 1 = \rho$. Οπότε όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες ε_1, ε_2.

δ. Το τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες ε_1, ε_2, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των ε_1, ε_2, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.

125 Θέμα 4 – 15993

α. Η (1) γράφεται $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = (\sqrt{\lambda^2+1})^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 2\lambda y = (x-2)^2 + y^2 - 1$.

Πρέπει $\begin{cases} 2y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Επομένως όλοι οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.

γ. Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB επειδή $y_A = y_B = 0$ έχει εξίσωση $y = 0$.

Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

δ. Αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1, 0)$ ή το $B(3, 0)$, οπότε $\beta = 0$, άρα $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0 = 0$.

126 Θέμα 4 – 15791

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $A(0,7)$ και ακτίνα $\rho = 2$, οπότε έχει εξίσωση

$(x-0)^2 + (y-7)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-7)^2 = 4$

β. i. $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = 4$

ii. $(AB) = \sqrt{(0-x_1)^2 + (7-y_1)^2} \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{x_1^2 + (7-y_1)^2}$

γ. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$(AB) = 2 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2 + (y_1-7)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1-7)^2 = 16$, (1)

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε: $d(A, B) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|0 + x_1 - 5|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 2 \Leftrightarrow |x_1 - 5| = 2$, (2).

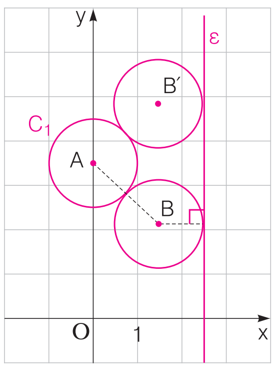
Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$\begin{cases} x_1^2 + (y_1-7)^2 = 16 \\ |x_1 - 5| = 2 \end{cases}$

Προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα:

- $\begin{cases} x_1^2 + (y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2 + (y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2 = -33 \\ x_1 = 7 \end{cases}$, αδύνατο.
- $\begin{cases} x_1^2 + (y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 + (y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2 = 7 \\ x_1 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 7 - \sqrt{7} \text{ ή } y_2 = 7 + \sqrt{7} \\ x_1 = 3 \end{cases}$



Άρα οι κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $B(3, 7-\sqrt{7})$ και $B'(3, 7+\sqrt{7})$ και ακτίνα $\rho = 2$.

127 Θέμα 4 – 15272

α. Η εξίσωση γράφεται

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β. Είναι: $(KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} > \rho = 2$.

Οπότε το $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $M(3, 2)$ είναι:

• Η κατακόρυφη ευθεία $x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο $K(1, -2)$ του κύκλου απόσταση $d = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 = \rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

• Οι ευθείες με κλίση λ , δηλαδή: $y - 2 = \lambda(x-3) \Leftrightarrow \lambda x - y - 3\lambda + 2 = 0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου K από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου. Είναι:

$$d = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 2 - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

Οπότε η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το M είναι η

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου είναι οι ευθείες $x = 3$ και $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

128 Θέμα 4 – 15080

α. Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 - 4(-8) = 36 > 0 \quad , \quad -\frac{A}{2} = 1 \quad , \quad -\frac{B}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 3$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

Όμοια για την (2) βρίσκουμε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β. i. $(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + 0^2} = 2$

ii. Είναι $\rho_1 - \rho_2 = 3 - 1 = 2$ και από το **β.i.** έχουμε $(K\Lambda) = 2 = \rho_1 - \rho_2$, οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ. Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 διέρχεται από το σημείο $K(1, 0)$.

Από το $K(1, 0)$ έχουμε τις ευθείες (η): $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ (κατακόρυφη)

(ε): $y - 0 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y - \lambda x + \lambda = 0$, που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι $d(\Lambda, \eta) = \dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 \neq \rho_2 = 1$, οπότε η ευθεία (η) δεν εφάπτεται του C_2 .

Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 3\lambda + \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις:

(ε_1): $3y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και (ε_2): $3y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

129 Θέμα 4 – 15081

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(-\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα: $\rho_1 = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = 1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα: $\rho_2 = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = 3$.

β. i. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι:

(ε): $x = 0$ (κατακόρυφη)

(η): $y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$, που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \sqrt{2} \neq \rho_1 = 1$ και $d(\Lambda, \varepsilon) = \dfrac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 3\sqrt{2} \neq \rho_2 = 3$.

Οπότε η (ε) δεν εφάπτεται των C_1 , C_2 .

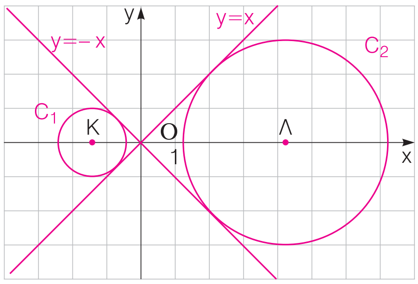
Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους.

$$\begin{cases} d(K, \eta) = \rho_1 \\ d(\Lambda, \eta) = \rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|0-\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 \\ \dfrac{|0+3\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sqrt{2}\lambda| = \sqrt{1+\lambda^2} \\ |3\sqrt{2}\lambda| = 3\sqrt{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2 = 1+\lambda^2 \\ 18\lambda^2 = 9+9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 , C_2 με εξισώσεις:

$(\eta_1): y = -x$ και $(\eta_2): y = x$

ii. Η αρχή των αξόνων O(0,0) είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2}, 0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



130 Θέμα 4 - 18416

α. Η εξίσωση (1) γράφεται: $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 2x + 2y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 4y = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2 + y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 2^2 = 3^2 + 2^2 - 8 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β. i. • Η (1) για $x = 4$ και $y = 4$ γίνεται $0 + 4\cdot 2 = 2\cdot 4$, που ισχύει.

• Η (1) για $x = 2$ και $y = 0$ γίνεται $2(-2) + 0 = 2\cdot(-2)$, που ισχύει.

Οπότε τα σημεία A και B είναι πάνω στον κύκλο.

Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο K να είναι το μέσο του τμήματος AB.

Είναι: • $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3 = x_K$

• $\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 = y_K$

ii. Η κλίση της διαμέτρου AB είναι $\lambda = \dfrac{0-4}{2-4} = 2$

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Οι ευθείες με κλίση 2 είναι $\varepsilon: y = 2x + \beta \Leftrightarrow 2x - y + \beta = 0$.

Η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου όταν:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 3 - 2 + \beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\beta + 4| = 5 \Leftrightarrow \beta + 4 = 5 \ \text{ή}\ \beta + 4 = -5 \Leftrightarrow \beta = 1 \ \text{ή}\ \beta = -9 .$$

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = 2x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 9$.

γ. Ισχύει $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2\rho$. Οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά, άρα η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου.

Επομένως $2 = 3\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$.

131 Θέμα 4 – 15432

α. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 = 20\kappa^2 - 16$

Πρέπει $20\kappa^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa < -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ή $\kappa > \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

β. Για κάθε $\kappa \in \left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε από έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa, \kappa)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{20\kappa^2 - 16}}{2}$

γ. Έστω $K(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x = 2\kappa \\ y = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = \kappa \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία $x - 2y = 0$.

δ. Για $\kappa = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, επομένως είναι $A = -4$, $B = -2$ και $\Gamma = 4$, οπότε το κέντρο είναι $K(2, 1)$ και η ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{20 \cdot 1^2 - 16}}{2} = 1$

Είναι $(K\Gamma) = |y_\Gamma - y_K| = |2 - 1| = 1 = \rho$, οπότε το $\Gamma(2, 2)$ είναι σημείο του κύκλου. Επειδή $x_K = x_\Gamma = 2$ η ΚΓ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, οπότε επειδή η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Γ είναι κάθετη στην ΚΓ θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Άρα έχει εξίσωση $y = y_\Gamma \Leftrightarrow y = 2$.

132 Θέμα 4 – 15628

α. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4 - 2k)^2 + [-2(1 + k)]^2 - 4 \cdot (5 - 2k) =$

$= 16 - 16k + 4k^2 + 4 + 8k + 4k^2 - 20 + 8k = 8k^2 > 0$ για κάθε $k > 0$.

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{8k^2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}k}{2} = k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ ή $M\left(-\dfrac{4 - 2k}{2}, -\dfrac{-2(1 + k)}{2}\right)$ ή $M(k - 2, k + 1)$.

β. Έστω $M(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$.

Άρα τα σημεία Μ ανήκουν στην ευθεία $y = x + 3$, για κάθε $k > 0$.

133 Θέμα 4 – 22264

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in R$, για την οποία:

$A = \lambda$, $B = \lambda$ και $\Gamma = \lambda - 1$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 =$

$2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0$ για κάθε $\lambda \in R$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $\lambda \in R$

είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2})$ και η

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, \varepsilon) = \rho$ (2).

Είναι: $d(K, \varepsilon) = \frac{|-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-\lambda+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $\lambda = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $\lambda = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y - y_M = \kappa(x - x_M)$ με $\kappa \in R$ ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = \kappa(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2\kappa x - 2y + 3\kappa - 1 = 0$ με $\kappa \in R$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C $\Leftrightarrow d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow d(K, \zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως $d(K, \zeta) = \frac{|2\kappa(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3\kappa-1|}{\sqrt{(2\kappa)^2+(-2)^2}} = \frac{|-\kappa+1+3\kappa-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2+4}} = \frac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2+1}} =$

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για $\kappa = 1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_1: $2x - 2y + 2 = 0$ ή ζ_1: $x - y + 1 = 0$.

Για $\kappa = -1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: $-2x - 2y - 4 = 0$

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $ζ_2$: $-2x - 2y - 4 = 0$ ή $ζ_2$: $x + y + 2 = 0$. Οι $ζ_1$, $ζ_2$ είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι η $ζ_2$ είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο Μ ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

134 Θέμα 4 - 21154

α. Έχουμε $A = -4α$, $B = -4α$ και $Γ = 0$. Είναι $A^2 + B^2 - 4AΓ = 16α^2 + 16α^2 = 32α^2$.

Πρέπει $32α^2 > 0 \Leftrightarrow α^2 > 0 \Leftrightarrow α \neq 0$.

β. • Το κέντρο των κύκλων είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $K(2α, 2α)$, $α \neq 0$.

• Η ακτίνα των κύκλων είναι $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4AΓ}}{2} = \frac{\sqrt{32α^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}\,|α|}{2} = 2\sqrt{2}\,|α|$, $α \neq 0$.

γ. Έχουμε $K(2α, 2α)$, $α \neq 0$. Έστω $K(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x = 2α \\ y = 2α \end{cases}, α \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0, 0)$, αφού για $x \neq 0$ είναι $y \neq 0$.

δ. Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει: $d(K, x'x) = R \Leftrightarrow |y_K| = R \Leftrightarrow |2α| = 2\sqrt{2}\,|α| \Leftrightarrow |α| = \sqrt{2}\,|α| \Leftrightarrow |α|(1-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow |α| = 0 \Leftrightarrow α = 0$.

Όμως, $α \neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

135 Θέμα 4 - 21159

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, είναι το μέσο της Μ, επομένως

$$M\left(\frac{α+0}{2}, \frac{β+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{α}{2}, \frac{β}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$ρ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0-α)^2 + (β-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{α^2+β^2}}{2}.$$

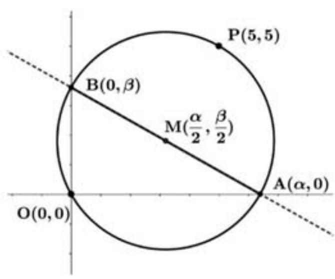
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x - \frac{α}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{β}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{α^2+β^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{α}{2} + \frac{α^2}{4} + y^2 - 2y\frac{β}{2} + \frac{β^2}{4} = \frac{α^2+β^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - αx - βy + \cancel{\frac{α^2}{4}} + \cancel{\frac{β^2}{4}} = \cancel{\frac{α^2}{4}} + \cancel{\frac{β^2}{4}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - αx - βy = 0. \quad (1)$$

Είναι όμως $α + β = 10$, τότε $β = 10 - α$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 + y^2 - αx - (10-α)y = 0.$$



β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2+y^2-x-9y=0$. (1)

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2+y^2-9x-y=0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x-8y=0 \Rightarrow x=y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2+x^2-9x-x=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία O (0,0) και P(5,5).

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο P(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$.
Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x=5$ και $y=5$ έχουμε:

$$0^2+0^2-\alpha\cdot 0-(10-\alpha)\cdot 0=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο M(x, y) είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{\alpha}{2} \\ y=\dfrac{\beta}{2} \\ \alpha+\beta=10,\ \alpha>0,\ \beta>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=2x \\ \beta=2y \\ \alpha+\beta=10,\ \alpha>0,\ \beta>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x+2y=10 \Leftrightarrow x+y=5\,.\ (\varepsilon)$$

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή α, β > 0 έχουμε:

$$\alpha>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \text{ και}$$

$$\beta>0 \Leftrightarrow y>0.$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, που ορίζεται από την ευθεία $x+y=5$ με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του A(5,0) και B(0,5).

136 Θέμα 4 – 20229

α. Έχουμε την εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία: $A=-(\lambda+8)$, $B=\lambda$ και $\Gamma=7$, οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=[-(\lambda+8)]^2+\lambda^2-4\cdot 7=(\lambda+8)^2+\lambda^2-28=$
$=\lambda^2+16\lambda+64+\lambda^2-28=2\lambda^2+16\lambda+36=2(\lambda^2+8\lambda+18)>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-8<0$.
Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) έχει συντεταγμένες $\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $\left(-\dfrac{-(\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$ ή $\left(\dfrac{\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2+8\lambda+18)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Λόγω του ερωτήματος **α.**, τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι τα $K\left(\dfrac{\lambda+8}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $K(x, y)$, τότε: $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda+8}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y+8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x+y-4=0$.

γ. Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ γράφεται:

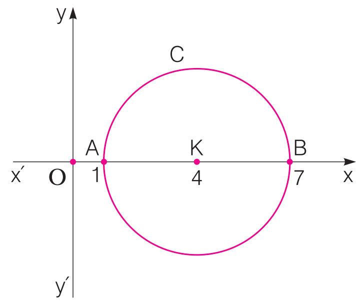
$x^2+y^2-\lambda x-8x+\lambda y+7=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-8x+7)+\lambda(y-x)=0$, οπότε:

$\begin{cases} y-x=0 \\ x^2+y^2-8x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = y$

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $N\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

δ. Λόγω του ερωτήματος **α.**, για $\lambda=0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho=3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην OK . Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.



137 Θέμα 4 – 15826

α. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma = [-2(\lambda+1)]^2+(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1) = 4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4 = 8\lambda^2$

Πρέπει $8\lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}\right)$ ή $K(\lambda+1, \lambda)$ και η ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2} = \sqrt{2}|\lambda|$

β. Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1, 0)$.

γ. i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_1 , K_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{y_{K_1}-y_{K_2}}{x_{K_1}-x_{K_2}} = \dfrac{2-1}{3-2} = 1$

και εξίσωση $\zeta: y-1=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$.

Οι συντεταγμένες του $K(\lambda+1, \lambda)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-1$, αφού $\lambda=\lambda+1-1$, για κάθε $\lambda \neq 0$.

Άρα τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ .

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1, 0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1, 0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \neq 0$, αφού $1^2+0^2-2(\lambda+1)\cdot 1-2\lambda\cdot 0+2\cdot\lambda+1=0 \Leftrightarrow 0=0$, που ισχύει.

iii. Είναι $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\lambda| = \rho$, οπότε η ε είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

138 Θέμα 4 - 21276

α. • Έχουμε $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω αν $A(x, y)$. Έχουμε

$\begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=2\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=x+1 \\ y=2(x+1)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ \lambda=x+1 \end{cases}$, οπότε $\gamma_1: 2x-y+3=0$

• Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}=(-1\,,\,3)$ είναι

$\lambda=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{-1}=-3$, οπότε η ευθεία γ_2 έχει κλίση $\lambda=-3$.

Είναι $\gamma_2: y-y_\Sigma=\lambda(x-x_\Sigma)\Leftrightarrow y-2=-3(x+4)\Leftrightarrow y-2=-3x-12\Leftrightarrow 3x+y+10=0$.

β. Είναι: • $d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{|2\cdot 1-1\cdot 1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ και

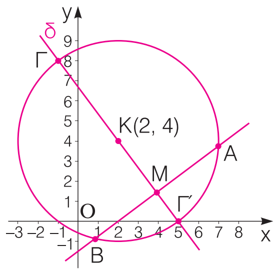
• $d(K\,,\,\gamma_2)=\dfrac{|3\cdot 1+1\cdot 1+10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|14|}{\sqrt{10}}=\dfrac{14}{\sqrt{10}}=\dfrac{14\sqrt{10}}{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.

Αφού $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<\dfrac{7\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow d(K\,,\,\gamma_1)<d(K\,,\,\gamma_2)$, πιο συμφέρουσα είναι η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ. Το κέντρο του κύκλου C που ορίζει το πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο $K(1\,,\,1)$. Αφού ο κύκλος εφάπτεται στη γραμμή γ_1 , η ακτίνα του είναι $\rho=d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Άρα $C:(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{16}{5}$.

139 Θέμα 4 – 18570



α. $x^2+y^2-4x-8y-5=0\Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16-5=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=25$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2,\,4)$ και η ακτίνα του είναι $\rho=5$.

β. i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η

$d(K,\varepsilon)<\rho\Leftrightarrow\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot 4-\mu|}{\sqrt{3^2+4^2}}<5\Leftrightarrow\dfrac{|-10-\mu|}{5}<5\Leftrightarrow|\mu+10|<25$

$\Leftrightarrow -25<\mu+10<25\Leftrightarrow -35<\mu<15$

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου K θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot 3-4\cdot 4=\mu\Leftrightarrow\mu=-10$. Η τιμή $\mu=-10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα $(-35,\,15)$ που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓAB με βάση τη χορδή AB. Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής AB που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής AB και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon=\dfrac{3}{4}$.

Επειδή $\delta\perp\varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\delta=-\dfrac{4}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι:

$y-y_K=-\dfrac{4}{3}(x-x_K)$ ή $y-4=-\dfrac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow 3y-12=-4x+8$

$\Leftrightarrow 4x+3y=20$. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases}x^2+y^2-4x-8x-5=0\\ y=\dfrac{1}{3}(20-4x)\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=5 \text{ ή } x=-1\\ y=0 \text{ ή } y=8\end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB, τα $\Gamma(5,\,0)$ και $\Gamma'(-1,\,8)$.

140 Θέμα 4 – 22223

α) Το διάνυσμα της διαμέσου $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\dfrac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2}=$

$=\dfrac{(\lambda+3\lambda,\lambda+1+\lambda-1)}{2}=\dfrac{(4\lambda,2\lambda)}{2}=(2\lambda,\lambda)$.

β)

i. Αφού $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$ θα είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ ή $(\lambda,\lambda+1)\cdot(3\lambda,\lambda-1)=0$

ή $3\lambda^2+(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ή $3\lambda^2+\lambda^2-1=0$ ή $4\lambda^2=1$ ή $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο M(x,y) της διαμέτρου ΒΓ.

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)=\left(2\cdot\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $A\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overrightarrow{AM}=\left(x_M-x_A,y_M-y_A\right)$ ή $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\left(x_M-2,y_M-\dfrac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases}x_M-2=1\\ y_M-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

ή $\begin{cases}x_M=3\\ y_M=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2\end{cases}$. Επομένως το κέντρο M είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση (AM)=$\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=$

$\sqrt{(3-2)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\left(x_o,y_o\right)$ και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $\left(x-x_o\right)^2+\left(y-y_o\right)^2=\rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ή $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{5}{4}$.

141 Θέμα 4 – 16191

α. i. $\overrightarrow{AM}=(x-1,\ \psi-1)$

$\overrightarrow{BM}=(x-5,\ \psi-5)$

$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}\right)^2=32$

$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0\Leftrightarrow x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0\quad(1)$

ii. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot10=32>0$. Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο.

β. i. Πρέπει $d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\dfrac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)$

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda-7=0 \Leftrightarrow \lambda=-7$ ή $\lambda=1$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην AB είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$.

Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$\text{συν}(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\text{συν}45^\circ$ ή $\dfrac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^1}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$

$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda=0$.

142 Θέμα 4 – 21349

α) i. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-9$, $B=-3$, $\Gamma=10$ και $A^2+B^2-4\Gamma=81+9-40=50>0$.

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$$

και η ακτίνα του

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

<u>Εναλλακτική λύση (με συμπλήρωση τετραγώνου)</u>

Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2+y^2-9x-3y+10=0$$

$$\left[x^2-2\cdot\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{2}\right)^2\right]+\left[y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-10$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}+\frac{9}{4}-\frac{40}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ii. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K,\varepsilon)=\frac{\left|4\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{3}{2}-10\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{25}{2}\right|}{5}=\frac{5}{2}<\frac{5\sqrt{2}}{2}=R$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία A και B.

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$3y=10-4x \Leftrightarrow y=\frac{10-4x}{3}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+\left(\frac{10-4x}{3}\right)^2-9x-3\left(\frac{10-4x}{3}\right)+10=0$$

$$x^2+\frac{(10-4x)^2}{9}-9x-(10-4x)+10=0$$

$$x^2+\frac{(10-4x)^2}{9}-9x+4x=0$$

$$x^2+\frac{(10-4x)^2}{9}-5x=0$$

$$9x^2+\left(100-80x+16x^2\right)-45x=0$$

$$25x^2-125x+100=0$$

$$x^2-5x+4=0 \quad (3)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι $x=1$, $x=4$.

Για $x=1$ είναι $y=2$.

Για $x=4$ είναι $y=-2$.

Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$.

β) i. Είναι:

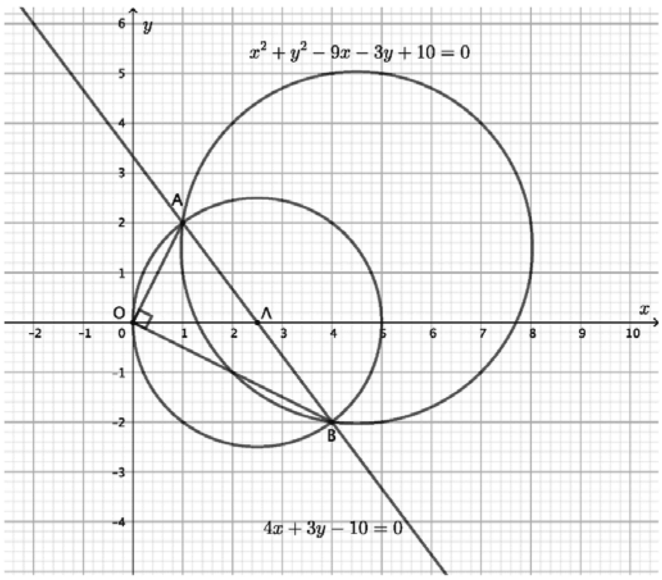
$$\overrightarrow{OA}=\left(x_A-x_O,y_A-y_O\right)=(1,2)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(x_B-x_O,y_B-y_O\right)=(4,-2)$$

Οπότε:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot 4+2\cdot(-2)=0$$

ii.

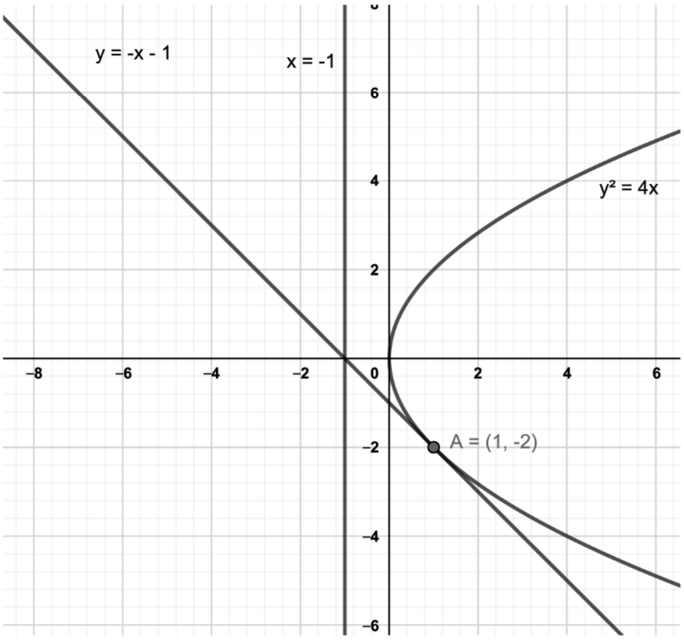


Αφού είναι $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, η γωνία $A\hat{O}B$ θα είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.

143 Θέμα 2 – 22267

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x. Η Εστία της είναι το σημείο Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της έχει εξίσωση x = -$\frac{p}{2}$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή.** Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(**1, 0**) και η διευθετούσα έχει εξίσωση **x = -1** ».



β) Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της παραβολής είναι της μορφής : $yy_1=p(x+x_1)$ και επειδή p =2 η εφαπτόμενη ε θα είναι ε: $yy_1=2(x+x_1)$. Δίνεται το σημείο επαφής Α(1, -2), οπότε η εξίσωση της ευθείας ε για $x_1 = 1$ και $y_1 = -2$ θα είναι ε: -2y= 2 (x +1) ή ε: y = -x -1.

γ) Για να βρω το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x θέτω στην εξίσωση της ευθείας ε όπου y = 0. Οπότε έχω -x -1 = 0 ή x = -1, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι το σημείο (-1,0), το οποίο είναι σημείο της διευθετούσας αφού η εξίσωση της διευθετούσας είναι η x = -1.

144 Θέμα 2 – 20235

α. Είναι: C: $y^2 = 2\cdot 4x$, οπότε $p = 4$, άρα $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $E(2, 0)$ είναι η εστία και δ: $x = -\frac{p}{2}$ ή $x = -2$, είναι η διευθετούσα.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι:

$$\varepsilon_1:\ yy_1 = p(x + x_1) \text{ ή } \varepsilon_1:\ y\cdot 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1: y = 4x + \frac{1}{2} \text{ με } \lambda_{\varepsilon_1} = 4$$

Επίσης για την ευθεία ε: $8x-2y+3=0$ είναι: $\lambda_\varepsilon=-\frac{A}{B}=-\frac{8}{-2}=4$.

Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_\varepsilon$ επομένως η $\varepsilon_1 // \varepsilon$.

145 Θέμα 2 - 21307

α. • Είναι $x^2=12y \Leftrightarrow x^2=2\cdot 6y$, οπότε $\rho=6$, άρα η εστία της είναι το $E(0\,,\frac{6}{2})$ ή $E(0\,,3)$.

• Για $y=3$ έχουμε $x^2=12\cdot 3 \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=-6$.

Άρα είναι τα σημεία $(6\,,3)$ και $(-6\,,3)$.

β. Τα σημεία $A(6\,,3)$ και $B(-6\,,3)$ λόγω του ερωτήματος **α.** είναι σημεία της παραβολής. Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 της παραβολής στα Α και Β αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

- $\varepsilon_1: 6x=6(y+3) \Leftrightarrow x=y+3 \Leftrightarrow y=x-3$
- $\varepsilon_2: -6x=6(y+3) \Leftrightarrow -x=y+3 \Leftrightarrow y=-x-3$

γ. Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ 2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3=x-3 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 είναι $(0\,,-3)$.

146 Θέμα 2 – 22190

α) Αρχικά υπολογίζουμε την παράμετρο p της παραβολής. Είναι:

$$2p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$$

Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες

$$E\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{1}{4},0\right)$$

Η διευθετούσα (δ) της παραβολής έχει εξίσωση

$$x=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4}$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Για $x=1$ και $y=-1$ είναι:

$$(-1)^2=1$$

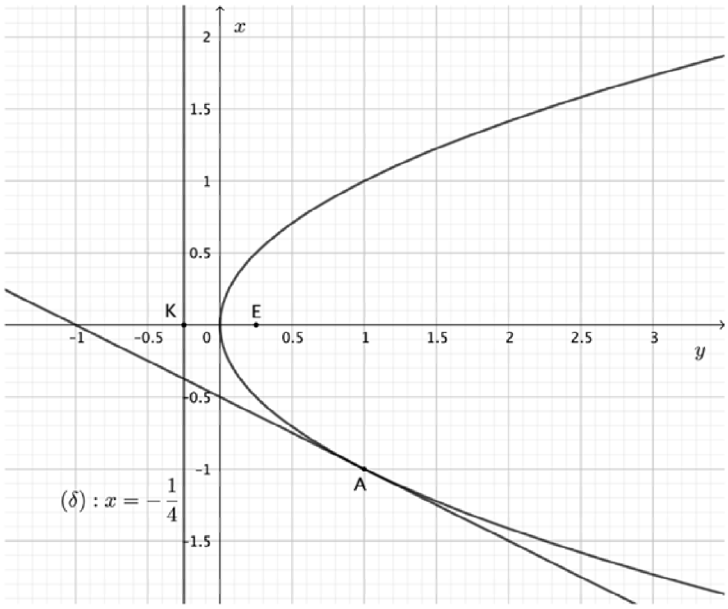
Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Α είναι σημείο της παραβολής.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι:

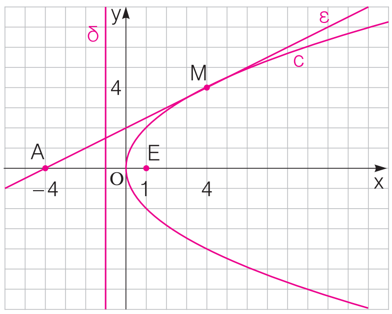
$$yy_1=p(x+x_1)$$

Αφού δίνεται Α(1,-1), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$-1\cdot y=\frac{1}{2}(x+1) \text{ ή } x+2y+1=0$$



147 Θέμα 2 – 18242



α. Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $E(1, 0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

β. Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x + x_1)$ δηλαδή $y \cdot 4 = 2(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4$.

γ. Η ευθεία (ε) εκτός από το $M(4, 4)$ διέρχεται και από το σημείο $A(-4, 0)$.
Η παραβολή C , η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

148 Θέμα 2 - 21306

α. • Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και κορυφή $(0 , 0)$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E(\frac{p}{2} , 0)$.

Οπότε $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x \Leftrightarrow y^2 = 8x$.

• Για $x = 3$ έχουμε $y^2 = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \sqrt{24} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{6}$, αφού $y > 0$.
Άρα $A(3 , 2\sqrt{6})$.

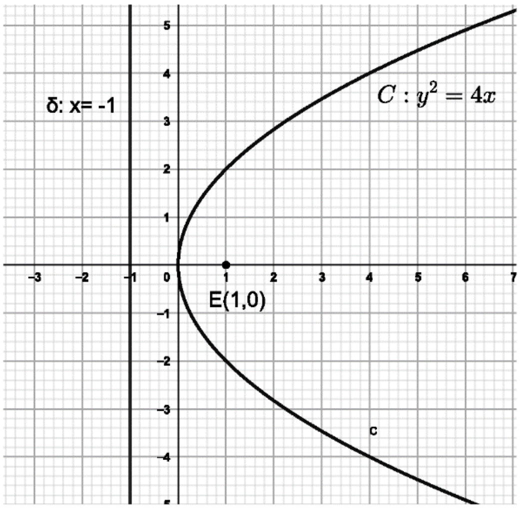
β. Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η ευθεία $x = -\frac{p}{2}$.
Οπότε: $\delta : x = -2$ την οποία σχεδιάζουμε (ευθεία κάθετη στον $x'x$ από το σημείο $(-2 , 0)$).

γ. Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση
$\varepsilon : 2\sqrt{6}y = 4(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{6}y + 6 = 0$.

149 Θέμα 4 - 22275

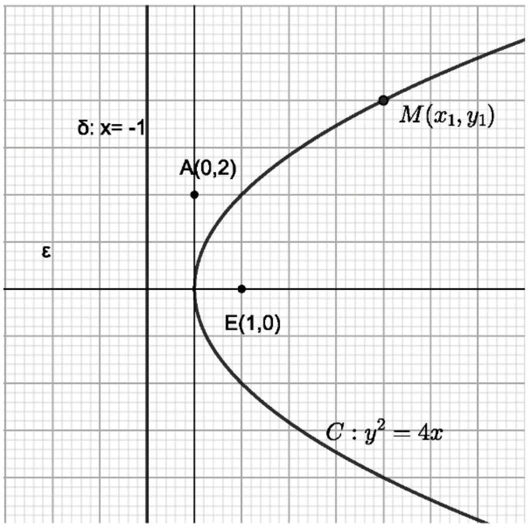
Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x.

α)



Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια παραβολή. Η εστία Ε της παραβολής (C) έχει συντεταγμένες Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση x = - $\frac{p}{2}$. Επειδή p =2 η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1, 0) και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση δ : x = -1.

β)



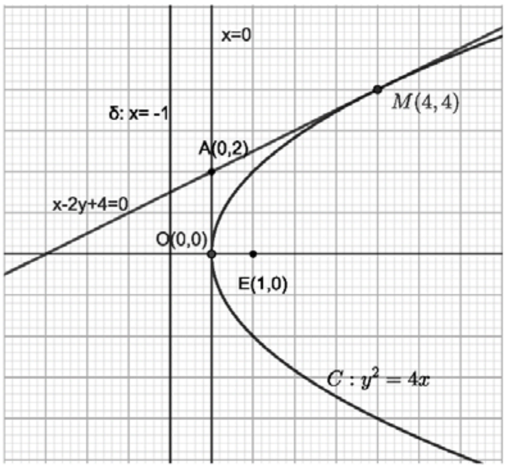
Το σημείο Α(0, 2) είναι εξωτερικό σημείο της παραβολής, αφού είναι σημείο στον άξονα y΄y και η παραβολή που μας δόθηκε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα y΄y την κορυφή της Ο(0, 0). Θεωρούμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής $y\, y_1 = p\,(x + x_1)$, και επειδή p =2 η εφαπτόμενη θα είναι ε: $y\, y_1 = 2\,(x + x_1)$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $2\, y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση (1). Άρα $y_1^2 = 4 \cdot x_1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει $x_1^2 = 4\, x_1 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Για $x_1 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 0$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $0 = 2\,(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας y΄y.

Για $x_1 = 4$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 4$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε: $4y = 2\,(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο Α(0, 2) είναι οι: x = 0 (άξονας y΄y) και η ευθεία ε με εξίσωση $x - 2y + 4 = 0$.



150 Θέμα 4 - 20092

α. i. • Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο. Είναι

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

Η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού $\Delta = 9 - 48 < 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

• Είναι $\varepsilon : 4x - 3y + 12 = 0$ και $M(\frac{1}{4}, 1)$, οπότε

$$d(M\,,\,\varepsilon) = \frac{|4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

ii. • Για $y=0$ έχουμε $\frac{x}{3}=-1 \Leftrightarrow x=-3$, άρα $\Gamma(-3\,,\,0)$.

• Για $x=0$ έχουμε $\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow y=4$, άρα $\Delta(0\,,\,4)$.

Είναι: • $\overrightarrow{M\Gamma}=(-3-\frac{1}{4}\,,\,0-1)=(-\frac{13}{4}\,,\,-1)$

• $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(0+3\,,\,4-0)=(3\,,\,4)$

Οπότε $(M\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-\frac{13}{4} & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-13+3|=5$.

β. i. • Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε σημείο της $(x_1\,,\,y_1)$ έχει εξίσωση

$\zeta: yy_1=2(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{2}{y_1}\cdot x+\frac{2x_1}{y_1}$, οπότε $\lambda_\zeta=\frac{2}{y_1}$.

• Είναι $\lambda_\varepsilon=\frac{4}{3}$. Πρέπει $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{3}=\frac{2}{y_1} \Leftrightarrow y_1=\frac{3}{2}$.

Είναι $y_1^2=4x_1 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^2=4x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{9}{16}$.

Άρα $\zeta: y=\frac{2}{\frac{3}{2}}x+\frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4} \Leftrightarrow 16x-12y+9=0$.

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε , αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Κ , της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Για $x=0$ από την εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Άρα ένα σημείο της ευθείας ζ είναι το $K(0\,,\,\frac{3}{4})$ και έχουμε $\varepsilon: 4x-3y+12=0$.

Είναι $d(\zeta\,,\,\varepsilon)=d(K\,,\,\varepsilon)=\frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}}=\frac{\frac{39}{4}}{5}=\frac{39}{20}$.

151 Θέμα 4 – 18372

α. Για την $y^2=4x$ θα έχουμε ότι $2p=4$, οπότε είναι $p=2$.

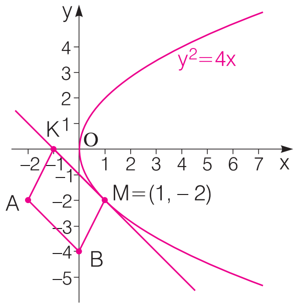
Η εστία της Ε της παραβολής είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $\left(\frac{2}{2}, 0\right)$ ή $(1, 0)$.

Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $x=-\frac{2}{2}=-1$.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1\,,\,y_1)$ είναι $yy_1=2(x+x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_1=\frac{2}{y_1}$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_2=\frac{-4-(-2)}{0-(-2)}=\frac{-2}{2}=-1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ πρέπει $\lambda_1=\lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1}=-1$, άρα $y_1=-2$.

Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2=4x_1$.
Αντικαθιστούμε και έχουμε $(-2)^2=4x_1$, άρα $x_1=1$.
Επομένως το σημείο Μ θα είναι το $(1, -2)$.



γ. Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της $M(1,-2)$ θα είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$ ή $-2y = 2(x+1)$ ή $-y = x+1$ ή $x+y+1=0$.

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $K(-1.\ 0)$.

Από το ερώτημα **β.** γνωρίζουμε ότι $KM // AB$.

$$(KM) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}\ .$$

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο.

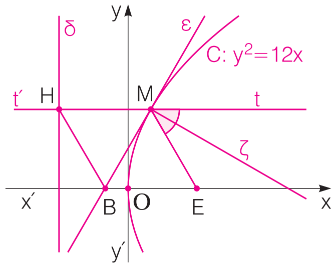
152 Θέμα 4 – 15394

α. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $y_1 y = p(x + x_1)$. Αλλά $2p = 12$, άρα $p = 6$. Οπότε $(\varepsilon): 2\sqrt{3}\cdot y = 6(x+1) \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3}$.

β. Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\dfrac{p}{2}$, άρα είναι $(\delta): x = -3$ έτσι είναι $H(-3, 2\sqrt{3})$ και η εστία E έχει συντεταγμένες $E\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, άρα $E(3, 0)$. Επίσης για $y = 0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow x = -1$. Άρα $B(-1, 0)$.

γ. Είναι $\lambda_{ME} = \dfrac{2\sqrt{3}-0}{1-3} = -\sqrt{3}$ και $\lambda_{HB} = \dfrac{2\sqrt{3}-0}{-3-(-1)} = -\sqrt{3}$.

Άρα $ME // HB$. Άρα το MEBH είναι παραλληλόγραμμο. Από τον ορισμό της παραβολής είναι $MH = ME$. Οπότε είναι ρόμβος.



δ. Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής M , διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$ όπου E η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο M . Αλλά $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, έτσι $\lambda_\zeta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

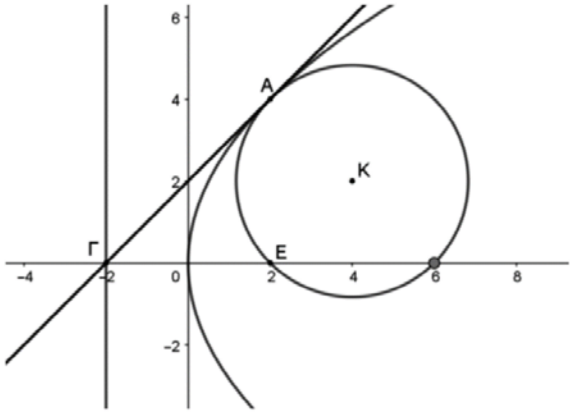
Άρα $(\zeta): y - 2\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

153 Θέμα 4 – 22465

α) Αν p η παράμετρος της παραβολής τότε η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και εφόσον η εστία της παραβολής μας είναι στο θετικό ημιάξονα x'x είναι p>0, άρα p=4. Οι συντεταγμένες της είναι $E(\frac{p}{2},0)$ άρα E(2,0). Η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x= -\frac{p}{2} = -2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2px =8x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $y_1y=p(x+x_1)$, άρα η εφαπτομένη της παραβολής μας στο σημείο της A(2,4) είναι $4y=4(x+2)$ ή $y=x+2$

γ)



Αν Κ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην ευθεία ε, επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των είναι -1 , και αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι 1 άρα $\lambda_{AK}=-1$. Η ευθεία ΑΚ διέρχεται από το σημείο Α(2,4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 , επομένως η εξίσωσή της είναι y-4 = -(x-2) ή y = -x+6 . Το κέντρο Κ του κύκλου ισαπέχει από το σημείο Α(2,4) και την εστία Ε(2,0), άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ. Εφόσον τα σημεία Α και Ε έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία ΑΕ είναι κάθετη στον άξονα x΄x, x΄x. Το μέσον του τμήματος ΑΕ είναι το σημείο (2,2). Έτσι η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ είναι η ευθεία y=2 και επομένως η τεταγμένη του κέντρου Κ είναι y=2 . Θέτοντας y=2 στην εξίσωση της ευθείας ΑΚ έχουμε 2 = - x+6 άρα x=4 . Άρα το κέντρο του ζητούμενου κύκλου είναι το Κ(4,2). Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $\rho=(KE)=\sqrt{((4-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$.

΄Αρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=8$.

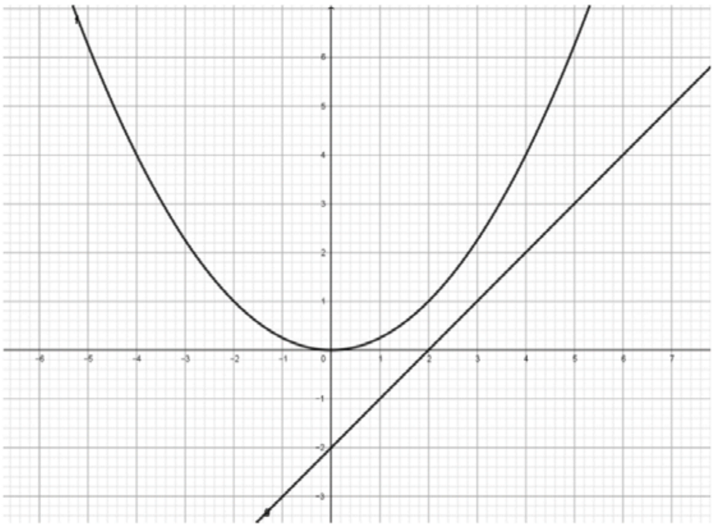
154 Θέμα 4 - 21883

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι p=2, άρα η εστία είναι το $E(0,\frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας δ: y= -1

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{Bmatrix} x^2=4y \\ y=x-2 \end{Bmatrix}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον Δ<0 . Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



γ)

i. Έστω σημείο Μ(x,y) σημείο της παραβολής , οπότε Μ(x,$\frac{1}{4}x^2$) . Η απόστασή του από την ευθεία ε: x-y-2=0 είναι d(M,ε) = $\frac{|x-\frac{1}{4}x^2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}x^2-x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2-x+2$ είναι Δ=1-4·$\frac{1}{4}$·2 = -1<0 και άρα $\frac{1}{4}x^2-x+2>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii. d(M,ε) = $\frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του Μ από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=2$

Άρα η ελάχιστη απόσταση d(M,ε) =$\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν x=2. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το Μ(2,1).

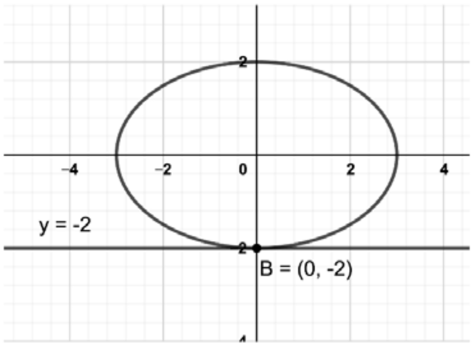
155 Θέμα 2 - 22268

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \sqrt{5}$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με 2α= 2·3 =6

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε(**$\sqrt{5}$, 0**) και Ε'(**-$\sqrt{5}$, 0**) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ ».

β)



Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της έλλειψης είναι της μορφής

ε: $\frac{x x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot xx_1 + 9\cdot yy_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής Β(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε

ε : $4x\cdot 0 + 9y\cdot(-2) = 36$ ή ε : $-18y = 36$ ή ε: $y = -2$.

156 Θέμα 2 - 21308

α. • Είναι $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ και $5 > 4$, οπότε έχουμε την έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha = 5$ και $\beta = 4$.

Είναι $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \gamma^2 = 9$, οπότε $\gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E(3\,,0)$ και $E'(-3\,,0)$.

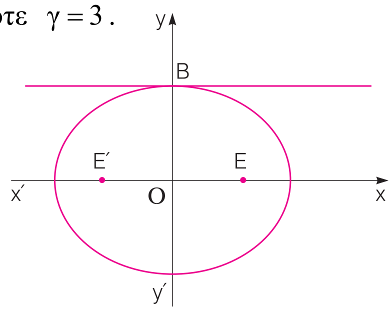
• Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2\cdot 3 = 6$.

β. • Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta = 2\cdot 4 = 8$.

• Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha = 2\cdot 5 = 10$.

γ. Η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0\,,4)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_B}{\alpha^2} + \frac{yy_B}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{0x}{25} + \frac{4y}{16} = 1 \Leftrightarrow y = 4.$$



157 Θέμα 2 - 22192

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, $\gamma = 12$. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

$$E(12,0),\ E'(-12,0)$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για $x = 0$ και $y = 9$ είναι:

$$\frac{0^2}{225} + \frac{9^2}{81} = 1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης .

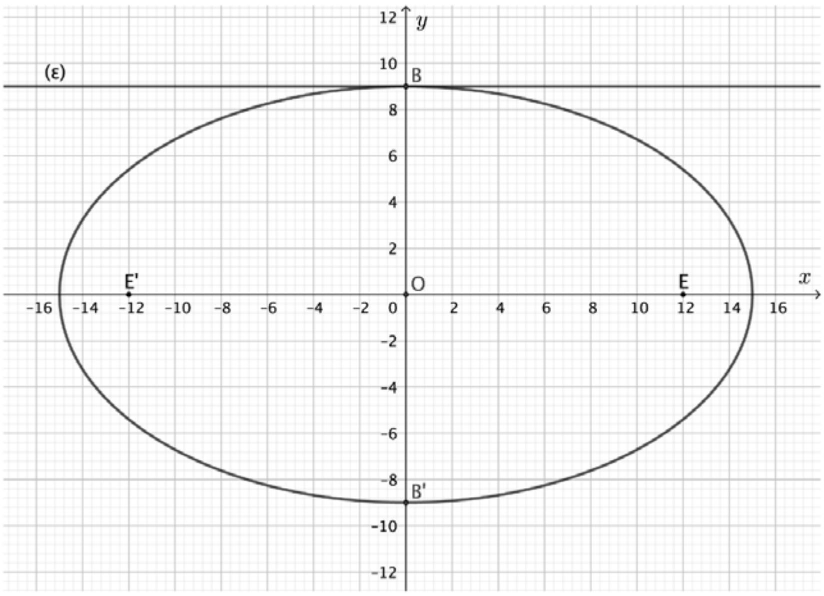
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225}+\frac{yy_1}{81}=1$$

Αφού δίνεται ότι B(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225}+\frac{9y}{81}=1 \quad ή \quad y=9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



158 Θέμα 2 - 22556

α) i) Είναι $(A'A)=|x_A-x_{A'}|=|5+5|=10$ και $(B'B)=|y_B-y_{B'}|=|4+4|=8$,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(A'A)=10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(B'B)=8$.

ii) Είναι $(A'A)=2\alpha$ ή $2\alpha=10$ ή $\alpha=5$

και $(B'B)=2\beta$ ή $2\beta=8$ ή $\beta=4$.

Επομένως

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

$5^2=4^2+\gamma^2$

$\gamma^2=9$

$\gamma=3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β) Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(ME')+(ME)=2\alpha$ ή $(ME')+(ME)=10$.

159 Θέμα 2 - 22564

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad και \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.

β) Η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_1 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.

160 Θέμα 2 - 22558

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2\,,0)$ και $E(2\,,0)$,

άρα $2\gamma=(E'E)=4$ ή $\gamma=2$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A)=8$,

άρα $2\alpha=(A'A)=8$ ή $\alpha=4$.

Επομένως $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=4^2-2^2=12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, για $x=x_E=2$ βρίσκουμε:

$$\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$3+y^2=12$$

$$y^2=9$$

$y=3$ ή $y=-3$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii) Είναι $(\Sigma P)=|y_P-y_\Sigma|=|-3-3|=|-6|=6$.

161 Θέμα 2 - 20883

α. Είναι $16x^2+25y^2=400 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και $5>4$.

Άρα $\alpha=5$, $\beta=4$ και $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma=3$.

Άρα $(Α'Α) = 2α = 2\cdot 5 = 10$, $(Β'Β) = 2β = 2\cdot 4 = 8$ και $Ε'(-3\,,\,0)$, $Ε(3\,,\,0)$.

β. Επειδή το $Ε'(-3\,,\,0)$ είναι σημείο του άξονα $x'x$ η παραβολή με εστία το $Ε'$ έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Είναι $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα $y^2 = 2\cdot(-6)x \Leftrightarrow y^2 = -12x$.

162 Θέμα 2 – 22168

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το Α(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \text{ ή } 4 = 2p \text{ ή } p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2\cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$.

ii. Η εστία Ε της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \text{ ή } E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο Ε(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο Ε(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$β^2 = α^2 - γ^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

163 Θέμα 4 – 22273

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

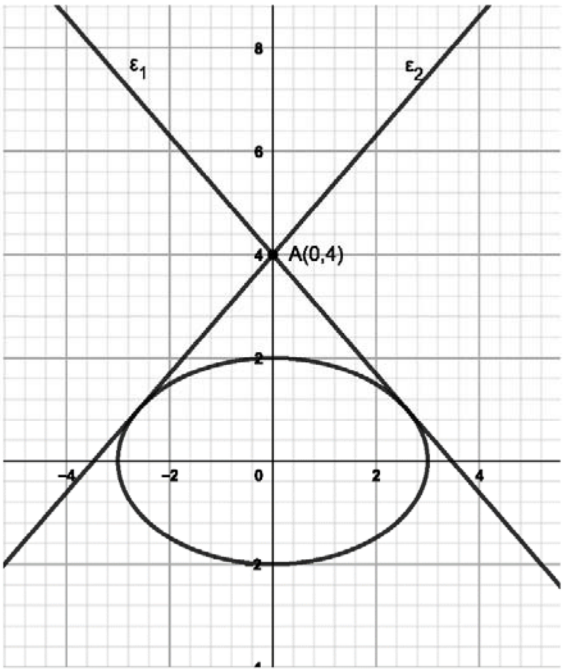
i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία Α(3,0) και Α'(-3,0).

Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2.

Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία Β(0,2) και Β'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου $γ = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της Ε, και Ε' έχουν συντεταγμένες $Ε(\sqrt{5}, 0)$ και $Ε'(-\sqrt{5}, 0)$.

β)



Το σημείο Α(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y'y στα σημεία Β(0, 2) και Β'(0,-2). Θεωρούμε Μ(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής ε: $\frac{x x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4xx_1 + 9yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4 \cdot 0\, x_1 + 9 \cdot 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο Μ(x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ή } x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$ε:\ 4\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9y = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$ε:\ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9y = 36 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι $ε_1$:

$$2\sqrt{3}x + 3y = 12 \text{ και } ε_2 : -2\sqrt{3}x + 3y = 12.$$

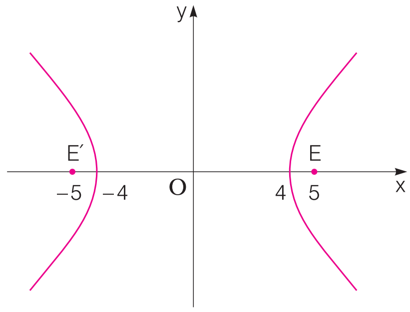
164 Θέμα 2 – 16128

α. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β. Έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\alpha=2\cdot 4=8$.

γ. Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Έτσι, έχουμε το διπλανό σχήμα.



165 Θέμα 2 – 22567

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$. Δίνεται $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha=4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha=4$, προκύπτει $\beta=3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$.

Είναι

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

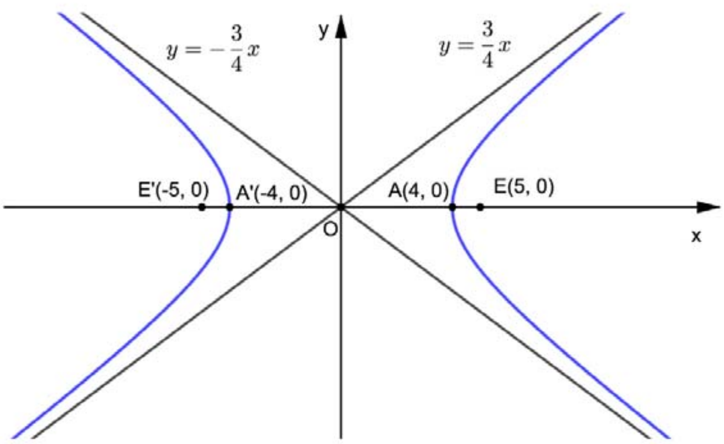
$\gamma^2=4^2+3^2$

$\gamma^2=25$

$\gamma=5$.

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β)



166 Θέμα 2 – 22559

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10,0)$, $E(10,0)$ και τις κορυφές της $A'(-8,0)$, $A(8,0)$ στον άξονα $x'x$, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\gamma=10$ και $\alpha=8$, άρα

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

$\beta^2=10^2-8^2$

$\beta^2=36$

$\beta=6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) i) Το M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του M από τις εστίες E' και E είναι 2α, δηλαδή $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Επειδή $\alpha=8$, θα είναι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii) Δίνεται $(ME)=9$ οπότε έχουμε:

$|(ME')-9|=16$

$(ME')-9=-16$ ή $(ME')-9=16$

$(ME')=-7$ ή $(ME')=25$

και επειδή $(ME')>0$ θα είναι $(ME')=25$.

167 Θέμα 2 – 22169

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η y = $\frac{\beta}{\alpha}$ x και y = - $\frac{\beta}{\alpha}$ x. Εφόσον η y = $\frac{3}{4}$ x είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή β = $\frac{3}{4}$ α. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι β = $\frac{3}{4}\cdot 4$ = 3.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$ =1 γίνεται $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}$ = 1 ή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$ = 1.

ii. $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+3^2=\gamma^2$ ή $\gamma^2=25$ ή γ = 5.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$ = 1 στο σημείο της (x_1,y_1) δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}$ = 1 ή $\frac{xx_1}{16}-\frac{yy_1}{9}$ = 1. Στο σημείο $(5,\frac{9}{4})$ θα έχουμε $\frac{5x}{16}-\frac{\frac{9}{4}y}{9}$ = 1 ή $\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}$ = 1.

168 Θέμα 2 – 22269

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}$ - y^2 = 1 (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x'x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ = $\sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε'(- $\sqrt{5}$, 0).

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες (x_1, y_1) θα έχει τη μορφή ε : $\frac{x x_1}{4}$ - $y y_1 = 1 \Leftrightarrow xx_1 - 4yy_1 = 4$. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon: \sqrt{5}\cdot x - 4\cdot\frac{1}{2}y = 4$ ή $\varepsilon: \sqrt{5}\cdot x - 2y = 4$.

169 Θέμα 2 – 22561

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2 - y^2 = 9$ είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 9$, άρα $\alpha = \beta = 3$, οπότε οι ασύμπτωτες της C είναι οι ευθείες $\delta_1: y = \frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y = -x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2 - y^2 = 9$ στο σημείο της $M(5\,,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1 - yy_1 = 9$ ή $\varepsilon: 5x - 4y = 9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x - 4y = 9$ με τις $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x - 4x = 9 \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x + 4x = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 9x = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και δ_1 έχει συντεταγμένες $(9\,,9)$ και το σημείο τομής των ε και δ_2 έχει συντεταγμένες $(1\,,-1)$.

170 Θέμα 2 – 22196

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 25 \Leftrightarrow \beta = 5$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 + 25 = 50$.

Άρα, $\gamma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$Ε(5\sqrt{2},0),\ Ε΄(-5\sqrt{2},0)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

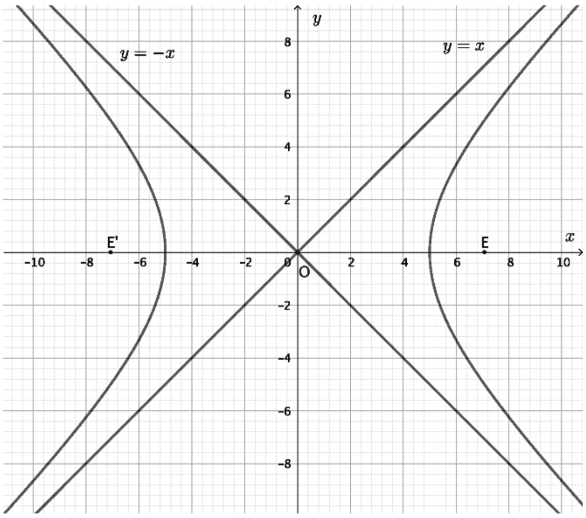
είναι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

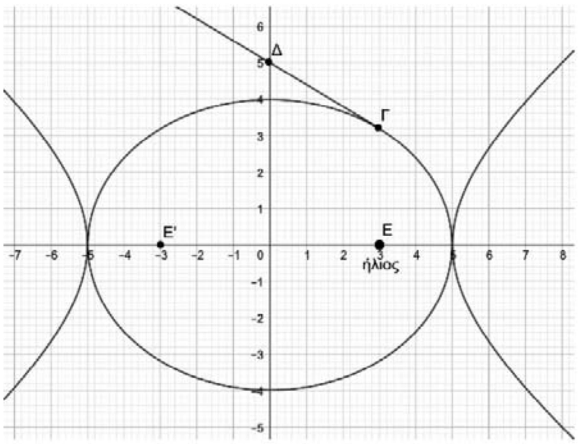
δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y=x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1), (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



171 Θέμα 4 – 22174



α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha} = 0,6$ ή $\frac{\gamma}{5} = 0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το $Γ\left(3, \frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25} + \frac{y\frac{16}{5}}{16} = 1$ ή $\frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3 \cdot 0}{25} + \frac{5}{5} = 1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25} = 2$ ή $x^2 = 25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ή $1 + \frac{y^2}{16} = 1$ ή $\frac{y^2}{16} = 0$